UNIVERSITÉS DE PARIS
BIBLIOTHÈQUE DE LA SORBONNE
13, RUE DE LA SORBONNE - 75257 PARIS CEDEX 05
TÉL : 01 40 46 30 27 - FAX : 01 40 46 30 44

Inv. : A|950648

SIGB bibl. :

SIGB ex. :

SU ppn :

SU epn :

Cote : MS 2538

1156413934

J. 10124

[Cours de Cauchy]

A/950648

MS 2538

MS 2538

Ecole polytechnique

Cours d'analyse

1

Lamartine

n° 1

SORBONNE

...ginaire

1re Leçon.

# Cours d'analyse algébrique.



étant donné sin a et cos b des arcs connus a et b on peut se proposer de chercher les formules

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a.$$

or si l'on multiplie les 2 Expons imag.res

$$\begin{array}{l} (\cos a + \sqrt{-1}\sin a) \\ (\cos b + \sqrt{-1}\sin b) \\ \hline (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \\ +(\sin a \cos b + \sin b \cos a)\sqrt{-1} \end{array}$$

on trouve

or le coefficient de la partie imaginaire donne la formule ci-dessus pour $\sin(a+b)$. La partie réelle donne $\cos(a+b)$.

chacune de ces Expons se nomme Expon symbolique. La 1re partie en est la partie réelle et la 2de l'imaginaire.

$\alpha + \beta\sqrt{-1}$. se nomme Expon imaginaire ou symbolique, elle est la réunion des 2 formules

$$\alpha = \gamma$$
$$\beta = \delta$$

que l'on trouve en égalant dans les 2 membres les quantités réelles avec les réelles, et les imaginaires aussi entre elles.

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta\sqrt{-1} \\ \alpha - \beta\sqrt{-1} \\ \hline \alpha^2 + \beta^2 \end{array}$$

se nomment expons conjuguées. or le produit de expons conjuguées est égal à la somme des carrés de la quantité réelle et du coeff.t de la quantité imaginaire.

Concevons qu'on multiplie ensemble 2 couples d'Exps conjugués.

(1) $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ } (3) $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ }
(2) $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ } (4) $\alpha'-\beta'\sqrt{-1}$ }

on peut exécuter les calculs de plusieurs manières on obtient, $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)$. en m. d'abord chaq groupe

mult. (1 et 3) et (2 et 4). on a

$(\alpha\alpha'-\beta\beta')+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{-1}$

m. (1,4) (2,3). on obtient

$(\alpha\alpha'-\beta\beta')+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{-1}$

or ces Exps sont encore des Exps conjugués et l'on a si l'on forme les produit

$(\alpha\alpha'-\beta\beta')^2+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)$

donc si l'on prend le carré de 2 nombres entiers on aura pour produit résultant de la somme de 2 carrés de ces par les 2 autres, un nombre qui sera la somme de 2 carrés.

Exemple

$(9+4)(36+25)=13\times61=793$

or 793 est la somme de 2 carrés, pour voir comment on peut les décomposer en 2 carrés on prend les nombres qui ont servi à former les carrés ci-dessus on prend les cubes des 2 nombres des 1er. groupe que l'on élève au carré

$8^2+27^2=793.$

3, 2, 6, 5.

$(3\times6-10)^2+(3\times5+12)^2=27^2+8^2=793.$

il y a deux manières de décomposer le nombre, car le 1er. membre ne change pas en changeant $\alpha$ et $\beta$ entre eux on a $(\alpha'^2+\beta'^2)(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)+(\alpha\alpha'+\beta\beta')$.

les Expressions $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ peuvent être à une forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

$\rho$ étant le module et $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ étant l'exp.on réduite $\rho$ est réel et a ainsi que $\theta$ une infinité de valeurs. on veut déterminer $\rho$ de manière que l'exp.on soit juste

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho\cos\theta + \rho\sqrt{-1}\sin\theta.$$ d'où —

$$\left.\begin{array}{l}\rho\cos\theta = \alpha \\ \rho\sin\theta = \beta\end{array}\right\}$$ qui donnent $$\left.\begin{array}{l}\rho^2\cos^2\theta = \alpha^2 \\ \rho^2\sin^2\theta = \beta^2\end{array}\right\}.$$

fesant la somme on a $\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2$ $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

donc $\cos\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ ; $\sin\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta}}$ ;

telles sont les valeurs qui satisfont aux Eq.ons ci-dessus et qui peuvent être exprimées en nombres car en fesant les carrés on satisfait à la cond.on comme

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

cet angle peut ~~augmenter~~ varier d'un multiple qq.e de la circonférence car on aura toujours même sinus et cosinus.

$$\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$

angle que l'on peut ~~augmenter~~ faire varier d'un nombre qq.e de demi-circonférences —

1°. $\theta = \theta_0 \pm 2k\pi$ 2°. $\theta = \theta_0 \pm k\pi$.

$k$ étant une indéterminée qq.e —

Pour trouver les propriétés des ~~réduites~~ imaginaires il suffit de raisonner sur leurs réduites.

Or on a —

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$
$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \rho'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta')$$

si l'on veut avoir le produit, il faut multiplier d'après les principes précédents les expons réduites qui les représentent on a

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1}) = \rho\rho'(\cos(\theta+\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta+\theta'))$$

($\rho\rho'$ étant réel), puisqu'il suffit d'ajouter les arcs pour en faire le produit, d'après ce qu'on a vu

si l'on avait un plus grand nombre de facteurs semblables à multiplier on aurait de même

$$(\cos a+\sqrt{-1}\sin b)(\cos b+\sqrt{-1}\sin b)(\cos c+\sin c\sqrt{-1}) =$$

$$(\cos(a+b)+\sqrt{-1}\sin(a+b))(\cos c+\sin c\sqrt{-1}) =$$

$$= \cos(a+b+c)+\sin(a+b+c)\sqrt{-1}$$

pour obtenir d'une le produit série de termes imaginaires il faut au lieu des arcs mettre la somme de tous ces arcs. supposons les arcs égaux entre eux et à $\theta$. $a+b+c \ldots = n\theta$

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n = \cos n\theta+\sin n\theta\sqrt{-1}$$

soit $\theta=+z$ et $\theta=-z$ ; on a ;

$$(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz+\sqrt{-1}\sin nz$$

$$(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz-\sqrt{-1}\sin nz$$

on sait que chacune de ces Eqons équivaut à 2 que l'on trouve en identifiant les termes réels et les coeffts des imaginaires.

$$\cos 2z+\sqrt{-1}\sin 2z = (\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^2$$

Eqon dont on peut (quoiqu'elle soit imaginaire) tirer des résultats exacts en la modifiant, elle est l'expon algque de 2 Eqons entre les coeffts de $\sqrt{-1}$ et les quantités réelles. car — on a un divt.

$= \cos^2 z - \sin^2 z + 2\sqrt{-1}\sin z \cos z.$

d'où

$$\left.\begin{aligned}\cos 2z &= \cos^2 z - \sin^2 z \\ \sin 2z &= 2\sin z \cos z\end{aligned}\right\}$$ Exprimer les sinus et cosinus du double d'un arc

soit $n = 3$.

$\cos 3z + \sqrt{-1}\sin 3z = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^3 = \cos^3 z + 3\cos^2 z \sin z \sqrt{-1} - 3\cos z \sin^2 z - \sin^3 z \sqrt{-1}$

Égalons

$\cos 3z = \cos^3 z - 3\cos z \sin^2 z.$

$\sin 3z = 3\cos^2 z \sin z - \sin^3 z.$

En général

$$(\cos nz + i\sin nz\sqrt{-1}) = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} z \sin^2 z + \frac{n\cdot n-1\, n-2\, n-3}{1\cdot 2\, 3\cdot 4}\cos^{n-4} z \sin^4 z + \left(\frac{n}{1}\cos^{n-1} z \sin z - \frac{n\cdot n-1\, n-2}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} z \sin^3 z + \text{etc}\right)\sqrt{-1}$$

pour former le binome on écrit le binome de $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \text{etc} - - -$$

$(\sqrt{-1})^2 = -1 \quad (\sqrt{-1})^4 = +1 \quad (\sqrt{-1})^6 = -1 \; - - -$

on a donc ainsi

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1\,2}\cos^{n-2} z \sin^2 z + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} z \sin^4 z - \text{etc}$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos^{n-1} z \sin z - \frac{n\cdot n-1\, n-2}{1\cdot 2\, 3}\cos^{n-3} z \sin^3 z + - -$$

pour former $\sin 4z$ et $\cos 4z$. On prend dans les coeff$^{ts}$ de $(a+b)^4$ qui sont

$1, 4, 6, 4, 1.$

$\cos 4z = \cos^4 z - 6\cos^2 z \sin^2 z + \sin^4 z$

$\sin 4z = 4\cos^3 z \sin z - 4\cos z \sin^3 z = 4\cos z \sin z (\cos^2 z - \sin^2 z)$

$= 2\sin 2z \cos 2z.$

$\cos 5z = \cos^5 z - 10\cos^3 z \sin^2 z + 5\cos z \sin^4 z$

$\sin 5z = 5\cos^4 z \sin z - 10\cos^2 z \sin^3 z + \sin^5 z$

On propose de trouver le sin. et cos. d'un arc en fonction des multiples des sinus et cosinus.

On pose

$$\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z = u$$
$$\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z = v$$

si l'on a fait le produit on trouve —

$$uv = 1.$$

Elevant à la $m^{e}$ puissance on a —

$$u^m = \cos mz + \sqrt{-1}\,\sin mz$$
$$v^m = \cos mz - \sqrt{-1}\,\sin mz \qquad (K)$$

or on demande de développer $\cos^n z$ ; $\sin^n z$ ;

si l'on ajoute les $2^{\text{èmes}}$ membres on a —

$$2\cos z = u + v \qquad (1)$$
$$2\sin z\sqrt{-1} = u - v \qquad (2)$$

Elevant (1) à la puissance $n^{e}$ on a —

$$2^n \cos^n z = (u+v)^n = u^n + \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n.n-1}{1.2}u^{n-2}v^2 + \&^a$$
$$+ v^n + \frac{n}{1}v^{n-1}u + \frac{n.n-1}{1.2}v^{n-2}u^2$$

Le dernier terme de cette série sera en supposant

n impair

$$+ \frac{n.n-1 \cdots \frac{n+3}{2}}{1.2.3 \cdots \frac{n-1}{2}} u^{n-\frac{n-1}{2}} v^{\frac{n-1}{2}}$$
$$+ \frac{n.n-1 \cdots \frac{n+3}{2}}{1.2 \cdots \frac{n-1}{2}} v^{n-\frac{n-1}{2}} u^{\frac{n-1}{2}}.$$

or $u^n + v^n = 2\cos nz$. qu'on trouve en ajoutant les $2^{\text{èmes}}$ membres (K)

$$\frac{n}{1}\left\{u^{n-1}v + v^{n-1}u\right\} = uv\left\{n\left(u^{n-2} + v^{n-2}\right)\right\} = 2n\cos(n-2)z$$

$$\frac{n.n-1}{1.2}u^{n-2}v^2 = \frac{n-n-1}{1.2}u^2v^2\left(u^{n-4} + v^{n-4}\right) = 2.\frac{n.n-1}{1.2}\cos n-2$$
$$\frac{n.n-1}{1.2}v^{n-2}u^2$$

Le dernier terme sera

$$\frac{n.n-1 \cdots \frac{n+3}{2}}{1.2 \cdots \frac{n-1}{2}} u^{\frac{n+1}{2}} v^{\frac{n-1}{2}}(u+v)$$

ou on a $u^{\frac{n+1}{2}} v^{\frac{n-1}{2}}$ —

on a en remplaçant et divisant par 2.

$$2^{n-1}\cos^n z = \cos nz + n\cos(n-2)z + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}\cos(n-4)z \cdots$$

$$+ \frac{n\cdot n-1 \cdots \frac{n+3}{2}}{1\cdot 2 \cdots \frac{n-1}{2}}\cdot\cos z.$$

Soit n pair.

dans le D.t de $(u+v)^n$ on aura pour dernier terme, ou terme du milieu du ~~terme~~ développ.t du Binome. ~~ou~~

$$\frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots \frac{n}{2}}.$$

et la valeur sera

$$2^{n-1}\cos^n z = \cos nz + \frac{n}{1}\cos(n-2)z \cdots \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot n-1\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdots\frac{n}{2}}$$

Pour obtenir la valeur de $\sin^n z$ on prend l'Eq.on (2) ci-dessus que l'on élève à la puissance n

$$2^n\sin^n z(\sqrt{-1})^n = (u-v)^n$$

Soit n impair

$$(\sqrt{-1})^n = (\sqrt{-1})^{n-1}\cdot\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{-1}$$

$$(u-v)^n = \begin{array}{l|l} u^n & -\frac{n}{1}u^{n-1}v + \alpha^a \\ -v^n & +\frac{n}{1}v^{n-1}\cdot u - \cdots \end{array}$$

or $\cos nz + \sqrt{-1}\sin nz = u^n$

$\cos nz - \sqrt{-1}\sin nz = v^n$

retranchant on a alternat. $\pm$ ... et divt. les 2 membres par 2 on a —

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n z = \sin nz - \frac{n}{1}\sin(n-2)z \cdots \pm \frac{n\cdot n-1\cdots\frac{n+3}{2}}{1\cdot 2\cdots\frac{n-1}{2}}\sin z.$$

on a le signe + quand on s'arrête à un terme de rang pair.

## Si n est pair.

dans le dev$^t$ de $(u-v)^n$ les termes à égale distance des extrêmes sont de même signe et l'on ajoute les Eq$^{ons}$ ci-dessus au lieu de les retrancher et l'on a

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin z = \cos nz - \frac{n}{1}\cos(n-2)z \cdots \pm \frac{n(n-1)\cdots\frac{n}{2}+1}{1\cdot 2\cdots\frac{n}{2}}$$

---

2e Leçon.

app$^{on}$ aux Eq$^{ons}$ Binômes des formules

$$(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz + \sqrt{-1}\sin nz$$
$$(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos nz - \sqrt{-1}\sin nz$$

soit $x^n = 1$. Eq$^{on}$ B$^e$ donnée et une valeur convenable

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t).$$

Exp$^{on}$ qui comprend toutes les valeurs réelles et imaginaire de $x^n = 1$. $t$ est supposé égal à un multiple pair et impair de la circonf$^{ce}$ voyons quelles valeurs on peut donner à $r$ et $t$ pour que $x$ soit racine de $x^n = 1$.

il faut que $x^n = r^n(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n = r^n\cos nt + r^n\sqrt{-1}\sin nt$ soit égal à 1. ce qui Exige que

$$r^n\cos nt = 1\ ;\quad r^n\sin nt = 0.$$

Elevant au carré et ajoutant on a

$$r^{2n}(\cos^2 nt + \sin^2 nt) = 1.$$

ce qui exige que $r^{2n} = 1$. donc il faut que $r = 1$. $r$ se nomme module. Donc le module est toujours égal à 1.

il faut de plus connaître les valeurs qu'il faut donner à $t$ (flare) pour que l'on puisse avoir des racines. on doit avoir

$$\cos nt = 1$$
$$\sin nt = 0$$

ce qui n'arrive que lorsque $nt = 2k\pi$ ($\pi$ étant le rapport de la circonf$^{ce}$ au diamètre).

$k$ pouvant être positif ou négatif, il y aura $\cos = 1$ toutes les fois que

$$n\theta = \pm 2k\pi.$$

ou peut donner à $k$ une infinité de valeurs. voyons pourquoi on n'aura qu'un nombre limité $n$ de racines de l'éq$^{on}$ $x^n = 1$

Substt d'abord pour $\theta$ la valeur. on a

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Supposons qu'on désigne par $h$ le nombre entier le plus approché de $\frac{k}{n}$ la différence de $h$ avec $\frac{k}{n}$ sera $\frac{k'}{n} < \frac{1}{2}$.

on obtient en substt

$$\frac{2k\pi}{n} = 2h\pi \pm \frac{2k'\pi}{n}$$

et l'on a $\cos\frac{2k\pi}{n} = \cos\left(\pm\frac{2k'\pi}{n}\right) = \cos\frac{2k'\pi}{n}$.

et $\sin\frac{2k\pi}{n} = \sin\left(\pm 2\frac{k'\pi}{n}\right) = \pm\sin\frac{2k'\pi}{n}$

La valeur de $x$ susceptible de donner toutes les racines de l'Eq ou $\mathcal{B}^e$ est donc

$$x = \cos\frac{2k'\pi}{n} \pm \sin\frac{2k'\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

qui les obtient en donnant à $k'$ toutes les valeurs $< \frac{1}{2}n$.

(toutes les valeurs de $k'$ supérieures à $\frac{1}{2}n$ reproduiraient des valeurs déjà trouvées, car soit $k' = \frac{1}{2}n + \varphi$ on a $\cos\frac{2\left(\frac{1}{2}n+\varphi\right)\pi}{n} = \cos\left(\pi + \frac{2\varphi}{n}\right) = \cos\frac{2\varphi}{n}$ valeur déjà employée puisque $\varphi$ est ici supposé $< \frac{1}{2}n$.)

Soit $n$ impair.

On remplace dans

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

$k$ par $0, 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}$. $k = 0$ donne $x = 1$. valeur réelle et chacune des autres valeurs donnant 2 racines imaginaires en nombre $n-1$. on a

$$(n-1) + 1 = n. \text{ racines}$$

racines imag. conj. racine réelle

Les racines de $x^n = 1$ n'en est impair seront donc

$x = 1$ racine réelle

$x = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$
$x = \cos\frac{2\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$ } racines imag. conj...

$x = \cos\frac{4\pi}{n} + \alpha^2$.
$x = \cos\frac{4\pi}{n} - \alpha^2$ ...

$x = \cos\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi$.

Les racines de $x^3 = 1$. sont

$x = 1 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$.

Soit n pair.

On donne à $\kappa$ les valeurs

$0, 1, 2, 3 \ldots \frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}$.

or $\kappa = 0$. donnera $x = 1$ valeur réelle ..... et la dernière $\frac{n}{2}$ donne $x = -1$ 2e valeur réelle. les autres $\frac{n-2}{2}$ donneront $n-2$ racines imaginaires, on aura donc

$\left.\begin{matrix} \frac{n-2}{2} & + & 2 \end{matrix}\right\} = n.$

racines imag. conj. racines réelles

Soit l'Eqn Binôme $x^n = -1$.

Soit $x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$. pour que cette valeur soit convenable, il faut que

$x^n = r^n(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n = 1$.

il faut 1° $r = 1$. et 2° $nt = \pm(2\kappa+1)\pi$. nombre impair qq. de demi-circonférences

$b = \pm\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi$ remplaçant, on a —

$$x = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\frac{\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi.$$

Soit $b$ le nombre entier le plus rapproché de $\frac{2k+1}{2n}$ afin que la différence de $b$ et $\frac{2k+1}{2n}$ soit toujours impaire et n'excède pas $\frac{1}{2}$ ainsi

$$\frac{2k+1}{2n} = b \pm \frac{2k'+1}{2n}$$

il suffit que $2k'+1$ nombre impair ne surpasse pas $n$

on a donc

$$\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi = 2b\pi \pm \left(\frac{2k'+1}{n}\right)\pi.$$

$$x = \cos\frac{2k'+1}{n}.\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\left(\frac{2k'+1}{n}\right)\pi.$$

ainsi l'on voit qu'il suffit d'employer la formule générale

$$x = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi.$$

et d'y employer pour $2k+1$ tous les nombres $< n$.

Soit $n$ impair.

on peut substituer $1, 3, 5, \ldots\ldots n$.

on a

$$\cos\frac{\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$\cos\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi \pm \sin\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi\sqrt{-1}$$

si l'on substitue $\frac{2k+1}{n}$ on a $x = \cos\pi \pm 0 = -1$ valeur réelle. le nombre des racines est encore $n$. car à la 1ère substn pour 1. on a 2 racines imagres pour 3 on a 2 racines imagres ..... à $n-2$ on aura donc $(n-2)+1$ et une réelle le nombre est donc $n$.

Soit $n$ pair.

substituant pour $k$ — $1, 3, 5, \ldots\ldots n-1$ —

$x = \cos\frac{n-1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{n-1}{n}\pi$. correspond à $n-1$
s'il n'y a pas de racines réelles. ou de même $n$ racines
car pour 1 on en a 2. pour 3 même chose — après
$n-1$ on en aura ainsi $n$.

Les racines de $x^2=1$ sont $x=+1$ et $x=-1$

celles de $x^2=-1$ — $x=+\sqrt{-1}$ $x=-\sqrt{-1}$

$x = \cos\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}$ d'où $x=+\sqrt{-1}$, $x=-\sqrt{-1}$

pour $x^4=1$ on a $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\sqrt{-1})$. $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\sqrt{-1})$

# Résolution générale des Eqns Binômes.

$$x^n = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}.$$

on pose — ($\rho$ étant le module) — $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

$x^n = \alpha+\beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$. (1)

pour trouver les valeurs de $x$ commodes — on pose

$x = r(\cos pt + \sin pt\sqrt{-1})$ d'où — (1)

$$x^n = r^n(\cos nt + \sin nt\sqrt{-1}).$$

pour que ces Exp$^{ons}$ coïncident, il faut que

1° $r^n = \rho$ d'où $r = \rho^{\frac{1}{n}}$.

($\rho$ est nécessairement positif, $r$ le sera aussi).

2° $\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$

l'arc est indéterminé, il suffit de poser

$nt = \theta \pm 2k\pi$ d'où $t = \frac{\theta}{n} \pm \frac{2k\pi}{n}$.

posant dans (1) chacune de $r$ et $t$ leur valeur

on a $x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta\pm 2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\theta\pm 2k\pi}{n}\right)$

On voit que

$$\cos(a \pm b) + \sqrt{-1}\sin(a \pm b) =$$

$$= (\cos a + \sqrt{-1}\sin a)(\cos(\pm b) \pm \sqrt{-1}\sin(\pm b)).$$

Donc on aura pour valeur de $x$

$$x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\sqrt{-1}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

valeur générale qui satisfait à une Eqn de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

## Application de ce principe à toute Eqn du 2e.

Si l'on a à résoudre

$$x^n = \alpha.$$

il faut alors égaler $\alpha = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$.

il faut que $\sin\theta = 0$ donc $\cos\theta = \pm 1$.

et $\rho = \pm\alpha$ donc $\rho^2 = \alpha^2$.

Si $\alpha$ est positif il faut $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

si $\alpha$ est négatif et l'on a

$$x = (-\alpha)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi\right).$$

Si l'on a $x^{2n} + px^n + q = 0$ on résout

$$x^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad \frac{p^2}{4} \gtrless q.$$

et l'on rentre dans l'un de ces 2 cas

$$x^n = \alpha \quad \text{ou} \quad x^n = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

On a dans tous les cas à résoudre des valeurs de la forme

$$x^n = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

Ces valeurs seront conjuguées si l'on part d'une Eqn dont les coefficients sont réels. — et l'on a

$$x = \rho\left(\cos\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$x = \rho\left(\cos\frac{\theta}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

valeurs conjuguées puisqu'elle se tirent l'une de l'autre en remplaçant $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$.

L'Eqn $x^{2n} + \ldots$ aura 2n racines car chacune des Exp^ons ci dessus en donne 2.

Lemme.

3e Leçon.

notation

$(1)^{\frac{1}{n}}$ sera la racine arithmétique de 1. $((1))^{\frac{1}{n}}$ sera une racine qqe de l'unité.

On a trouvé précédemment que les diverses valeurs racines de 1 étaient données par

$$((1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

et celles de $-1$ par

$$((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi.$$

je suppose que l'on veuille avoir $((\alpha))^{\frac{1}{n}}$ c.a.d. (a racine d'un nombre entier $\alpha$. soit 1° $\alpha = \rho$ 2° $\alpha = -\rho$

d'où a $x^n = \rho$ d'où $x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = \rho^{\frac{1}{n}}((1))^{\frac{1}{n}}$.

ainsi il suffit de multiplier la racine n° du nombre par les racines de l'unité.

si l'on a $x^n = -\rho$. c'est un cas particulier de $x = \rho(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta)$ ou plus généralement

$x = \rho(\cos(\theta + k\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(\theta + k\pi))$.

ou il suffit de faire $\theta = 0$ ou $\theta = \pm\pi$.

car il vient

$$x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi\right)$$

l'on a donc

$$((-\rho))^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} ((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

donc il suffit de multiplier la racine de $\rho$ par les racines $n^{es}$ de $-1$.

Ex$^{on}$ de la racine de $((\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$.

on fait (comme on a l'a vu plus haut)

$$\alpha+\beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta). \qquad \left\{\begin{array}{l}\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\\ \sin\theta=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\\ \cos\theta=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\end{array}\right.$$

et les $n$ cas propres à donner les valeurs sont

$$x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta\pm 2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta\pm 2k\pi}{n}\right). =$$

$$= \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}}.$$

Corollaire si $\alpha=\rho$ $\beta=0$. alors on a $x=\rho^{\frac{1}{n}}((1))^{\frac{1}{n}}$.

Mais si $\alpha=-\rho$ $\beta=0$. on a $\cos\theta=1$ $\sin\theta=0$. ou $\theta=\pm\pi$. et l'on rentre dans un des cas déjà résolus. $x=\rho^{\frac{1}{n}}((-1))^{\frac{1}{n}}$.

Dans les calculs précédents on a mis pour module $\rho$ et $\theta$. $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\\ \sin\theta=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\end{array}\right\}.$$

$\theta$ désigne ainsi un des arcs dont les tang$^{te}$ est $\frac{\beta}{\alpha}$.

$$\text{tang}\,\theta=\frac{\beta}{\alpha}.$$

soit $\zeta$ le plus petit arc dont la tang$^{te}$ soit $\frac{\beta}{\alpha}$.

$$\zeta = \text{arc.tang.}\frac{\beta}{\alpha}.$$

on a $\text{tang}\,\zeta=\frac{\beta}{\alpha}$. donc $\zeta=\theta$. ainsi on pourra dans les formules précédentes mettre au lieu de $\theta$, $\zeta$.

mais $\tang\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tang\zeta = \frac{\sin\zeta}{\cos\zeta}$

mais on peut satisfaire à ses Eq^ons par

$$\cos\theta = \cos\zeta \qquad \sin\theta = \sin\zeta$$

ou par $\cos\theta = -\cos\zeta \qquad \sin\theta = -\sin\zeta$

on sait que ~~tang~~ $\zeta$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (car cet espace comprend toutes les tangtes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.) ainsi l'arc $\zeta$ à toujours son cosinus positif. ~~et~~ l'on aura le 1^er^ système si $\alpha$ est positif. le 2^d^ si $\alpha$ est négatif.

si $\alpha$ est positif ... $\theta = \zeta$ (car on prend le 1^er^ système) et la formule ci-dessus devient

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)$$

si $\alpha$ est négatif on pose $\theta = \zeta + \pi$. (car alors on a ~~bien~~ $\cos\theta = -\cos\zeta$ ... substituant on a

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos(\zeta+\pi) + \sqrt{-1}\sin(\zeta+\pi)) \quad (K)$$

$$= -\rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta).$$

Comparant cette Eq^on avec celles déjà trouvées, on a

si $\alpha = +$ $\left|\ ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\zeta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{n}\right) = \right.$

$$\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\zeta \pm 2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta \pm 2k\pi}{n}\right) = \left(\cos\frac{\zeta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{n}\right)((-1))^{\frac{1}{n}}$$

si $\alpha$ est négatif.

on pose toujours au lieu de $\theta$ $\quad \zeta \pm \pi$ ou^a^ (K)

donc $((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\zeta\pm\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta\pm\pi}{n}\right)$

$$= \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\zeta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{n}\right)((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

Supposons qu'on se propose de trouver les racines de

(1) $x^{2n} + px^n + q = 0$. ou de $x^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

on a vu que l'on peut écrire

$$x^n = (\alpha + \mu\sqrt{-1}) = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta).$$

$$x^n = \text{------} = \rho(\cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta). \quad (3)$$

qui sont 2 racines conjuguées tirées de l'Eq^on du 2^d dégré. leur produit reproduit le trinome proposé

$$(x^n - \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta))(x^n - \rho(\cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta)) =$$

(2) $x^{2n} - 2\rho x^n \cos\zeta + \rho^2 = 0$ valeur du trinome

si $\alpha$ est positif ——————

Si $\alpha$ est négatif les racines ont d'après ce qu'on a vu la forme

$$x^n = -\rho(\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{-1})$$

$$x^n = -\rho(\cos\zeta - \sin\zeta\sqrt{-1})$$

et l'Eq^on prend la forme

$$x^{2n} + 2\rho x^n \cos\zeta + \rho^2 = 0$$

d'où l'on tire $x^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

on voit donc que $\alpha$ est positif quand $p$ négatif

et $\alpha$ négatif quand $p$ positif.

identifiant les 2 Eq^ons (1) (2). on trouve

$$\left.\begin{aligned} p &= -2\rho\cos\zeta \\ q &= \rho^2 \end{aligned}\right\}.$$

~~or les valeurs tirées des Eq^ons (2). sont~~

et l'on trouverait les valeurs de $x$ par les moyens déjà développés précédemment.

~~il est~~

On a déjà vu que

~~$((\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta))^{\frac{1}{n}} =$~~

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = (\cos(\theta \pm 2k\pi) + \sin(\theta \pm 2k\pi))$$

donc

$$((\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta))^{\frac{1}{n}} = (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^{\frac{1}{n}}((1))^{\frac{1}{n}}$$

$$((\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta))^{\frac{1}{n}} = \left(\cos\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}}$$

si $\theta = +z$ et $\theta = -z$. on aura

$$((\cos z + \sqrt{-1}\sin z))^{\frac{1}{n}} = \left(\cos\frac{z}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{z}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}}$$

$$((\cos z - \sqrt{-1}\sin z))^{\frac{1}{n}} = \left(\cos\frac{z}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{z}{n}\right)((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

Discussion de ces diverses valeurs quand les exposants deviennent fractionnaires, négatifs &c...

Soit $((\alpha + \mu\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}} = \left|((\alpha + \mu\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}\right|^{m}$.

il faut ~~donc~~ de rappeler que

$$((\alpha + \mu\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{z}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{z}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}}$$

et observer que $((1))^{\frac{m}{n}} = \cos\left(\frac{2mk\pi}{n}\right) \pm \sin\frac{2mk\pi}{n}\sqrt{-1} = ((1))^{\frac{1}{n}}$.

~~soit~~

Ainsi

$$((\alpha + \mu\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{mz}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{mz}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}}$$

Si $\alpha$ est positif et

$$((\alpha + \mu\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{mz}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{mz}{n}\right)((-1))^{\frac{1}{n}}$$

Si $\alpha$ est négatif.

trouver les diverses valeurs de

$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}}$$

auparavant je démontrerai le théorème que

$$\frac{\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}{\rho'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')} = \frac{\rho}{\rho'}(\cos(\theta-\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta-\theta')).$$

Soit $x$ le quotient on a

$$\rho'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')\,x = \rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta).$$

Multipliant les 2 membres par $\frac{1}{\rho'}\times\cos\theta'-\sqrt{-1}\sin\theta')$.

on a le théorème démontré. si $\theta=0$ on a

cela posé. $\frac{1}{\rho'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')} = \frac{1}{\rho'}(\cos\theta'-\sqrt{-1}\sin\theta')$.

on sait que

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})\ \rho(\cos(\theta\pm 2k\pi)\pm\sqrt{-1}\sin(\theta\pm 2k\pi))$$

on a donc

$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}} = \rho^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n}\right)$$

$$= \rho^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\theta}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{m\theta}{n}\right)\left[\cos\frac{m.2k\pi}{n} \mp \cos\frac{m.2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right]$$

$$= \rho^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\theta}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{m\theta}{n}\right)\left[((1))^{-\frac{m}{n}}\right.$$

Quand $\frac{m}{n}$ devient irrationel on est convenu de supposer les mêmes lois établies c, à, d que

$$(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z)^a = (\cos az\pm\sqrt{-1}\sin az).$$

## théorèmes de moivre et de cotes

quand on a résolu (1) $x^{2n}+px^n+q=0$ on a vu qu'il fallait satisfaire à deux Eq^ons de cette forme

$$x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{z\pm 2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{z\pm 2k\pi}{n}\right)$$

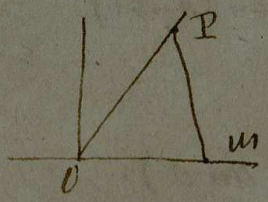
quand $\alpha$ est positif ou que $p$ est négatif dans (1)

$$x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{z\pm 2k\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{z\pm 2k\pi}{n}\right)$$

~~Alors~~ — $OV$

$$x^{2n}+px^{n}+q=\left(x-\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)\right)\left(x-\rho(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)\right)$$
$$=x^2-2\rho\cos\theta\, x+\rho^2$$

facteur du second degré facile à construire.




Car si l'on prend deux axes $ox$, $oy$ rectangulaires $OP$ fesant un angle $\theta$ prenant $Om=x$ $OP=\rho$. on a

$$Pm^2=x^2+\rho^2-2\rho\cos\theta\cdot x.$$

Considérant l'Eq^on trinome

$$x^{2n}+px^{n}+q=0=$$

puisque l'on peut former le produit de $x$ - chaque valeur trouvée ci-dessus et qui sont

$$x=\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta\pm 2k\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\theta\pm 2k\pi}{n}\right).$$

si $\rho^{\frac{1}{n}}=r$. on a en $m$

$$x^2-2rx\cos\frac{\theta\pm 2k\pi}{n}+r^2$$ { quand on suppose $p$ négatif.

pour construire je prends ~~[illegible]~~ un angle $\frac{\theta}{n}$. une distance $OP=r=\rho^{\frac{1}{n}}$. $Om=x$ et

$$Pm^2=x^2+r^2-2rx\cos\frac{\theta}{n}\pm\frac{2k\pi}{n}.$$

On n'a qu'à répéter cette construction pour ~~d'autres~~ ~~autre~~ angles $\frac{\theta}{n}+\frac{\pi}{n}$, $\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}$ &c^a ...

on aura différentes lignes — $Pm$ $P'm$ $P''m$ &c^a ...

dont les carrés exprimeront les facteurs du 2^d degré dans lesquels le trinome

$$x^{2n}+px^{n}+q$$

se décompose. (on démontrera plus tard que toute ~~[illegible]~~ polynome se décompose en facteurs réels du 2^d degré).

Si $p$ était positif on aurait

$$x^2-2rx\cos\frac{\theta\pm(2k+1)\pi}{n}+r^2$$

pis dans ce cas est positif car on l'a tiré de $x^n=\alpha\pm p\sqrt{-1}$ qui correspt à $x^n=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\sqrt{-1}$ dans le cas mult^t on $q-\frac{p^2}{4}=p$ est positif. Dans l'autre cas, il se réduit à $x^n=-\frac{p^2}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\pm k$.

Ainsi si de l'origine avec $Pm = r = \rho^{\frac{1}{n}}$ comme rayon, on décrit un cercle, si on le partage en $n$ parties égales à partir de $P$ point que l'on obtient en ~~menant~~ une droite sous l'angle $\frac{\theta}{n}$. ^ en joignant le point $m$ avec les différents points de $D^{on}$ le produit de

$$m\overline{P}^2 \times m\overline{P'}^2 \times m\overline{P''}^2 \times \cdots = x^{2n} + p x^n + q.$$

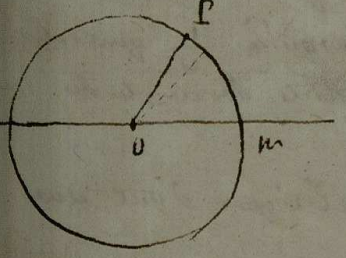
Si $\theta = 0$. on a — pour produit des lignes elles-mêmes la valeur numérique du Binome

$$x^n \pm r^n.$$

qui se confond avec la racine carrée de —

$$x^{2n} \pm 2r^n x^n + p^{2n}.$$

Si $\alpha$ était négatif ou si $p$ était positif dans $x^{2n} + p x^n + q = 0$, alors il faudrait construire les facteurs de $x^2 - 2rx\cos\frac{\theta \pm (2k+1)\pi}{n} + r^2$. il faudrait donc prendre d'abord un angle égal à $\frac{\theta + \pi}{n}$. soit $P\theta m$ cet angle à partir du point $P$ je divise




---

^. L'angle $\frac{\theta}{n}$ se trouve connu d'après la condition que l'on prend pour $\theta$ l'arc $\left(\tan g \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{-\frac{p}{2}}\right)$ dans le cas où $\frac{p^2}{4} < q$.

1e Leçon

## Définition des variables et des constantes.

On nomme quantité variable, toute quantité qui peut prendre successivement plusieurs valeurs indépendantes les unes des autres.
On nomme au contraire quantité constante toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée.

Lorsqu'une valeur s'approche d'une limite fixe, et converge vers elle d'une manière continue, on peut assigner souvent cette limite connaissant la valeur.

par exemple. Lorsqu'on inscrit un polygone dans un cercle, et que l'on prend les polygones d'un nombre de côtés doubles dont les surfaces sont 16, 32, 64, ... qui convergent vers le nombre qui représente la surface du cercle, on a alors le cercle qui est la limite du polygone.
mais ici la manière dont le polygone se rapproche du cercle est discontinue.

Supposons qu'on ait construit une hyperbole et ses asymptotes un rayon ou variant d'angle depuis 0 jusqu'à l'angle de l'asymptote avec le grand axe croît jusqu'à $\frac{1}{0}$ qui est la limite. et l'angle de asymptote est la limite des angles des rayons vecteurs.

Soient plusieurs expressions algébriques dont on se propose de trouver les limites.

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

par ex:
$\alpha$ peut décroître jusqu'à 0 et à la limite 0 les 2 termes deviennent 0 et par conséq. l'exp. se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.
Nous allons démontrer que ce rapport converge vers une limite finie. d'abord il est compris entre $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}$ et $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$.
Car $\text{arc } BB' > BB'$. donc $BC < \text{arc } AB = \frac{1}{2} BB'$.

$2 \tan \alpha > \text{arc } BAB'$ donc $\alpha < \tan \alpha$.

Donc on peut dire — que

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}.$$

mais $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1 \cdot \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} = \cos\alpha$.

donc

$$1 \quad \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \cos\alpha$$

tout par ordre de grandeur.

Or plus $\alpha$ devient petit plus $\cos\alpha$ s'approche de 1. donc les deux limites de $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ tout 1.

Soit $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ et je suppose que $\alpha$ converge vers 0 il s'agit de trouver la limite de cette Exp$^{on}$

à la limite de $\alpha$ c'à'd $0$ donc $1^{\pm\frac{1}{0}} = 1^{\pm\infty}$ quantité encore indéterminée. Soit $(1+v)^{\frac{1}{\alpha}}$ exp$^{on}$ qui remplace $1^{\pm\infty}$ en supposant que $\alpha$ et $v$ convergent en même temps vers 0. Soit $1+v = A^{\alpha u}$ Exp$^{on}$ convenable (car si l'on suppose que $\alpha$ et $v$ tout 0 on a bien 1. Elevant à la puissance $\frac{1}{\alpha}$. donc

$$(1+v)^{\frac{1}{\alpha}} = A^{u}$$

on a eu indéterminé, il y a donc une infinité de valeurs pour $1^{\pm\frac{1}{0}}$ si toutes fois il n'existe pas de relation entre $v$ et $\alpha$. Si l'on établit par exemple $v = \alpha$. $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ cesse alors d'être indéterminé et l'on peut se proposer de chercher ses limites dans les trois cas

$\alpha$ positif $\alpha$ négatif, et $\alpha$ étant autre que $\frac{1}{m}$.

Soit 1° $\alpha$ positif et de la forme $\frac{1}{m}$. donc $\alpha = \frac{1}{m}$

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = 1 + \frac{m}{1}\times\frac{1}{m} + \frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{m^3} \ldots \frac{m\cdot m-1\ldots m-n+1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{m^n}$$

que l'on peut présenter sous la forme

$$= 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) \ldots \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\right.$$

$m$ étant très grand, ces fractions seront très petites, tous les termes

seront positifs donc —

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2.$$

pour ~~avoir~~ l'autre limite j'observe que $\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) < \frac{1}{2.2}$ .... 2°. — on aura donc —

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}\cdots\frac{1}{2^m}$$ —

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.22}\cdots\frac{1}{2^m}$ est une p.on Géométrique D.te à l'infini

ou on aura donc pour sa limite $1-\left(\frac{1}{2}\right)^m$. ainsi —

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3.$$

donc ce nombre est compris entre 2 et 3.

on le représente par e et donnant à m une valeur —

> 10000 on trouve pour son expression 2,7123...

sa véritable valeur est 2,71828.... c'est l'exp.on

qui a servi de base aux Logarithmes népériens.

donc 1°. $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est compris entre 2 et 3 qui

sont par conséquent ces limites quand m devient très grand

dans $\alpha=\frac{1}{m}$ ou bien que ~~α~~ converge vers 0.

2°. Soit $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

$\alpha$ étant toujours positif, mais très petit et n'étant pas

de la forme $\frac{1}{m}$. $\frac{1}{\alpha}$ sera très grand.

Soit $\frac{1}{\alpha}$ compris entre m et $m+1=n$.

et que $\frac{1}{\alpha}=m+\mu=n-\nu$. $\mu+\nu=1$.

$$\frac{1}{m},\ \alpha,\ \frac{1}{n}$$

sont alors par ordre de grandeur. il est est de même de

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Remplaçant $\alpha$ par $\frac{1}{m+\mu} = \frac{1}{n-\nu}$ vient

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\mu} \left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-\nu}$$

par ordre de grandeur, ainsi que ces Exp$^{ons}$ mises sous la forme

$$\left\{\left(1+\tfrac{1}{m}\right)^{m}\right\}^{1+\frac{\mu}{m}}, \left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left\{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{1-\frac{\nu}{n}}.$$

Si $m$ et $n$ croissent chacune de ces Exp$^{ons}$ extrêmes converge vers $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ qui elle-même converge vers $e$. Donc encore

$\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ converge vers cette limite $e$.

3° soit enfin $\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. quand $\alpha$ est négatif et converge vers $0$. je dis que l'exp$^{on}$ converge aussi vers $e$.

Soit $1+\alpha = \frac{1}{1+\nu}$.

$\alpha$ étant très petit et $< 1$. $1+\alpha < 1$. Donc $\frac{1}{1+\alpha} > 1$. ainsi $\nu$ est $>$ et positif. Donc $\alpha$ et $\nu$ converg$^{t}$ vers $0$ l'un négt l'autre positivement.

Exp$^{t}$. $1+\alpha$ par sa valeur. ainsi est

$$\alpha = \frac{1}{1+\nu} - 1 = \frac{-\nu}{1+\nu}. \text{ vient}$$

$$\left(1-\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{-\frac{\nu}{1+\nu}} = \frac{1}{\left(1-\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{\frac{1+\nu}{\nu}}} = \frac{1}{\frac{1}{(1+\nu)^{\frac{1+\nu}{\nu}}}} = (1+\nu)^{\frac{1+\nu}{\nu}}$$

Donc

$$\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\nu)^{\frac{1+\nu}{\nu}} = \left[(1+\nu)^{\frac{1}{\nu}}\right]^{1+\nu}$$

Or $\nu$ étant positif $(1+\nu)^{\frac{1}{\nu}}$ converge vers $e$ quand $\nu$ converge vers $0$ donc

$\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ converge aussi vers $e$ qui est donc la limite.

Définitions.

Lorsqu'une variable converge vers 0, on dit qu'elle est infiniment petite.

Si elle converge vers $\infty$, on dit qu'elle a pour limite l'infini positif si elle est positive et $-\infty$ si elle est négative.

Si l'on a les variables $x, y, z$, exprimées au moyen d'autres variables $u, v, w \ldots$ on dit que $u, v, w$ sont les indépendantes des autres variables qu'on appelle variables indépendantes.

Les quantités $u, v, w$ exprimées au moyen des variables indépendantes $x, y, z$ sont ce qu'on appelle fonctions de ces variables.

Feuilles d'analyse N°. 1. Page 5.

6e leçon

Si l'on désigne par $i$ l'accroissement infiniment petit de la variable et que l'on se propose de trouver le rapport de la différence entre $f(x+i)-f(x)$ à cet accroissement, on aura quoique à la limite ces deux termes soient $0$, un rapport fini qu'on pourra déterminer d'après les différentes fonctions

Si l'on a par ex: $y = x^m$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^m - x^m}{i} = \frac{m i x^{m-1} + \frac{m-m-1}{1.2} i^2 x^{m-2} \ldots}{i} = m x^{m-1} + \ldots$$

une suite d'autres termes qui se détruisent à la limite c'est à dire quand $i$ est nul. Donc la limite de $y = x^m$ est

$$y' = m x^{m-1}$$

qu'on nomme aussi la fonction dérivée.

Si l'on se propose de trouver les dérivées des fonctions simples de l'algèbre.

$$a+x \quad | \quad a-x \quad | \quad ax \quad | \quad \frac{a}{x} \quad | \quad a^x$$

$$l\,x \quad | \quad \arccos x \quad | \quad \arcsin x \quad | \quad \arctan x$$

sont des fonctions simples. on appelle fonctions composées celles qui sont formées de fonctions de fonctions.

Soit 1° $y = a + x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+x+i) - (a-x)}{i} = 1. \quad \text{donc} \quad y' = 1.$$

$y = a - x$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+(x+i)) - (a-x)}{i} = -1 \quad \longleftarrow \quad y' = -1$

$y = ax$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+i) - ax}{i} = a \quad \longleftarrow \quad y' = a.$

$y = \frac{a}{x}$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+i} - \frac{a}{x}}{i} = -\frac{a}{x(x+i)} \quad y' = -\frac{a}{x^2}$

$y = l\,x.$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{l(x+i) - l\,x}{i}$ ##

on fait $i = 2x$ $\quad$ $x$ croissant vers $0$. on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L(x+2x) - Lx}{2x} = \frac{L(x(1+2) - Lx}{2x} =$$

$$= \frac{L(1+2)}{2} \cdot \frac{1}{x} = L(1+2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}.$$

or $(L+2)^{\frac{1}{2}}$ converge vers $e$. donc $L(1+2)^{\frac{1}{2}}$

Converge vers $Le$. et l'on a

pour $y = Lx$ ——— $y' = \frac{Le}{x}$.

Si $y = l.x$. c.à.d. les log. népériens. on a $y' = \frac{1}{x}$.

Soit $y = A^x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A^{x+i} - A^x}{i} = \frac{A^x(A^i - 1)}{i}$$

or soit $A^i - 1 = p$. $p$ convergeant vers $0$. en même temps que l'Eq^on

peut se poser car $i$ étant nul on a $1 - 1 = p = 0$

$A^i = p + 1$. $i\,LA = L(p+1)$. $i = \frac{L(p+1)}{LA}$.

$$\frac{A^i - 1}{i} = \frac{p}{\frac{L(p+1)}{LA}} = \frac{p}{L(p+1)} \cdot LA.$$

$$= \frac{LA}{L(1+p)^{\frac{1}{p}}} = \frac{LA}{Le} = LA.$$

Puisque La base de Logarithmes est $e$.

et l'on a pour Dérivée de

$y = A^x$ ——— $y' = A^x(LA)$

Donc la dérivée de

$y = e^x$ ——— est $y' = e^x$.

soit $y = x^a$ on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^a - x^a}{i} = \frac{x^a + aix^{a-1} + \frac{a.a-1}{1.2} i^2 x^{a-2} \ldots}{i}$$

donc la dérivée de —

$y = x^a$ est ..... $y' = a x^{a-1}$.

il faut faire voir que ce Développement est encore vrai quand $a$ est qq^d ... réel fract^re ou irrat^el ...

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^a - x^a}{i} = \frac{(x+2x)^a - x^a}{2x}.$$

quand on fait $i = 2x$ $2$ convergeant vers 0 en même temps que $i$.

$$= \frac{(1+2)^a - 1}{2} \cdot x^{a-1}$$

soit $(1+2)^a - 1 = j$. $j$ convergeant vers 0 en même temps que $2$.

$$(1+2)^a = j + 1.$$

et $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{j}{2} x^{a-1} = \frac{j \cdot \tau_1(1+2)}{2\tau_1(1+j)} \cdot a x^{a-1}$$

puisque $a\,\tau_1(1+2) = \tau_1(1+j)$. d'où

$$\frac{a\,\tau_1(1+2)}{\tau_1(1+j)} = 1$$

et que l'on peut multiplier les deux termes de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ par 1 ou sa valeur.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tau_1(1+2)}{2} \cdot \frac{j}{\tau_1(1+j)} \cdot a x^{a-1}.$$

or on a $\frac{\tau_1 E}{\tau_1 E} = 1$. et $y' = a x^{a-1}$. —

soit $y = \sin x$. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+i) - \sin x}{i} = \frac{\sin\frac{i}{2} \cdot \cos(x+\frac{i}{2})}{\frac{i}{2}}$

or $\frac{\sin\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$ converge vers 1 quand $i$ converge vers 0 donc $y' = \cos x$.

soit $y = \cos x$ $y' = \frac{\cos(x+i) - \cos x}{i} = \frac{-\sin\frac{i}{2}\sin(x+\frac{i}{2})}{\frac{i}{2}}$

$y' = -\sin x$.

7e Secon.



## Des Différentielles.

Soit $i$ une quantité infiniment petite, $h$ une quantité de $\alpha = \frac{i}{h}$ rapport infiniment petit.

Soit $y = f(x)$. dont on veut trouver la Dlle que est $\lim. \frac{\Delta y}{\alpha}$. ou autrement $\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha}$.

qu'on obtient ainsi: la fon dérivée de $f(x)$. est

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h) - fx}{\alpha h}.$$

d'où $$\frac{f(x+\alpha h) - fx}{\alpha} = h \times \frac{f(x+i) - f(x)}{i} = h \times f'(x).$$

donc $$\mathrm{D}.y = h \times f'(x) = \mathrm{D}f(x).$$

D.x désignant la diffle de x. or $f'(x)$ est la 1re dérivée de $f(x)$. donc il faut multiplier $f'(x)$ par h pour avoir la Dlle

or si $f(x) = x$ $\quad dx = df(x) = h \times f'(x) = h.$

donc $dx = h$. ainsi

$$\mathrm{D}f(x) = dx\, f'(x).$$

mm.

je dis que la même loi a lieu pour une fon

$$z = \mathrm{F}(y).$$

z et y étant ni l'une ni l'autre considérée comme variable indépendante mais étant dépts de x

cette $$z + \Delta z = \mathrm{F}(y + \Delta y).$$

donc $$\Delta z = \mathrm{F}(y+\Delta y) - \mathrm{F}(y).$$

d'où $$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\mathrm{F}(y+\Delta y) - \mathrm{F}(y)}{\Delta y} = \frac{\mathrm{F}(y+\Delta y) - \mathrm{F}y}{\Delta x} : \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donc $$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{z'}{y'}$$

il faut à présent démontrer que les dérivées sont dans le rapport des Dlles

or $\lim. \frac{\Delta y}{\alpha} = dy$.

donc $\Delta z = \alpha(dz + \beta)$. $\beta$ convergt avec $\alpha$ vers 0

$\Delta y = \alpha(dy + \gamma)$.

d'où $\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz + \beta}{dy + \gamma}$. ainsi à la lim. $\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy}$.

donc $\frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'}$. ~~or $dy = y' F'(y)$~~

~~[illegible]~~

$$\frac{dz}{dy} = \lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = F'(y).$$

$$dz = dy\, F'(y).$$

---

## Dérivées d'une ou plusieurs fonctions.

8e Leçon.

### 1°. Dérivée d'une somme.

Soit $S = u + v + w + \alpha^a$ .....

si l'on ~~fait~~ croître chacune de ces forces d'une accroissmt. infiniment petit, on aura ...

$$S + \Delta S = u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta v + \alpha^a \ldots$$

retranchant on a

$$\Delta S = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \alpha^a \ldots$$

on a vu que $\frac{\Delta y}{\alpha} = \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha}$ est la Dve de $y = f(x)$

donc $dS = \frac{\Delta S}{S}$, $du = \frac{\Delta u}{u}$ .....

donc $dS = du + dv + dw + \alpha^a$ ...

ainsi la diffle d'une somme égale à la somme des différentielles de chacune de ces parties.

~~il en serait de même, quant aux raisonnements si~~

~~$S = u$~~

si $S = a + v$ (a étant constante). on a

$dS = du$ car $d(Fy) = F'(y) \cdot dy$. or

si $y = x + a$. on a $F'(y+a) = 1$ donc $d(Fy) = dy$.

On tire de l'Eqon ci-dessus.

$$\frac{dS}{dx} = S' = u' + v' + w' + \alpha^a \ldots$$

donc. le coeff^t diff^el d'une somme est égal à la somme des coefficients différentiels de chacune des parties

si l'on a

$S = u - v$. on a $dS = du + d(-v)$.

or $d(-v) = d(u \times -1) = -1 \times d(v)$. donc

$dS = du - dv$.

Donc la Diff^le d'une Différence $= \alpha^a$

règle pour un produit.

$S = uvw$.

prenant le log. on a. $l.S = lu + lv + lw$.

prenant les dérivées on a

$$\frac{dS}{S} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}.$$

d'où $dS = uvw\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}\right)$.

$$dS = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw.$$

règle pour le produit.

Elle est la même quelque soit le signe des facteurs

soit $S = uv$. j'élève au carré on a

$S^2 = u^2 v^2$

qui est le même produit que soit le signe de $u, v$ ...

or prenant les log.mes on a

$$l(s^2) = l(u^2) + l(v^2) + l(w^2)$$

divisant par 2 on a

$$\frac{l(s^2)}{2} = \frac{l(u^2)}{2} + \frac{l(v^2)}{2} + \frac{l(w^2)}{2}.$$

d'où $\frac{ds}{s} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}$.

même loi que précédt. qui a donc lieu, qqe. soit le signe des facteurs.

si tous les facteurs deviennent égaux on a

$$ds = u^m\left(m\frac{du}{u}\right) = mu^{m-1}du \quad \text{si } s = u^m.$$

Pour un quotient.

Soit $s = \frac{u}{v}$. $ls = lu - lv$.

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} = \frac{vdu - udv}{uv}.$$

$$ds = \frac{u}{v}\left(\frac{vdu - udv}{uv}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

donc la Dlle d'un quotient est égalle à la diffce du Nr. par le Dr. — la diffce du Dr. par le numérateur.

soit proposé de cher $d.\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$l.\tang x = l\sin x - l\cos x. \pm \cancel{\frac{1}{\cos x}}$$

$$d.\tang x = \frac{d.\sin x\cos x - d\cos x\sin x}{\cos^2 x} = \frac{dx(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$d.\tang x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

3

Diffce d'une puissance $s = u^v$ u et v étant variables dépendantes on a

si $s = u^v$. $ls = vl.u$.

$$\frac{ds}{s} = u^v\left(v\frac{du}{u} + l(u)\,dv\right).$$

d'où $\partial S = u^v\left(v\frac{\partial w}{w} + l(u)\,\partial u\right)$.

d'où l'on peut déduire une règle.

si l'on $y = a^x$.

on a $ly = x\,l.a$. $\frac{\partial y}{a^x} = l.a\,\partial x$

$\partial y = a^x\,l.a.\partial x$

si $s = u^{v^w}$ $l(s) = v^w l(w)$. $\frac{\partial s}{s} = l(w)\,\partial(v^w) + v^w\,\partial(lu)$.

or $\partial v^w = v^w\left(u\frac{\partial v}{v} + l(v)\,\partial w\right)$. rempl$^t$. on obtient

$\partial s =$

## Diff$^{on}$ des imaginaires.

soit $s = u + v\sqrt{-1}$

je fais croître d'une quantité inf$^t$ petite chacune des Exp$^{ons}$

$s + \Delta s = u + \Delta w + (v + \Delta v)\sqrt{-1}$.

d'où $\Delta s = \Delta w + \Delta v\sqrt{-1}$. D$^t$ par $\alpha$. on a

$\frac{\Delta s}{\alpha} = \frac{\Delta w}{\alpha} + \frac{\Delta v\sqrt{-1}}{\alpha}$. ou $\partial s = \partial w + \sqrt{-1}\,\partial v$.

donc la même loi a lieu en regardant $\sqrt{-1}$ comme un facteur réel $a$. car si $s = u + av$ on a trouvé $\partial s = \partial u + a\,\partial v$.

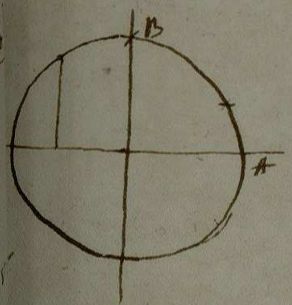
ex: soit $s = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$

$\partial s = \partial(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) = \partial\cos x + \sqrt{-1}\,\partial\sin x$.

$= \partial x\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right.$. car $\partial\cos x = -\sin x\,\partial x$

et $\partial\sin x = \cos x\,\partial x$; et que l'on a ainsi

$\partial s = (-\sin x + \sqrt{-1}\cos x)\,\partial x$.




or $-\sin x = -\left(-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right. = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. et $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

donc l'on a bien

$\partial s = \partial x\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right. =$

$= \partial x(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

or $\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{-1}$. donc

$\partial s = s.\sqrt{-1}.\partial x$.

ou $a$ d'un autre coté en $D^t$ $s = e^{a.x}$

$ds = e^{ax} d(ax)$. même formule que la précédente en changeant $a$ en $\sqrt{-1}$. on est donc porté à la remplacer par $e^{x\sqrt{-1}}$. ce qu'on admettra plus tard.

Ecole polytechnique

Cours d'analyse

21

N.° 2.

Lamontz

9e. Leçon

## Appon. des Différentielles.

Soit par exemple proposé de trouver la vraie valeur de $\frac{z}{y}$ quand pour une même valeur de $x = x_0$ $z$ et $y$ sont nuls en même temps.

Si je fais croître $z$ et $y$ d'une quantité infte $\Delta z$, $\Delta y$.

et l'on a $\frac{z+\Delta z}{y+\Delta y} = \frac{z}{y}$ qqe. soit la valeur de $x$

donc on voit qu'il suffit de trouver à la limite $\frac{z+\Delta z}{z+\Delta y}$.

et l'on aura la valeur de $\frac{z}{y}$.

or quand $z=0$ et $y=0$ par la sion de $x=x_0$. on a

$\lim. \frac{\Delta z}{\Delta y}$. qui sera la valeur cherchée.

Mais on sait que $\lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z'\partial x}{y'\partial x} = \frac{z'}{y'}$.

donc en mettant pour $x$, $x_0$ dans les différentielles des 2 termes $z$ et $y$, on aura la vraie valeur de $\frac{z}{y}$ ou de $\frac{0}{0}$.

1er. ex: soit $\frac{\sin x}{x}$. on a pour $x=0$ $\frac{0}{0}$. or si je prends les Dnes. on a $\frac{\cos x\,\partial x}{\partial x} = \cos x$. et si je fais $x=0$. on trouve pour $\lim. \frac{\sin x}{x} = 1$. ce qu'on avait déja trouvé.

2e. Soit $\frac{L(1+x)}{x}$, dont on veut trouver la valeur quand $x=0$ qui réduit cette Expon à $\frac{0}{0}$.

$$\partial\left(\frac{L(1+x)}{x}\right) = \frac{\partial L(1+x)}{\partial x} = \frac{LE\,\partial(1+x)}{(1+x)\partial x} = \frac{LE\,(\partial x)}{(1+x)\partial x}$$

quand on fait $x=0$. on a

pour $\frac{0}{0}$ dans ce cas $LE$.

3e. $\frac{lx}{x-1}$. si $x=1$. on a $\frac{0}{0}$ dans ce cas

$$\frac{\partial lx}{\partial(x-1)} = \frac{1\cdot\partial x}{x\,\partial x} = \frac{1}{x}.$$

quand $x=1$. $\frac{0}{0} = 1$.

4o. $\frac{x-1}{x^n-1}$ si $x=1$ $\frac{0}{0}$ $\partial\left(\frac{x-1}{x^n-1}\right) = \frac{1}{n x^{n-1}}$ on a

pour $x=1$. $\frac{0}{0} = \frac{1}{n}$. on le trouve ainsi

$$\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}\ldots 1} = \frac{1}{n} \text{ quand } x=1.$$

## Maxima et Minima.

Si l'on a une courbe $y = f(x)$. que l'on fasse croître ou diminuer $x$ d'une quantité infiniment petite $\Delta x = 2h$ positif ou négatif. je remplace $x$ par $x_0$ et alors $x + 2h$ peut être $> x$ suivant le signe de $2h$. y aura maximum quand $f(x_0)$ sera supérieure aux valeurs infinies voisines à droite et à gauche de $y = f(x_0)$. et qui sont représentées par $f(x_0 + 2h)$. il faut donc avoir toujours

$f(x_0 + 2h) - f(x_0) < 0$. pour avoir un maximum.

y aura un minimum quand $y = f(x_0)$. sera plus petit que tous les y voisins à droite et à gauche. il faut donc que l'on ait toujours

$f(x_0 + 2h) - f(x_0) > 0$ pour avoir un minimum.

or. $f(x_0 + 2h) - f(x_0) = \Delta y$. donc

quand $\Delta y$ sera négatif on aura Max.

$\Delta y$ ... positif minimum.

cela posé : on sait que

$$\lim. \frac{\Delta y}{2} = dy.$$

donc $\Delta y = 2(dy + \varepsilon)$ $\varepsilon$ étant infiniment petit du reste positif ou négatif. $dy$ étant toujours une même valeur il s'ensuit que le signe de $\Delta y$ dépend de $2$. or $\Delta y$ devant être toujours $>$ ou $<$ que $0$ suivant le Min. ou le Max. il faut que $dy = 0$ ou $dy = +\infty$. pour qu'il puisse y avoir Min. ou Max. La réciproque n'a pas toujours lieu, car il peut y avoir dans ce cas des points d'inflexion.

or $dy = f'(x)\,dx$.

donc il faut faire $f'(x) = 0$. ou $f'(x) = +\infty$. et les valeurs de $x$ qui en sont tirées portées dans $y = f(x)$

donnent les diverses valeurs de $y$ auxquelles correspondent les points Ma.$^a$ ou Mi.$^a$ de la courbe donnée.

Pour savoir si c'est un maximum ou minimum donné par $y' = f'(x)$ $X$ corresp$^t$ à $f'(x) = 0$. on donne à $x$ des valeurs plus grandes et plus petites que $X$ et si l'on a 2 valeurs plus grandes que $y'$ on a un min. et si l'on a 2 valeur plus petites on a un Max.

1.$^{er}$ ex: Soit la courbe $y = \frac{Lx}{x}$. dont on propose de trouver le max. et le min.

je vais construire d'abord la courbe représentée par cette Eq.$^{on}$ or $Lx = \frac{Le}{le} l.x = Le.l.x$ donc

$$y = Le\frac{lx}{x}.$$

il suffit de chercher le max ou Min. de $y = \frac{lx}{x}$ courbe de même forme que la courbe proposée.

$$x = 0, \cdots y = -\infty.$$

$$x = 1, \quad y = 0$$

faisant $x = e, \cdots \quad y = \frac{1}{e}.$

$$x = e^2 \qquad y = \frac{2}{e^2} = \frac{2}{e}\cdot\frac{1}{e}.$$

exp.$^{on}$ plus petite que $\frac{1}{e}$. plus $x$ augmentera plus $y$ D.$^{ra}$

$$x = e^m \cdots y = \frac{m}{e^m}.$$

or plus $m$ augmente plus $\frac{m}{e^m}$ diminue car soit $e = 1 + a$. $a = 1,718\cdots$

$$\frac{n}{(1+a)^n} = \frac{n}{1 + na + \frac{n.n-1}{1.2}a^2 \cdots}$$

or $\frac{n}{\frac{n.n-1}{2}a^2} = \frac{2}{(n-1)a^2}$ Diminue quand $n$ augmente donc à plus forte raison $\frac{n}{(1+a)^n}$ Diminue quand $n$ augmente.

La courbe aura donc un max. entre $x = 1$ et $x = \frac{1}{0}$. elle est de cette forme

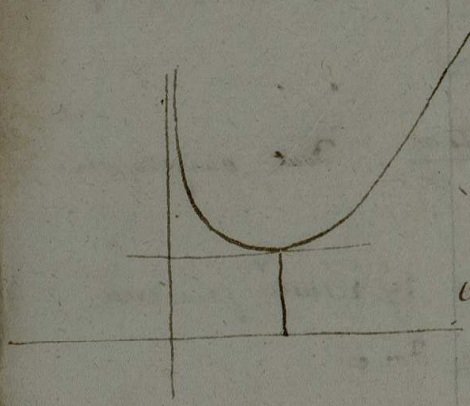
soit $y = \frac{lx}{x}$ $\quad y' = \frac{1 - lx}{x^2}$.

si je fais $1 - lx = 0$. on a $lx = 1$. $\quad x = l(e)$.

donc il y correspond à $x = l(e)$ donne le point Max.

2e Exemple.

Soit la courbe $y = \frac{e^x}{x}$.



si l'on fait $x = 0$ ..... $y = \infty$.

$x = 1$ ... $y = e$

$x = n$ .... $y = \frac{e^n}{n}$.

et plus n augmente plus y augmente, donc quand x

$x = \frac{1}{0}$ .... $y = \frac{1}{0}$.

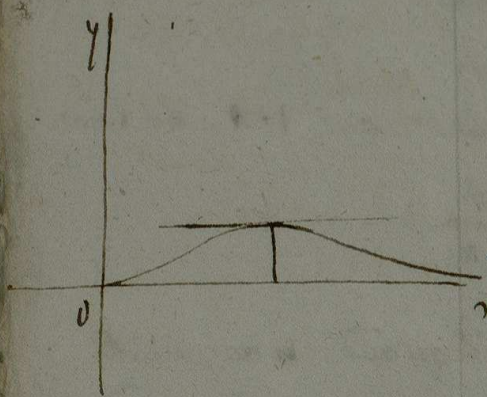
La courbe a donc la forme ci-après, et il y a un Minimum on le trouvera par la règle en faisant

$y' = 0$. $\quad y' = \frac{e^x}{x^2}(x - 1)$.

$x - 1 = 0$ donne $x = 1$. Il y correspond à cette valeur donnera le min. de la courbe.

3e Exemple. Soit $y = x^a e^{-x}$.

La courbe n'a de réalité que du côté des x positifs.




$x = 0$ donne .... $y = 0$

$x = 1$ ..... $y = \frac{1}{e}$

$x = \infty$ ..... $y = 0$.

il y a donc un Min entre $x = 0$ et $x = \infty$.

$y' = f' = x^a e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right)$. donc $x = a$. donne

$y = a^a e^{-a}$ qui donnera le point Max de la courbe

On peut trouver la tang^te à une courbe $y = f(x)$ à un point qq^e de cette courbe.

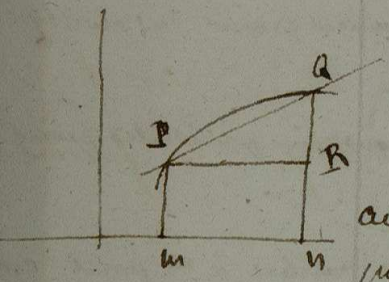
Si l'on fait croître x et y des quantités $\Delta x$, $\Delta y$

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

$mn = \Delta x$ ; $QR = \Delta y$. dans PQR. on a $QR = \Delta y$

$PR = \Delta x$. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tang}\,(\widehat{QPR})$.

imaginons que $\Delta x$ devienne de plus en plus petit. l'angle QPR l'approche de plus en plus de devenir l'angle $\gamma$ de la tang^te avec l'axe des x. et c'est seulement à la limite que l'on aura.

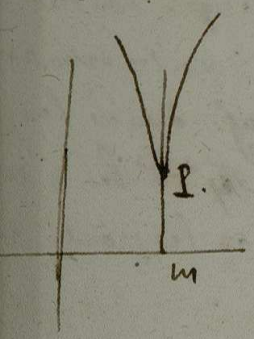



$\lim \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tang}\,\gamma$. ou $\lim \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

Donc $\dfrac{dy}{dx} = \text{tang}\,\gamma$.

ainsi étant donné une courbe résolue par rapport à y. pour avoir la tang^te trig. de la tang^te en un point, il faut prendre le rapport des dérivées par rapport à y et x, y et x étant successivement regardées comme variables et l'autre comme constante.

Pour que l'ordonnée devienne un Max ou Min. il faut que l'ordonnée devienne horizontale ou bien $f'(x) = 0$. il existe des cas où la courbe donne un point Max. ou min. mais affecte par rapport à ce point une position qui fait donner à ce point point de rebroussement. mais alors il peut être donné par $y' = \dfrac{1}{0}$. comme on peut le voir sur la fig.



10e Leçon

## Autre manière de déterminer les Max. ou Min.

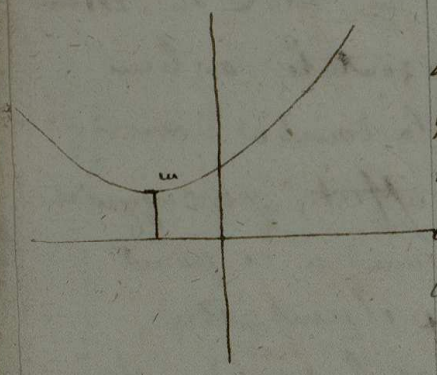
Soit une courbe $y = fx$ que je suppose continue entre les limites $x = x_0$ et $x = X$ $X - x_0 = h$. je vais chercher s'il existe un Max. ou Min. entre ces limites

si $\Delta x$, $\Delta y$ désignent les accroissements infᵗ petits des variables on a $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. si $y'$ est positif. $\Delta y$ et $\Delta x$ doivent être de même signe, donc $y$ et $x$ croissent en même temps. si $y'$ est négatif. $\Delta y$ et $\Delta x$ sont de signe contraire. donc quand $x$ augmentera $y$ diminuera, et récipᵗ on voit par conséquent que si la courbe a commencé à croître, elle ne pourra décroître qu'autant que $y'$ aura changé de signe. or pour que $y'$ change de signe, comme il ne peut avoir que l'une des formes $Mf(x) + K = y'$ et $\frac{Nf(x)}{x} = y'$. il ne pourra passer du positif au négatif que par $y' = 0$ ou bien $y' = \pm\infty$.

on voit qu'on retrouve ainsi les conditions précédentes pour obtenir des Max. ou des Min.

on aura donc un max. quand la courbe à ce point cessera de croître pour Diminuer; et un Min. quand elle cessera de diminuer pour croître.

Exemple. Soit la courbe $y = x^2 + px + q$.

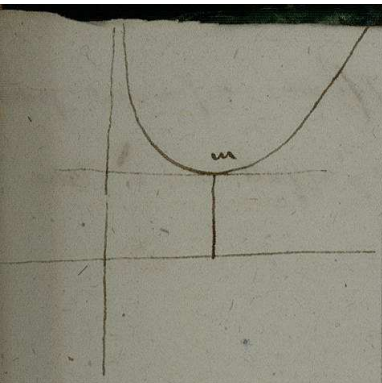


$y' = 2x + p$. donnant à $x$ toutes les valeurs positives et négatives depuis $+\infty$ jusqu'à $0$ et négatives depuis $0$ jusqu'à $-\frac{p}{2}$. on aura $y'$ positif: donc $x$ augmentant $y$ augmente et récipᵗ. donc il n'y a ni max. ni min. dans cet espace. donnant à $x$ les valeurs négatives depuis $-\frac{p}{2}$ jusqu'à $-\infty$. on aura $y'$ négatif donc les $x$ augmentant à partir de ce point, on voit que la courbe a cessé à $x = -\frac{p}{2}$ de diminuer pour croître ensuite. donc le point est un Minimum.

2e Exemple.

Soit $y = \frac{A^x}{x}$. $A > 1$.

La dérivée est ... $y' = \frac{A^2}{x^2}\left(\frac{x}{L(e)} - 1\right)$




Depuis $x = +\infty$ jusqu'à $x = x_0$ ou $\infty$. $y'$ positif et entre ces limites $y$ décroit avec $x$ jusqu'en $m$ correspt à $x = x(e)$. donnant à $x$ les valeurs depuis $x = x_0$ jusqu'à $0$ ou $\infty$ $y'$ négatif. or comme la courbe est continue entre ces limites. on voit qu'en $m$ $x$ diminuant $y$ augmente, donc le point $m$ est tel que jusqu'à lui les $y$ diminuent pour croitre ensuite donc ce point est Minimum.

**Théorème.**

Si l'on a une courbe continue entre deux limites $x = x_0$ $x = X$ $X - x_0$ étant $= h$. le rapport aux Différences finies

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est compris entre A, B, Minimum et maximum de $f'(x)$ dérivée de $f(x)$. (en supposant que pour obtenir le max et le min. de $f(x)$ on n'y a substitué pour $x$ que les valeurs comprises entre $x_0$ et $X$.)

je décompose $h$ en Eléments infiniment petits que j'ajoute à $x_0$. j'aurai $x_1$ à $x_1$ ..... l'autre $x_2$ donne $x_2$ ... $x^{(n)}$ .... on a ...

$$x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3 \; \ldots\ldots \; x_{n-1} \; X.$$

on peut écrire

$$X - x_0 = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) \ldots\ldots (x - x_{n-1}).$$

Substituant toutes ces valeurs de $x$ dans l'Expn proposée on a

$$f(X) - f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) \ldots\ldots\ldots\ldots f(x) - f(x_{n-1}).$$

si l'on prend les divers groupes de Différences qu'on les divise par $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$ ... $x^{(n)}$ ... il vient

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ldots\ldots \frac{f(x) - f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}}.$$

or on sait par le théorème de la note XI, cours d'analyse Sage. que la moyenne entre toutes ces expons se trouve en prenant la somme des numérateurs et Dt par la somme des Dénominateurs.

donc $$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est moyenne entre toutes ces expons

il suffit donc de prouver que cette Expon est comprise entre A et B ou mieux encore que la plus petite de ces fractions est plus grande que A et la plus grande plus petite que B.

Si $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ est le rapport aux différences infiniment petites on peut toujours trouver une valeur de $i$ que j'appellerai $\delta$ telle que cette Expon soit comprise entre

$$f'(x^2) - \varepsilon$$
$$f'(x) + \varepsilon.$$

$\varepsilon$ étant une quantité infiniment petite et d'ailleurs qq.

alors si je fais $\delta = x_1 - x_0$ le rapport se réduira à $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ qui sera d'après ce qu'on a dit compris entre ~~entre~~ $f'(x_0) - \varepsilon$.
$f'(x_0) + \varepsilon$

il en sera de même des autres donc on peut dire que chacun des groupes ci-dessus se trouve compris entre les valeurs suivantes

savoir

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ | $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ | ..... $f(x)-f(x_{n-1})$ |
| entre | entre | entre |
| $f'(x_0)-\varepsilon$ | $f'(x_1)-\varepsilon$ | $f'(x_{n-1})-$ |
| $f'(x_0)+\varepsilon$ | $f'(x_1)+\varepsilon$ | $f'(x_{n-1})+$ |

nous avons vu que le rapport aux différences finies est ~~compris~~ compris entre 2 qq.es de ces Expons il est donc plus petit que l'un d'elles et par conséquent se trouve compris à plus forte raison entre chacun des 2ds groupes. donc entre $A-\varepsilon$ et $B+\varepsilon$. or $\varepsilon$ étant aussi petit que l'on veut donc

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est compris entre A et B.

Cours d'analyse

École Polytechnique.



N° 3.

Semestre 2.

11e. Leçon.



on a trouvé que le rapport aux différences finies

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

était compris entre A et B Min. et max. de $f'(x)$ entre les limites $x=x_0$ $x=x$.

si $\theta>0$; $\theta<1$ $x_0+\theta h$ comprendront toutes les valeurs intermédiaires entre $x_0$ et $x_0+h$. donc $f'(x_0+\theta h)$ donnera les diverses valeurs de $f'(x)$ entre ses limites A et B il existera donc une valeur particulière de $\theta$ qui rendra

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h).$$

si donc $y=fx$ est une courbe continue on peut dire que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h).$$

mais $h$ peut être aussi petit que l'on voudra entre des limites très resserrées et si $\alpha$ désigne l'accroisst très petit on aura de même

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}=f'(x+\theta\alpha h).$$

d'où

$$\frac{f(x+\alpha h-f(x)}{\alpha}=h\times f'(x+\theta\alpha h).$$

~~donc~~

<u>appon</u>

si l'on a $y=e^x$ sa dérivée est $y'=e^x$.

La courbe restant continue entre deux limites qqes de la variable. on a

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^{x+\theta h}.$$

d'où

$$\frac{e^h-1}{h}=e^{\theta h}$$

donc sa dérivée est comprise entre 1 et $e^h$ qui sont son min. et et son max. entre 0 et $h$. limites entre lesquelles on a supposé la courbe continue.

2e. appon. soit la courbe $y = l(x)$. $y' = \frac{1}{x}$.

Dans ce cas le rapport $\frac{l(x+h) - l(x)}{h} = \frac{1}{x + \theta h}$

d'où $l(x+h) - l(x) = \frac{h}{x + \theta h}$

théorème. si $u = f(x, y, z \ldots)$ $x, y, z$ — étant plusieurs variables indépendantes les unes des autres variant sépt. on aura

$$du = \varphi(x,y,z)\,dx + \chi\,d(x,y,z)\,dy + \psi(x,y,z)\,dz.$$

($\varphi$ désignant la dérivée de $u$ en regardant $x$ comme seule variable $\chi$ en regt. $y$ comme seule variable. de même pour $z$ — ).

j'attribue aux variables des accroissts finis ... savoir

à

$$x, \quad x+h$$
$$y, \quad y+k$$
$$z, \quad z+l.$$

Diffce finie de $u$ sera

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x,y,z).$$

si je représente par $\alpha h$, $\alpha k$ ... les accroissts infiniment petits que j'attribue à ... $x$, $y$, ... $\alpha$ étant $\frac{i}{h}$ $i$ convergt vers 0 en même temps que $\alpha$. on a par le principe ci dessus

$$\frac{f(x+\alpha h, y, z, \ldots) - f(x,y,z \ldots)}{\alpha} = h \times \varphi(x + \theta\alpha h, y, z \ldots)$$

en considérant $y, z$ ... comme des constantes et $x$ seul comme variable or si je considère $y$ comme seule variable, comme je veux avoir les accroissements des trois variables je substitue au lieu de $y$ + $y + \alpha k$ dans la fon de $u$ qui a déja reçu l'accroissement de $x$. et l'on a ...

$$\frac{f(x+\alpha h, y+\alpha k, z \ldots) - f(x+\alpha k, y, z)}{\alpha} = k \times \chi(x+\alpha h, y+\theta, \alpha k,$$

on aura de même.

$$\frac{f(x+\alpha h, y+\alpha k, z+\alpha l) - f(x+\alpha h, y+\alpha k, z}{\alpha} = l \times \chi(x+\alpha h, y+\alpha k$$

Si j'ajoute ces Expons j'aurai

$$\frac{f(x+\alpha h, y+\alpha k, z+\alpha l \ldots) - f(x,y,z\ldots)}{\alpha} = h\times\varphi(x+\theta\alpha h, y, z \ldots)$$
$$+ k\chi(x+\alpha h, y+\theta_1\alpha k, z\ldots)$$
$$+ l\psi(x+\alpha h, y+\alpha k, z+\theta_2\alpha l\ldots)$$
$$+ \alpha^{\omega}\ldots$$

si l'on passe à la limite on aura

$$du = h\times\varphi(x,y,z\ldots) + k\chi(x,y,z\ldots) + l\psi(x,y,z\ldots).$$

or $dx$ étant une quantité pour toutes les fons différentiées parrappt à $x$. elle sera encore la même quand je ferai

$$f(x,y,z\ldots) = x.$$

on a alors $dx = 1\times h$. de même $dy = k$, $dz = l\ldots$

donc.

$$du = \varphi(x,y,z\ldots)\,dx + \chi(x,y,z\ldots)\,dy + \psi(x,y,z\ldots)\,dz + \&a$$

$dx$, $dy$, $dz$ sont des quantités finies, distinctes qui n'ont aucune relation entre elles.

Notation on désigne dlle de $u$ parrapport à $x$ par $d_x u$

on aura donc en copiant d'après cette notation l'Eqon ci-dessus.

$$du = d_x u + d_y u + d_z u.$$

mais alors $\varphi(x,y,z,\ldots) = \frac{d_x u}{dx}$ ; $\chi(x,y,z\ldots) = \frac{d_y u}{dy}\ldots\psi(x,y,z) = \frac{d_z u}{dz}$

on a donc pour notation généralement adoptée.

$$du = \frac{d_x u}{dx}.dx + \frac{d_y u}{dy}.dy + \frac{d_z u}{dz}.dz\ldots$$

ou il n'est plus permis d'effectuer les multipons indiquées.

12e. Leçon.

je suppose qu'on veuille différencier une fon de plusieurs variables $u, v, w$ .. qui sont elles-mêmes $f(x, y, z \dots)$.

$$S = f(u, v, w \dots).$$

$$u = F(x, y, z \dots) \quad v = F'(x, y, z \dots) \quad \dots \quad w = F''(x, y, z \dots).$$

on a $\alpha k$, $\alpha h$, $\alpha l$ .. désignant les accroissts infiniment petits de $y, x, z$ ....

$$\lim \frac{f(x+\alpha h,\ y+\alpha k,\ z+\alpha l \dots) - f(x, y, z}{\alpha} = du.$$

avant d'arriver à limite. on aura ..

$$f(x+\alpha h,\ y+\alpha k \dots) - f(x, y \dots) = \alpha(du + \mu).$$

$\mu$ désignant une quantité infiniment petite qui converge vers 0 en même temps que $\alpha$.

voilà l'accroisst de $u$ dans les hypothèses des accts de $x, y, z$ qu'on a fait ci-dessus. on aura donc de même pour $v, w$ .. ainsi

Accst de $u$, quand $\left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}$ croisst de $\begin{matrix} \alpha h = \alpha dx \\ \alpha k = \alpha dy \\ \alpha l = \alpha dz \end{matrix}$, est $\alpha(du + \mu)$

accst de $v$, .. dans les mêmes circonstances est .. $\alpha(dv + \mu_1)$.

$w$ .... — — — — — — $\alpha(dw + \mu_2)$

or l'Eqon principale qui a donné dans la leçon précédente la dérivée de $u$, a lieu qqs soient les variables et les accroissts de ces variables, pourvu qu'ils soient les mêmes dans les 2 membres. on aura donc par analogie

$$\frac{f(u+\alpha(du+\mu),\ y+\alpha(dv+\mu_1) \dots) - f(u, v, w)}{\alpha} = \alpha(du+\mu)(u+\theta\alpha(du \dots$$

$$+ dv + \mu(u+\alpha(du+\mu), y+\dots$$

$$\vdots$$

passt. à la limite.

on a $\partial s = \partial u\, \varphi(u, v, w \ldots) + \partial v\, \varphi(u, v\, w \ldots) \ldots$

$\varphi(u, v, w \ldots)$ désignant la dérivée prise par rapport à

$\chi(u, v, w \ldots)$ . . . . . à $y$.

On peut l'écrire.

$$\partial s = \frac{\partial . s}{\partial u} . \partial u + \frac{\partial . s}{\partial v} \partial v + \frac{\partial s}{\partial w} \partial w \ldots$$

École Polytechnique

Cours d'analyse

N°. 4.

Lamaistre

13 Leçon d'analyse

Si l'on a $s = f(x, y, z \dots)$ on peut ramener sa Différentiation à la dérivée d'une seule variable.



Si je fais croître $x, y, z \dots$ des quantités infiniment petites $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$ on aura...

$$(1) \quad F(\alpha) = f(x + \alpha h, y + \alpha k, z + \alpha l \dots\dots).$$

que je puis regarder comme f^on de la seule variable $\alpha$. faisant $u = x + \alpha h$, $v = y + \alpha k$, $w = z + \alpha l \dots\dots$ et Diff^ant les 2 membres on a...

$$d.F(\alpha) = d.f.(u, v, w \dots) = \varphi(u, v, w, \dots)\, du + \chi(u, v, w \dots)\, dv$$

or $du = h\, d\alpha$, $dv = k\, d\alpha$. $dw = l\, d\alpha$. ... en D^t $u, v, w \dots$ par rapp^t à $\alpha$. ainsi on a

$$d.F(\alpha) = \overset{(2)}{F'\alpha}\, d\alpha = \{\varphi(x + \alpha h, y + \alpha k, \dots) h + \chi(x + \alpha h, y + \alpha k \dots) k + \chi(\dots) h\}\, d\alpha$$

donc $F'\alpha$ = le 2^d membre divisé par $d\alpha$. ou les quantités entre les parenthèses $\{\ \}$.

On sait que $F(0) = u$ on l'obtient dans (1) en faisant $\alpha = 0$.

$$\text{or } du = \lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = F'(0).$$

donc

Si je fais dans (2) $\alpha = 0$. j'aurai

$$F'(0) = du = \varphi(x, y, z \dots)\, dx + \chi(x, y, z \dots)\, dy + \psi(x, y, z \dots)\, dz.$$

valeur qu'on avait trouvée par un autre moyen.

## Différentiation des fonctions implicites

je suppose que l'on ait d'abord une f^on implicite de deux variables $x, y$.

$$u = f(x, y) = 0.$$

on veut trouver, sans résoudre l'Eq^on la Différentielle de $y$. qui est ici variable dépendante en f^on de la D^ne de $x$ qui est la variable indépendante.

je fais croître $x$, et $y$, de $\Delta x$ et $\Delta y$. on aura toujours

$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$. Par suite en retr.t de la 1re Eq.on

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = 0.$$

si $\Delta x = \alpha h$. quantité inf.t petite, $\Delta y$ reçoit un acc.t corresp.t inf.t petit aussi on a en div.t par $\alpha$.

$$\frac{f(x+\alpha h, y+\alpha k) - f(x,y)}{\alpha} = 0.$$

or ce 1er membre à la limite sera $d(f(x,y)$ qu'on a trouvée égale à .... $\varphi(x,y)\,dx + \chi(x,y)\,dy$.

on a donc

$$\varphi(x,y)\,dx + \chi(x,y)\,dy = 0. \quad \text{d'où l'on tire}$$

$$dy = \frac{-\varphi(x,y)}{\chi(x,y)}\,dx$$

<u>Exemple</u>. soit $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

on peut D.er cette Exp.on car on a $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0 = w$.

$$2(x-a)\,dx + 2(y-b)\,dy = 0.$$

$$dy = -\frac{(x-a)}{y-b}\,dx.$$

Remp.t $y$ par sa valeur tirée de l'Eq.on on a

$$dy = \frac{-(x-a)\,dx}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}\,dx$$

pour la D.ne de $y$ par rapp.t à $x$.

---

Si $u = f(x,y,z) = 0$.

on peut avoir la D.ne de la variable dép.te $z$ en f.on de $x, y$ qui sont variables indépendantes.

D.t aux variables $x, y, z$ les accroiss.ts $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. on a $u + \Delta w = 0$. et $\frac{\Delta w}{\alpha} = 0$. donc à la limite on a

$$du = 0.$$

égalant donc la valeur de du trouvée précédemment à 0.

on a. $\varphi(x,y,z\ldots)\,dx + \chi(x,y,z\ldots)\,dy + \psi(x,y,z\ldots)\,dz = 0.$ 35

d'où $dz = -\dfrac{(x-a)\,dx}{z-c} - \dfrac{(y-b)\,dy}{z-c}.$

remplaçant $z$ par sa valeur. on aurait $dz$ en f^on des variables $x, y$.

Si l'Eq^on était sous la forme $u = v$. on a $du = dv$.
car si $u - v = 0$ l'écrit $u - v = 0$ $d(u-v) = 0$ ou $du - dv = 0$
d'où $du = dv$.

Si l'on a 2 Eq^ons entre trois variables.

$u = f(x,y,z) = 0$
$u = F(x,y,z) = 0$ } il n'y a qu'une seule variable indép^te à cause des 2 Eq^ons

et l'on peut exprimer $dy$ et $dz$ en fonction de $dx$ qui est variable indépendante. car on aura d'après ce qu'on a vu précéd^t.

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot dz = 0.$$

On peut ramener ces Eq^ons à être f^on de $x, y, z$ de $dx, dy, dz$ éliminant $dz$ par ex: on aura une Eq^on en $dx$ $dy$. qui donnera $dy$ en f^on de $dx$. subst. dans l'une des deux Eq^ons ci-dessus. on aura $dz$. donc &^a...

## app^on aux fonctions homogènes.

On appelle f^on homogène, une Eq^on telle qu'en faisant croître les variables dans le rapport de 1 à $t$. on puisse mettre la f^on sous la forme.

$$f(tx, ty, tz\ldots) = t^a f(x,y,z\ldots).$$

ex: $x^2+y^2+z^2 = u$ est homogène car chang^t $x, y, z$ en $tx, ty$ $tz$. on a $t^2x^2 + t^2y^2 + z^2 = t^2u$.

on appelle f.on homogène d'un degré nul une f.on par ex: $f\frac{x}{y}$. telle qu'on substd. à la place de $x, y, tx, ty$. on ait la f.on multipliée par $t^0$.

si l'on a $w = f(x,y,z)$. si l'on fait $t = \frac{1}{x}$. on obtient.

$$af\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \cdots\right) = \frac{1}{x^a} f(x,y,z)$$

d'où $f_a(x,y,z \cdots) = x^a \left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \cdots\right)$.

---

soit $f(tx + ty + tz \cdots) = t^a f(x,y,z \cdots)$.

la f.on homogène est $S = f(x,y,z \cdots)$.

si $tx = u$, $ty = v$, $tz = w$ ---- on a

$$\partial f(u,v,w \cdots) = \varphi(u,v,w \cdots)\partial u + \chi(u,v,w \cdots)\partial v + \psi(u,v,w \cdots)\partial w$$

or $\partial u = x\,dt$, $\partial v = y\,dt$, $\partial w = z\,dt$ ---- donc

$$\partial f(u,v,w \cdots) = x\varphi(x,y,z \cdots)dt + y\chi(x,y,z \cdots)dt + z\psi(x,y,z \cdots)dt$$
$$= \partial u\, t^a f(x,y,z \cdots) = a t^{a-1} f(x,y,z).$$

divisé par $dt$ et faisant $t = 1$. on a

$$x\frac{\partial S}{\partial x} + y\frac{\partial S}{\partial y} + z\frac{\partial S}{\partial z} \cdots = aw.$$

qui est le théorème des fonctions homogènes.

la dérivée prise à part à $x$ multipliée par $x$, plus la dérivée $dy$ multiplié par $y$ + ..... égale la f.on multipliée par le degré de la f.on

cette somme égale 0 quand la fonction est homogène d'un degré nul.

$u = \frac{x}{y}$. $\partial^{u}$ par rapport à $x$. est $\frac{1}{y}\partial x$.

$\partial^{u}$ par rapport à $y$ .... $\frac{-x}{y^2}\cdot\partial y$.

donc $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{y}$. $\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$. $x$ ant la 1ère par $x$.

la 2de par $y$. on a. $\frac{x}{y} - \frac{x}{y} = 0$.

Trouver les Maxima et les Minima des fonctions de plusieurs variables.



Soit $u = f(x, y, z \ldots)$.

$x, y, z \ldots$ étant des variables indépendantes. Si j'attribue à ces variables des accroissements infiniment petits $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots$ il faut pour que le point correspondant à $x_0\ y_0\ z_0$ par exemple soit un maximum que

$$u' = f(x_0 + y_0 + z_0 \ldots)$$

soit plus grand que les valeurs de $u'$ correspondantes à des valeurs $x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y \ldots\ldots$

ou

$$f(x + 2h, y + 2k, z + 2l \ldots) - f(x, y, z) < 0 \qquad \text{max}$$

et par la même raison,

$$f(x + 2h, y + 2k, z + 2l \ldots) - f(x, y, z) > 0. \qquad \text{min.}$$

On peut ramener la question à celle de deux variables

en soit $F(2) = f(x + 2h, y + 2k, z + 2l \ldots)$.

dans laquelle on regarde 2 comme variable. il faudra pour le max. que

$$F(\alpha) - F(0) < 0$$

et $F(2) - F(0) > 0$ pour le Min.

Car ces Eqns remplaçant évidt les précédentes. et elles ont lieu ici indépt de $h, k, l \ldots$.

Or d'après ce qu'on a vu pour les max. et le min. de $y = f(x)$. on sait qu'il faut que

$$F'(0) = 0.$$

ou bien que $dw$ soit nulle ou infinie dont on négt.

or

$$dw = \varphi(x, y, z \ldots)\,h + \chi(x, y, z \ldots)\,k + \psi(x, y, z \ldots)\,l \ldots$$

cette Expn devant être nulle ou infinie il faudra q q's soient $h, k, l \ldots$ ou les Eqns

$$\frac{du}{dx} = 0 \qquad \frac{du}{dy} = 0 \qquad \frac{dw}{dz} = 0.$$

toutes les valeurs d'$x$, d'$y$, de $z$ qui satisfont à ces Eq^ons ne donnent pas des Max et des Min. mais toutes celles qui peuvent les donner y sont renfermées.

Les mêmes raisonnements ont lieu pour le min.

et pour distinguer si c'est un max. ou un min. il faut substituer deux couples de valeurs pour $x, y, z$... l'un plus grand que $x_0, y_0, z_0$, l'autre plus petit. On aura un Max. quand $u = f(x_0, y_0, z_0)$ sera plus grand que les valeurs $u'$ $u''$ données par $x_0 \pm \Delta x$ ... et un min. quand $u$ sera plus petit.

Exemple.

soit $u = (cy - bz + p)^2 + (az - cx + q)^2 + (bx - ay + r)^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2(az - cx + q)c + 2(bx - aq + r)b.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = +2(cy - bz + p)c - 2(bx - ay + r)a.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2(cy - bz + p)b + 2(az - cx + a)a.$$

ég^t. chacune de ces Exp^ons à 0 on a 2 Eq^ons. La 3^e. se réduirait à ces deux-là.

$$\frac{bx - aq + r}{c} = \frac{az - cx + q}{b}$$

$$\frac{cy - bz + p}{a} = \frac{az - cx + a}{b}.$$

donc toutes les valeurs qui satisfont à ces deux Eq^ons peuvent donner des max et des min.

---

14^e. Leçon
9 janvier 1823.

Si la fonction $u = f(x, y, z \ldots)$ dont on veut trouver le Max. ou le min. est telle que les variables indépendantes $x, y, z$, aient entre eux la relation $F(x, y, z) = 0 = r$. on peut trouver le max ou le Min. de la manière suivante.

je prends la Dme de u en considérant x, y, comme variables indépendantes et z comme fon composée de x et y.

37

on a

$$du = \varphi(x,y,z\ldots)dx + \chi(x,y,z\ldots)dz + \psi(x,y,z\ldots)dz.$$

dx, dy sont des quantités finies, tandisque dz est une fon de x, y, dx, dy qu'on peut trouver en Differentiant v = 0 par les méthodes connues

$$(1)\quad \frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot dz = 0.$$

Expon qui donnera dz. mais du doit être nul pour avoir un max ou min. donc on aura les 2 Eqons (1) et (2)

$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot dz = 0$$

on pourrait prendre la valeur de dz dans (1) et porter cette Expon dans (2). on aurait une Expon devrait être nulle qqs soient dx, dy, il faudrait donc égaler les coefficients à 0 de dx et dy. on aurait 2 Eqons en x, y, z qui combinées avec v = 0 donneraient les valeurs d'x, y, z qui rendraient u, un max ou Min.

pour Eliminer dz entre (1) et (2). on peut multiplier (1) par $\lambda$. et retrancher de (2). on a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \lambda\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz = 0.$$

je prends tel qu'il existe le dernier terme. mais dx, dy étant constants il faut que chacun des deux 1rs coefficients soit nul. donc

$$\lambda = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial v}{\partial z}}.$$

Ces 2 Eqons combinées avec v = 0 donneront les valeurs d'x, y, z, qui pourront ~~rendre un~~ un max. ou Min.

---

si l'on avait u = fon de n variables on aurait n-1 Eqons. et v = 0 qui suffiraient pour Der x, y, z...

Exemple.

Soit $u = ax + by + cz \cdots$ # les variables étant liées entre elles par $x^2 + y^2 + z^2 \cdots = r^2$.

$$(2)\quad du = a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$$

$$(1)\quad 0 = x\,dx + y\,dy + z\,dz.$$

Elim$^t$. $dz$. en m$^t$ (1) par $\lambda$. on a

$$(a - \lambda x)\,dx + (b - \lambda y)\,dy + (c - \lambda z)\,dz = 0.$$

on a les 2 Eq$^{ons}$.

$$\lambda = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

pour déterminer $x, y, z \cdots$ j'élève $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \cdots$ au carré...

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \cdots$$

La moyenne entre ces Exp$^{ons}$ sera égale à chacune d'elles.

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 \cdots}{a^2 + b^2 + c^2 \cdots} = \frac{r^2}{a^2 + b^2 + c^2 \cdots}$$

donc

$$x = \frac{ar}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 \cdots}} \quad y = \frac{br}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 \cdots}} \quad z = \frac{cr}{\sqrt{\ }}$$

La valeur max. sera donc ici en prenant le signe +.

$$u = \frac{a^2 + b^2 + c^2 \cdots}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\, r. = r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 \cdots}$$

On pouvait trouver cette valeur maximum directement en effet. si l'on prend les différences

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} \;\Big|\; \frac{a}{x} - \frac{c}{z} \;\Big|\; \frac{b}{y} - \frac{c}{z}.$$

si l'on prend les num$^{rs}$. de ces diff$^{ces}$ réduites au même D$^r$. qu'on en fasse la somme et qu'on les élève au carré. on a

$$(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - by)^2 = A$$

si l'on y ajoute $u^2$ on a

$$A + u^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = r^2(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$u^2 = r^2(a^2 + b^2 + c^2) - A.$$

or A se compose d'une suite de carrés qui sont essentiell

positifs. donc on obtiendra le max. en égalant chacun des termes de A à 0. on obtiendra les valeurs déjà trouvées

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$



et le max sera le même que précédemment.

## Différentielles des divers ordres.

Soit $y = f(x)$. on sait que $df(x) = f'(x)\,dx$.

la dérivée de $f'(x)$ qu'on peut considérer comme une nouvelle fon. l'appelle dérivée du 2d. ordre et l'écrit $f''(x)$ ....

$d.f'(x) = f''(x)\,dx$. .... de même $df''(x) = f'''(x)\,dx$. ainsi de suite.

on a donc

$$dy = y'\,dx.$$

$$d.dy = d(y'dx) = h\,dy' = y''h^2 = y''dx^2.$$

ainsi de suite. on écrit ainsi les résultats

$$dy = y'dx$$

$$d^2y = y''dx^2$$

$$d^3y = y'''dx^3$$

$$\vdots$$

$$d^n y = y'''dx^{(n)}$$

## Exemples.

1° Soit $y = e^x$ on sait que la dérivée de $y' = e^x$ on aura

$$y = e^x,\ y' = e^x,\ y'' = e^x \quad \dots\dots \quad y^{(n)} = e^x.$$

$$dy = e^x dx \quad d^2y = e^x dx^2 \quad \dots \quad d^n y = e^x dx^{(n)}$$

2° soit

$$y = \sin x.$$

la dérivée s'obtient en ajoutant à $x$ $\frac{\pi}{2}$. car $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. et que si $y = \sin(x+a)$. on a $y' = \cos(x+a) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + a\right)$.

les dérivées successives sont donc

$$y = \sin x \quad y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad y'' = \sin(x+\pi) \quad y''' = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \dots y^n = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Soit $u = 4w$ on a $\sin w \ldots \sin u+1 \ldots \cos x$. $\sin u+2 \ldots -\sin w$ —
$\sin u+3 \ldots -\sin w$.

Ainsi les diverses dérivées de $y = \sin x$ sont ....

$y' = \cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x + \alpha$ ...

Soit $y = \cos x$.

$y' = \cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cos x + \alpha$ ....

Soit $y = x^\alpha$.

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$ $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ .... $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\alpha-n+1 x^{\alpha-n}$

par suite.

$dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$, $d^2y = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx^2$ .. $d^{(n)}y = \alpha(\alpha-1)\ldots\alpha-n+1 x^{\alpha-n} dx^n$

Si $\alpha$ est égal à un nombre entier $n$.

$y = x^n$

$y' = nx^{n-1}$ $y'' = n(n-1)x^{n-2}$ .... .... $y^{(n)} = n(n-1)\ldots 3.2.1$

Soit $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}$ ....

$y' = nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + \alpha$ ....

$y'' = n.n-1.ax^{n-2} + (n-1)(n-2)bx^{n-3} + \alpha$ ....

$y^{(n)} = a.1.2.3 \ldots n$.

On aurait les différences divers ordres en multipliant par $dx$, $dx^2$ ...
$dx^n$. Les dérivées correspondantes.

15.e Leçon.
le 12 janvier 1823.

n° 5

39

on a trouvé dans la leçon précédente les dérivées des divers ordre d'une fonction composée de variables indépendantes. telles que

$$y = f(x+a) \quad \text{- - - - - - -} \quad y = f(ax).$$

dont les dérivées sont - - - -

$$dy = f'(x+a)\,dx \qquad dy = af'(ax)\,dx$$

$$d^2y = f''(x+a)\,dx^2 \qquad d^2y = a^2 f''(ax)\,dx^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$d^n f(x+a) = f^n(x+a)\,dx^2 \qquad d^{(n)}y = a^n f^n(ax)\,dx^n$$

proposons-nous de trouver les D.lles des divers ordres des fonctions de fonctions de

$$z = F(y).$$

par ex: $z$ et $y$ étant fonction d'une variable indépendante $x$.

$$dz = F'(y)\,dy.$$

d.lle de $dz = d^2z = d(F'(y)\,dy) = dy \times F''(y)\,dy + d\,dy \cdot F'(y) = F''(y)\,dy^2 + F'(y)\,d^2y.$

$d^3z = d.\,d^2z = d(F''(y)\,dy^2 + F'(y)\,d^2y) = dy\,F'''(y)\,dy + 2\,dy\,d^2y\,F''(x)$ dérivée du 1er terme
$+ d^2y\,F''(y)\,dy + F'(y)\,d^3y$ dérivée du 2d terme.

donc $d^3z = F'''(y)\,dy^3 + 3\,dy\,d^2y\,F''(x) + F'(y)\,d^3y.$

$\vdots$

Diff.t encore $d^3z$ on trouverait $d^4z$ ainsi de suite pour toutes les autres diff.lles d'un ordre qq.e

---

on a trouvé les différentielles des divers ordres de $y = f(x)$. en f.on de la variable indép.te $x$.

$$y = f(x)$$
$$dy = f'(x)\,dx$$
$$d^2y = f''(x)\,dx^2$$
$$\vdots$$
$$d^{(n)}y = f^{(n)}x\,dx^n$$

on peut les obtenir d'une autre manière car si $dy = f'(x)\,dx$. on obtiendra facilement les dérivées des divers ordres en Différentiant $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

(ici $dx$ est regardée commune constante puisque $x$ est variab. indép.te)

ou $d.f'(x) = dx f''(x) = \frac{d^2y}{dx}$. donc $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$.

$d f''(x) = dx f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^2}$ .. .. $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$.

ainsi de suite, trouvant la valeur de $d^2y, d^3y \ldots$ on obtiendra pour ces différ^les les mêmes valeurs que précédemment.

---

Si dans un calcul on avait trouvé les différ^les des divers ordres de $y = f(x)$. en considérant $x$ comme variable indépendante. il faudrait les changer en celles qu'on obtient si ~~celles de la même fon~~ $x$ est fonction d'une variable indépendante $t$ par ex: et qui tout

$$dy = f'(x)\,dx$$
$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$
$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x.$$

⋮

pour obtenir les dérivés des divers ordres. on peut substituer dans $d^2y$ $f'(x)$ tiré de la 1ère Eq^on

$$f''(x) = \frac{d^2y - d^2x\frac{dy}{dx}}{dx^2} = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3}.$$

⋮

---

16e lecon.
14 janvier 1823.

Soit $u = f(x,y,z\ldots)$. $x,y,z\ldots$ variables indépendantes et proposons-nous de déterminer les différentielles des divers ordres de cette f^on

nous établirons auparavant plusieurs notations et des principes que nous serons utiles.

La d^ée par rapport à $x$ de $u$ s'indique $d_x u = \varphi(x,y,z\ldots)dx$

$\varphi(x,y,z\ldots)$ étant égal à $\lim. \frac{f(x+\Delta h, y, z\ldots) - f(x,y,z\ldots)}{\Delta h}$.

le numérateur est l'acc^t de $u$ par rapport à $x$ que je désignerai par $\Delta_x u$. et par $\Delta_y u$ celui par rapport à $y$

ainsi $\partial_x u = \lim. \frac{\Delta_x u}{\alpha}$.

$\partial_y u = \lim. \frac{\Delta_y u}{\alpha}$.

quand on différentie la d^lle 1^ère de $u$ parrapport à $x$. on a

$\partial_x . \partial_x u$ qu'on indique $\partial_x^2 u$.

Les dérivées partielles seront

$\frac{\partial_x^2 y}{\partial x^2} \partial x^2$ ou en supp^t $\partial x$ du n^r. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 \ldots$

principe. quand on a différentié parrapport à $x$. on peut différentier le résultat parrapport à $y$. et l'on obtient le même résultat, que si l'on avait d'abord différentié parrapport à $y$ et le résultat parrapport à $x$. principe qu'on peut écrire

$$\partial_y \partial_x u = \partial_x \partial_y u.$$

On sait que $\partial_x u = \varphi(x, y, z \ldots) \partial x$

si l'on cherche l'accroissement de $\partial_x u$ parrapport à $y$ qu'on peut indiquer $\Delta_y \partial_x u$ on mettra à la place de $u$ $u + \Delta_y u$ et l'on retranchera $\partial_x u$. on aura $\partial_x(u + \Delta_y u) - \partial_x u = \partial_x \Delta_y u$.

ainsi on peut écrire

$$\frac{\Delta_y \partial_x u}{\alpha} = \frac{\partial_x \Delta_y u}{\alpha}.$$

or $\lim. \frac{\Delta y}{\alpha} = \partial_y$. $\lim. \frac{\Delta_y u}{\alpha} = \partial_y u$. donc

$$\partial_y \partial_x u = \partial_x \partial_y u.$$

Exemple.

Soit $u = l(x^2 + y^2)$.

$\partial_x u = \frac{2x \partial x}{x^2 + y^2}$.

$\partial_y \partial_x u = 2x \partial x \partial_y \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \partial x \partial y$.

$\partial_y u = \frac{2y \partial y}{x^2+y^2}$, $\partial_x \partial_y u = 2y \partial y \partial_x \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \partial x \partial y$

donc $\partial_y \partial_x u = \partial_x \partial_y u$.

on a $\partial_y \partial_x w = \partial_x \partial_y w$. de $\partial_z \partial_x w = \partial_x \partial_z w$.

je suppose que l'on prenne la 2$^{de}$ par rapport à z de $\partial_y \partial_x w$. — je dis qu'elle est égale à l'une des six combinaisons tirées de $\partial_z \partial_y \partial_x w$ que est la notation. et que voici.

(1) $\partial_z \partial_y \partial_x w$.
(2) $\partial_z \partial_x \partial_y w$
(3) $\partial_y \partial_z \partial_x w$
(4) $\partial_y \partial_x \partial_z w$
(5) $\partial_x \partial_y \partial_z w$
(6). $\partial_x \partial_z \partial_y w$.

C'à d que ces six Exp$^{ons}$ sont toutes égales.

car $\partial_z \partial_x \partial_y w = \partial_z \partial_x (\partial_y w) = \partial_x \partial_z (\partial_y w) = \partial_x \partial_y \partial_z w$.

donc l'Exp$^{on}$ (2) égale l'exp$^{on}$ 5$^{e}$. on le prouve de même pour les autres.

Cela aurait encore si l'on différentiait deux fois par rapport à la même variable.

$$\partial_x \partial_x \partial_y w = \partial_x \partial_y (\partial_x u) = \partial_y \partial_x (\partial_x u) = \partial_y \partial_x^2 w.$$

Donc $\partial_x^2 \partial_y w = \partial_y \partial_x^2 w$.

il en serait de même si l'on Différentiait plusieurs fois par rapport à y

donc Gt. $\partial_x^m \partial_y^n u = \partial_y^n \partial_x^m w$.

---

pour obtenir les dérivées des divers ordres. on remarque ... que

$\partial_x \partial_y w = \pi(x, y, z \ldots)\, dx\, dy$.

ainsi Dérivée du 2$^{d}$ ordre ou $\pi(x, y, z \ldots) = \dfrac{\partial_x \partial_y w}{\partial x\, \partial y}$.

par rapport à y et à x. ou à x, et y. puis qu'elles sont égales.

Dérivée du 2$^{d}$. ordre par rapport à x est $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Dérivée ... à y $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

en général si l'on différentie $m$ fois parrapport à $x$, $n$ fois parrapp$^t$ à $y$, $p$ fois parrapport à $z$. ... et que l'on désigne par $\varphi^{m+n+p}$ la dérivée résultante on aura —

41

$$\varphi^{m+n+p\ldots} = \frac{\partial_x^m \partial_y^n \partial_z^p \ldots u}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p \ldots}$$

on se sert pour la représenter de cette notation.

$$\frac{\partial^m \partial^n \partial^p \ldots u}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p \ldots}$$

ou de celle-ci ....

$$\frac{\partial^{m+n+p\ldots} u}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p \ldots}$$

---

Ces principes et ces notations une fois établis cherchons les D$^{lles}$ des divers ordres de

$$u = f(x, y, z \ldots).$$

on sait que

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \alpha^a \ldots$$

c.à.d. la diff$^{lle}$ d'une f$^{on}$ égale la dérivée prise parrapport à $x$ plus la la dérivée prise parrapport $y$ plus $\alpha^a$ ...

on aura donc d'après ce principe.

$$\partial . \partial u = \partial^2 u = \partial_x \partial u + \partial_y \partial u + \partial_z \partial u + \alpha^a \ldots$$

$$\text{ou } \partial^2 u = \begin{cases} \partial_x(\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots) \\ \partial_y(\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u \ldots) \\ \partial_z(\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u \ldots) \end{cases}$$

Exécutant les calculs indiqués dans chacune de ces lignes. on a

$$\partial^2 u = \begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + \partial_x \partial_z u \ldots \\ \partial_y^2 u + \partial_y \partial_x u + \partial_y \partial_z u \ldots \\ \partial_z^2 u + \partial_z \partial_x u + \partial_z \partial_y u \ldots \end{cases}$$

Si l'on fait la somme de toutes ces lignes, en faisant attention à la notation $\partial_y \partial_x u = \partial_x \partial_y w$ ..... on aura —

$$\partial^2 w = (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 w \cdots) + 2\partial_x \partial_y w + 2\partial_x \partial_z w + 2\partial_y \partial_z w \cdots$$

on déterminerait $\partial^3 w$ en raisonnant sur $\partial^2 w$ comme on l'a fait sur $\partial w$.

---

Supposons qu'il n'y ait que deux variables, on aura $w = f(x,y)$.

$$\partial w = \partial_x w + \partial_y w$$

$$\partial^2 w = \partial_x^2 w + 2\partial_x \partial_y w + \partial_y^2 w.$$

$$\partial^3 w = \partial_x(\partial_x^2 u + 2\partial_x \partial_y w + \partial_y^2 u) + \partial_y(\partial_x^2 u + 2\partial_x \partial_y w + \partial_y^2 w) =$$

$$= \begin{cases} \partial_x^3 w + 2\partial_x^2 \partial_y w + \partial_x \partial_y^2 w \\ + \partial_y^3 w + \partial_y \partial_x^2 w + 2\partial_x \partial_y^2 w. \end{cases}$$ puisque $\partial_x^2 \partial_y u = \partial_y \partial_x^2 w$. on a

$$\partial^3 w = \partial_x^3 u + 3\partial_x^2 \partial_y w + 3\partial_x \partial_y^2 w + \partial_y^3 w.$$

On démontre de même que ——

$$\partial^4 u = \partial_x^4 w + 4\partial_x^3 \partial_y u + 6\partial_x^2 \partial_y^2 w + 4\partial_x \partial_y^3 w + \partial_y^4 w.$$

On peut voir que les coefficients sont ceux d'un binome élevé à la puissance correspondante à l'indice de $\partial$.

Car on peut écrire ainsi

$$\partial w = (\partial_x + \partial_y + \partial_z \cdots) w$$

$$\partial \partial u = \partial^2 w = (\partial_x + \partial_y + \partial_z \cdots)(\partial_x + \partial_y + \partial_z \cdots) w = (\partial_x + \partial_y + \partial_z \cdots)^2 w.$$

De même

$$\partial^3 w = (\partial_x + \partial_y + \partial_z \cdots)^3 w.$$

$$\partial^n w = (\partial_x + \partial_y + \partial_z \cdots)^n w.$$

Cette dernière peut être considérée comme une équation symbolique qui peut former toutes les autres.

si l'on n'a que deux variables, on voit que

$$\partial^2 w = (\partial_x + \partial_y)^2 u = (\partial_x^2 + 2\partial_x\partial_y + \partial_y^2) w.$$

$$\partial^3 u = (\partial_x + \partial_y)^3 w.$$

ce qui démontre que les divers coefficients sont ceux d'un binome dans le cas de deux variables indépendantes, ceux d'un trinome dans le cas de trois &c....

---

D'après les notations précédemment établies pour les diff^lles des divers ordres, on peut écrire les résultats obtenus ci-dessus.

$$\partial^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\partial x^2 + \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\partial y^2.$$

$$\partial^3 w = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\partial x^3 + \frac{3\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\partial x^2 \partial y + \frac{3\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\partial x \partial y^2 + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\partial y^3.$$

$$\vdots$$

---

Soit, étant donné $s = f(u, v\ w \ldots)$, proposé de trouver les D^ces des divers ordres, $u, v, w$ étant variables dépendantes.

on sait que l'on a ....

$$\partial s = \frac{\partial s}{\partial u}\partial u + \frac{\partial s}{\partial v}\partial v + \frac{\partial s}{\partial w}\partial w \ldots\ldots$$

nous allons faire les raisonnements sur deux variables, ils s'appliqueraient immédiatement sur un plus grand nombre.

soit $s = f(u, v)$.

$$\partial s = \frac{\partial s}{\partial u}\partial u + \frac{\partial s}{\partial v}\partial v.$$

$$\partial.\partial s = \partial^2 s = \partial_u\left(\frac{\partial s}{\partial u}\partial u + \frac{\partial s}{\partial v}\partial v\right) + \partial_v\left(\frac{\partial s}{\partial u}\partial u + \frac{\partial s}{\partial v}\partial v\right).$$

or ici $\partial u$ n'est pas constante il en est de même de $\partial v$. il faut prendre la diff^lle de ces facteurs comme l'on prend celle d'un produit.

Exécutant ces opérations on a

$$d^2S = \begin{cases} \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} . du^2 + d^2u . \frac{\partial S}{\partial u} + \frac{\partial^2 S}{\partial u . \partial v} . du . dv . \\ + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} . dv^2 + d^2v \frac{\partial S}{\partial v} + \frac{\partial^2 S}{\partial v . \partial u} . dv . du . \end{cases}$$

on aura donc en ajoutant.

$$d^2S = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} du . dv . + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} dv^2 + d^2u \frac{\partial S}{\partial u} + d^2v \frac{\partial S}{\partial v}$$

On obtiendrait $d^3S$ en fais$^t$ sur $d^2S$. comm'on l'a fait sur $dS$.

on peut parvenir au même résultat. en diff$^{er}$. chaque terme comme une fon composée.

$$d . f(u,v) = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} du + \frac{\partial . f(u,v.)}{\partial v} dv .$$

$$d . d f(u,v) = d . \left(\frac{\partial f(u,v.)}{\partial u} . du\right) + d . \left(\frac{\partial . f(u,v.)}{\partial v} dv\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2} du^2 + \alpha^{w} \ldots\ldots$$

on retrouve absolument les mêmes termes que ci-dessus.

---

on peut faire les mêmes raisonnements si l'on a plus de ~~deux~~ variables. . .

soit $S = f(u,v,w\ldots)$.

$$dS = \frac{\partial S}{\partial u} du + \frac{\partial S}{\partial v} dv + \frac{\partial S}{\partial w} dw \ldots .$$

on peut prendre la 2$^{de}$ de chaque terme et l'on

$$d^2S = \begin{cases} \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial w} du dw \ldots + d^2u \frac{\partial S}{\partial u} \\ + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial u} dv du + \frac{\partial^2 S}{\partial w \partial v} dw dv \ldots d^2v . \frac{\partial S}{\partial v} \\ + \frac{\partial^2 S}{\partial w^2} dw^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial w \partial u} dw du + \frac{\partial^2 S}{\partial w \partial v} dw dv \ldots + d^2w \frac{\partial S}{\partial w} \end{cases}$$

dans 1$^{re}$ colonne c'est la diff$^{le}$ de $\frac{\partial S}{\partial u} du \ldots$ 2$^{de}$ celle de $\frac{\partial S}{\partial v} dv \ldots$ &a. . .

si l'on réunit tous ces termes on trouve.

$$d^2 S = \begin{cases} \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} du^2 + \frac{2 d^2 S}{du dv} du dv \cdots + d^2 u \frac{dS}{du} du \\ + \frac{d^2 S}{dv^2} dv^2 + \frac{2 d^2 S}{du dw} du dw \cdots + d^2 v \frac{dS}{dv} dv \\ + \frac{d^2 S}{dw^2} dw^2 \quad \frac{2 d^2 S}{dv dw} dv dw \cdots + d^2 w \frac{dS}{dw} dw \end{cases}$$

---

Si l'on prend le cas de deux variables $S = f(u, v)$, et si l'on cherche les $D^{les}$ des divers ordres comme si $u$ était fonction de $x$ seulement et $v$ fonction de $y$. on parvient à un résultat analogue au précédent et qui sert à le trouver immédiatement.

La $D^{re}$ de $u$ devient dans ce cas particulier:

$$dS = d_x S + d_y S.$$

$$d^2 S = d_x^2 S + 2 d_x d_y S + d_y^2 S.$$

il faut trouver chacun de ces termes ou a

$d_x S = \frac{df(u,v)}{du} d_x u$. puisque $S$ est une $f^{on}$ composée et qu'on parcourt $dz = F'(y) dy$. or ici $dy$ correspt à $du$ qu'il faut $D^{er}$ par rapport à $x$ et que j'indique $d_x u$.

de même $d_y S = \frac{df(u,v)}{dv} dv$.

$$d_x^2 S = d.\left(\frac{df(u,v)}{du} d_x u\right) = \frac{d^2 f(u,v)}{du^2} (d_x u)^2 + d_x^2 u \, d.\frac{f(u,v)}{du}.$$

$$d_y^2 S = \cdots = \frac{d^2 f(u,v)}{dv^2} (d_y v)^2 + d_y^2 u \, d.\frac{f(u,v)}{dv}.$$

$$2 d_x d_y S = d_x \left(\frac{df(u,v)}{dv} d_y v\right) = \frac{df(u,v)}{du\, dv} d_x u \, d_y v.$$

donc

$$d^2 S = \frac{d^2 f(u,v)}{du^2} (d_x u)^2 + d_x^2 u \, d.\frac{f(u,v)}{du} + 2 \frac{df(u,v)}{du\, dv} d_x u \, d_y v.$$
$$+ \frac{d^2 f(u,v)}{dv^2} (d_y v)^2 + d_y^2 u \, d.\frac{f(u,v)}{dv}$$

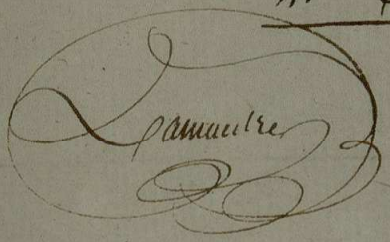
on retrouverait en effaçant les indices les $\frac{1}{2}$ ergots ci-dessus.

Ecole Polytechnique.

Cours d'analyse.

45

N.° 6.



Leçon.
5
18 janvier 1823.

je suppose que $f(x)$ et ses dérivées de divers ordres restent continues dans le voisinage d'une valeur $x_0$ que je suppose les réduire à zéro jusqu'à $f^{(n)}(x)$, et je demande quels sont les signes de ces dérivées quand on remplace $x$ par $x_0+\alpha h$. ($\alpha$ étant une quantité infiniment petite qui converge vers 0).

on a prouvé que $h$ étant qq^e. on avait dans les cas ci-dessus ~~que~~

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\theta h).$$

mais $f(x_0)$ est nulle par $x_0$ on aura

$$f(x_0+h) = hf'(x_0+\theta h).$$

raisonnant sur $f'(x_0+h)$. comme on l'a fait sur $f(x_0+h)$ on aura puisque l'on suppose que $f'(x_0)$ est nulle.

$$f'(x_0+h) = hf''(x_0+\theta_1 h')$$

si l'on fait $\theta h = h_1$ $\theta_1 h' = h_2$ ..... $\alpha^n$ .... $h_1$ $h_2$ ....
étant de même signe que $h$, allant en décroissant, et tous plus petits que $h$. on aura la suite d'égalités ...

$$f(x_0+h) = hf'(x_0+h_1)$$
$$f'(x_0+h_1) = h_1 f''(x_0+h_2)$$
$$f''(x_0+h_2) = h_2 f'''(x_0+h_3)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n-1)}(x_0+h_{n-1}) = h_{n-1} f^{(n)}(x_0+h_n).$$

multipliant toutes ces égalités on obtient.

$$f(x_0+h) = hh_1h_2 \dots h_{n-1} f^n(x_0+h_n).$$

$hh_1h_2 \dots h_{n-1}$ ayant $n$ facteurs chacun plus petits que $h$ est $< h^n$. et de même signe que lui, on peut donc le représenter par $\theta_n h^n$. de même $h_n$ étant plus petit que $h$ peut se représenter par $\theta h$. on a donc

$$f(x_0+h) = \theta_n h^n f^{(n)}(x_0+\theta h).$$

$h$ étant qq$^{\text{e}}$. on peut le remplacer par une quantité infiniment petite $i$. alors

$$f(x_0+i) = \theta_n i^n f^{(n)}(x_0+\theta i).$$

Si $n$ est pair $i^n$ est toujours positif et le signe $f(x_0+i)$ dépend de $f^{(n)}(x_0)$.

Si $n$ est impair $i^n$ aura le signe de $i$. et le signe de $f(x_0+i)$ sera celui de $i f^{(n)}(x_0)$.
c'à,d. qu'il variera avec $i$.

---

Cela posé: on peut reconnaître dans une Eqon $y=f(x)$ les valeurs qui donnent un maximum, et celles qui donnent un minimum.

Si l'on suppose que $x_0$ réduise seulement $f'(x)$ à 0. on aura une série d'Eqons les mêmes que les précédentes à partir de la 2$^{\text{de}}$. les m$^{\text{es}}$. on obtiendra puisqu'il y aura un facteur en $h$ de moins.

$$f'(x_0+i) = \theta_n i^{n-1} f^{(n)}(x_0+\theta i).$$

d'après cela.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \theta_n i^n f^{(n)}(x_0+\theta i).$$

ou si l'on ne considère que le cas le plus général, c'à,d celui où $f'(x)=0$, et laissant celui où $\frac{1}{f'(x)}=0$. on voit que

$$f(x_0+i) - f(x_0) = \theta_n i^n f^{(n)}(x_0+\theta i).$$

Le 1$^{\text{er}}$ membre est précisément l'accroiss$^{\text{t}}$ de $x_0$. où il faut qu'il soit constamment de même. ainsi il faudra voir si la valeur qui rend $f'(x)$ nulle rend les autres dérivées nulles ... si l'on s'arrête à une dérivée de rang impair on aura un accroiss$^{\text{t}}$ dont le signe dépendra de $i f^{(n)}(x_0)$.

qui pourra parcourir quant changer de signe avec $\lambda$, donc dans ce cas il n'y aura ni max. ni min.. 47

Si la dérivée qui ne peut pas être réduite à zéro est de rang pair. il y aura maximum quand le résultat donné par $f^{(n)}(x_0)$ sera négatif et minimum quand il sera positif.

Soit proposé pour exemple de chercher les max.^a ou min.^a de la courbe

$$y = x^a e^{a-x}$$

la dérivée est $y' = x^a e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right)$. $x = a$ rend $y' = 0$

la dérivée 2.^de est $y'' = x^a e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right)^2 + x^a e^{a-x}\left(-\frac{a}{x^2}\right)$.
où $x = a$ rend la dérivée d'un rang pair négative, donc $x = a$ peut correspondre à l'abcisse d'un maximum.

— Déterminer dans une Eq.^on $w = f(x, y, z \ldots)$ f.^on de plusieurs variables si des valeurs $x_0\ y_0\ z_0$ correspondent à un maximum ou à un minimum.

leçon du 23 janvier.

on a vu que le maximum ou le minimum de

$$F(\lambda) = f(x + \lambda h,\ y + \lambda k \ldots)$$

était donné par la même Eq.^on quand j'suppose $\lambda = 0$. c'à.d que $F'(0) = dw = 0$ sont également propres à donner les valeurs max.^a ou min.^a pourvuque dans ces Eq.^ons on regarde $\lambda = 0$, $h, k, l \ldots$ qq.^es ... ce qui donne Eq.^ons

$$\frac{dw}{dx} = 0 \qquad \frac{dw}{dy} = 0 \qquad \frac{dw}{dz} = 0 \ \ldots$$

il faut reconnaître si c'est à un max. ou à un minimum que des racines $x_0\ y_0\ z_0 \ldots$ de ces Eq.^ons correspondent.

les regardant, comme donnant le max. de $F(\lambda)$ quand $\lambda = 0$. on a alors une Eq.^on à une seule variable $\lambda$ et l'on a vu précédemment, qu'il fallait nage

Si $F''(0)$ était nul ... s'il l'était, de voir de quelle ordre est la dérivée qui ne se réduit pas à zéro ... &c ....

or $F''(0) = d^2w$. puisque $F'(0) = dw$.

$F'''(0) = d^3w$

$F^{IV}(0) = d^4w$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = d^n w$.

il faut donc voir si $x_0, y_0, z_0$ ... rendent nulle $d^2w$. dans ce cas, il faudrait recourir à la suivante. si la dérivée du 3e ordre n'était nulle. il n'y aurait ni max - ni min. car alors

$$F'(\alpha) - F'(0) = \tfrac{\theta i}{2}^3 F'''(\alpha + \theta i).$$

pourrait prendre tous les signes à cause du 2e membre qui change de signe avec i.

Mais supposons que $d^2w$ ne soit pas nulle et examinons dans quels cas il aura max. et dans quel autre il y aura min.

$$d^2w = \frac{d^2w}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2w}{dx\,dy} dx\,dy + \frac{d^2w}{dy^2} dy^2.$$

si l'on représente par A, B, C, ces coefficients quand on a remplacé $x, y, z \ldots$ par $x_0, y_0, z_0 \ldots$ si l'on fait $dx = h$ $dx\,dy = hk$ ..... on a -

$$d^2w = A h^2 + 2 B h k + C k^2.$$

si $p = \frac{k}{h}$. on obtient

$$d^2w = A h^2 (A + 2Bp + Cp^2).$$

or le signe de $d^2w$ ne dépend que du facteur

$$A + 2Bp + Cp^2.$$

qui doit être constamment de même signe, qq. soit p. pour qu'il y ait max. ou min.

si a ch b sont les racines de ce facteur égalé à 0 on peut l'écrire

$$c(p-a)(p-b).$$

comme p est qq. on peut en faisant varier p passer des positifs au négt. et réciproq. or pour que a et b soient réelles il faut que

$$B^2 - Ac > 0.$$

donc toutes les fois que cette condition aura, $x_0, y_0, z_0$ ne correspondront ni à un max, ni à un minimum.

si $B^2 - Ac < 0.$

c.à.d. si les racines sont imaginaires, on sait qu'on aura en substituant pour p des valeurs qq. on aura toujours des résultats de même signe.

or pour qu'il y ait min. il faut que $d^2u$ soit constt négatif, qq. soit p. si $p=0$. il faut donc que $A<0$. à cause de $B^2-4AC$. il faut aussi que $C<0$. ainsi l'on peut dire que l'on a

maximum pour $x_0 y_0 z_0$ ... quand on a $B^2 - AC < 0$ $\begin{cases} A<0 \\ C<0. \end{cases}$

minimum ----- $\begin{cases} A>0 \\ C>0 \end{cases}$

— il peut encore arriver que

$$B^2 - AC = 0.$$

on sait qu'il faut que

$$F(\lambda) - F(0) = \theta_2 i^2 F_{11}(\lambda + \theta i).$$

soit constamment de même signe. qq. soit la valeur de p.

or le facteur ci-dessus devient

$$c\left(p+\frac{B}{C}\right)^2.$$

on voit qu'il sera constamment de me signe c soit donc $c<0$. on voit qu'il sera const^t négatif pour toutes les valeurs de $p$. excepté pour $p=-\frac{B}{C}$. dans ce cas. $F''(0)$ ou $d^2u$ devient nulle. on ne peut donc pas reconnaître le signe de

$$F(\alpha)-F(0).$$

et dans ce cas il faut remonter à $F'''(0)=d^3u$. qui peut s'écrire

$$d^3u = h^3(A'+3B'p+3C'p^2+D'p^3).$$

et voir si en substituant pour $p$ sa valeur $-\frac{B}{C}$. il ne se réduit pas à 0. dans ce cas, il n'y a ni max. ni min. s'il se réduit à 0. il faut remonter à

$$d^4u = h^4(4+4Mp+6Np^2+4Pp^3+6Qp^4.)$$

et nous supposerons qu'il ne se réduise pas à 0 pour $p=-\frac{B}{C}$. s'il donne un signe contraire à c. au résultat, c.à.d. s'il est positif. comme

$$F(\alpha)-F(0) = \theta_4 i^4 F^{IV}(2+\theta i).$$

on aura pour $F(\alpha)-F(0)$ deux résultats de signe contraire, il n'y aura donc ni max. ni min. mais si ce résultat a le même signe que le résultat $c\left(p+\frac{B}{C}\right)^2$ c.à.d. négatif par hyp. il y aura max. pour $x_0\ y_0\ z_0$ ...

si c avait été positif. on aurait du trouver au un résultat positif dans $d^4u$ pour avoir min.

Lecon du 28 janvier.

On a eu besoin dans la théorie précédente de trouver dans quels cas les fonctions

$$w = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$$w = f(x, y, z \ldots)$$

Conservant toujours les mêmes lignes quelques soient $x, y, z \ldots$ je vais tacher de trouver quelles sont les relations qui doivent exister entre $A, B, C \ldots$ 1° pour que

$$u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

conserve le même signe. Soit 1° $A > 0$.

Ou voit qu'en donnant à $x$ toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. $u$ prendra toutes les valeurs depuis une certaine limite jusqu'à l'infini. il y aura donc un minimum lorsque $x$ reçoit variable.

Pour qu'il y ait minimum il faut que

$$Ax + By = 0. \quad (1)$$

Or par le théorème des fonctions homogènes

$$2w = (Ax + By)x + (Bx + Cy)y. = (Bx + Cy)y.$$

ou

$$Bx + Cy = \frac{w}{y}.$$

Mt. la 1ère par B la 2de par A. on aura

$$Aw = (AC - B^2)y^2.$$

qui exprime le max. de $Aw$ puisque ce calcul se réduit à porter la valeur de $x$ tirée de (1) dans la fonction ce qui donnerait $\frac{(AC - B^2)y^2}{A}$. donc. cette Expression exprime le minimum de $Aw$.

Or $w$ devant rester de même signe que soit $x, y$, on doit que pour $y = 0$ $u = Ax^2$. et $w$ sera de même signe que $A$.

Donc $(AC - B^2) > 0$.

Condition essentielle pour que $u$ reste toujours de même signe.

elle sera const^t. négative si A négatif. et const. positif. si A est positif. ——

Soit,

$$u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy.$$

et cherchons la cond^on pour que ce polynome soit const^t. de même signe qq^es soient x, y, z ...

je considère d'abord x comme seule variable. — en ord^t parrapp^t. à x. on a —

$$u = Ax^2 + 2(Ez + Fy)x + By^2 + Cz^2 + 2Dyz. \quad (\alpha)$$

~~pour qu'en~~ je cherche le min. de Au. il est le même que précéd^t. en chang^t. $Cy^2$ en $By^2 + Cz^2 + 2Dyz$. et $B^2y^2$ en $(Ez + Fy)^2$

$$Au = A(By^2 + Cz^2 + 2Dyz) - (Ez + Fy)^2. \quad (1)$$

il faut donc pour que le polynome reste const^t. de même signe chercher le min.^mum de cette Exp^on qq^e soit y. — or elle peut s'écrire —

$$Au = (AB - F^2)y^2 + (AC - E^2)z^2 + 2(AD - EF)yz.$$

et le minimum sera —

$$A(AB - F^2)u = \left\{(AB - F^2)(AC - E^2) - (AD - EF)^2\right\}z^2$$

or d'après ce qu'on a vu précéd^t. ~~pour que~~ il faut que —

$$(AB - F^2)(AC - E^2) - (AD - EF)^2 > 0. \quad (2)$$

donc cette cond^on est essentielle pour que le polynome proposé soit de même signe.

pour qu'elle soit const^t. positive il faut que A > 0 pour l'Eq^on α. car. si y, z sont 0 le signe dx dépend de A. ensuite il faut pour ~~Au~~. (1) que $(AB - F^2) > 0$

car on peut encore faire $z=0$ et le signe de $Au$ dépend évt de $AB-F^2$.

50

~~pourquoi elle soit~~

en dépens il faut const. que l'inégalité (2) subsiste on peut l'écrire.

$$A\left(ABC-CF^2-AD^2-BE^2+2DEF\right)>0.$$

il faut et il suffit donc que

$$\left(ABC-CF^2-AD^2-BE+2DEF\right)$$ soit de même que $A$.

Si l'on veut que $u$ soit const$^t$ négatif il faut que $A<0$ $AB-F^2<0$ et

$$ABC-CF^2-AD^2-BE^2+2DEF<0.$$

---

On peut parvenir au même résultat, en cherchant directement le min. de $Au$ par rapport à $x, y, z$ ne variant pas.

$$u=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy.$$

il faut que $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ $\frac{\partial u}{\partial y}=0$. pour le min.

$$2u=\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}\partial x}+\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\partial z.$$

donc $$\frac{\partial u}{\partial z}=Ex+Dy+Cz=\frac{u}{z}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cancel{2}(Ax+Ez+Fy)=0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cancel{2}(By+Dz+Fx)=0$$

Elt...

on trouvera — La même cond^on que précédemment.

52

École polytechnique.

Cours d'analyse.

N.° 7.

Lamarre.

Leçon du 28 janvier 1823.

je vais démontrer que toute Eqon entière par rapport à la variable x a une racine

pour cela je vais démontrer quatre théorèmes à l'aide desquels il me sera facile de le faire voir.

1er théorème. toute fon f(x) entière par rapport à x, qui pour une valeur $x = x_0$ s'évanouit ainsi que ses Dérivées jusqu'à celle de l'ordre n, est identiquement nulle. car cette fon a alors la forme

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots\ldots$$

si toutes les Dérivées sont nulles jusqu'à celle de l'ordre n qui est

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3 \ldots\ldots n.a.$$

toutes les autres Dérivées sont id. nulles ..

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

$$f^{(n+2)}(x) = 0 \ldots$$

d'après cela — on voit que

$$f(x_0 + h) = 0 + h^n f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

or qqe soit la fon elle est nulle. donc

$$f(x_0 + h) = 0$$

qqe soit h. ce qui démontre bien que f(x) est id. nul pour toutes les valeurs de x.

---

Corollaire 1. ce théorème s'étend à une fon entière de plusieurs variables

$$u = f(x, y, z \ldots).$$

c'à.d. si pour un système $x_0\ y_0\ z_0 \ldots$ cette fon ainsi que les Dérivées jusqu'à celle de l'ordre n sont nulles. elle sera identq. nul pour toutes les valeurs de x.

car si je remplace x par $x + ah$ y par $y + \beta h$ —

on a

$$f(x+\alpha h,\ y+\alpha k,\ \dots\ ) = F(\alpha).$$

je suppose que $\alpha$ soit seule variable. et que les valeurs de $\alpha$ réduisent cette fon à 0. qq. soit $x, y, z \dots h, k \dots$ on a supposé que $x_0\ y_0\ z_0 \dots$ réduisant $n$ et ces dérivées nulles... donc ~~$x_0+\alpha$~~ ~~$x_0+$~~ — $\alpha = 0$ réduiront à 0 — toutes les dérivées de $F(0)$ jusqu'à celles de l'ordre $n$ par hyp.se. on aura

$$F(0) = 0$$
$$F'(0) = 0$$
$$\vdots$$
$$F^{(n)} = 0.$$

mais si toutes ces dérivées sont nulles, toutes celles qui suivent le seront d'elles-mêmes

$$F^{(n+1)} = 0$$
$$F^{(n+2} = 0$$
$$\vdots$$

or $F(\alpha + h) = \theta_{n+1}\, \alpha^{n+1} F^{(n+1)}(\alpha + \theta h.)$.

mais si $\alpha = 0$. on a —

$$F(0 + h) = 0.$$

qq. soit $h$. donc on peut dire que $F(\alpha) = 0$. qq. soit $\alpha$. qq. soit $x, y, z \dots$ donc elle sera sera encore nulle quand $\alpha = 0$ et qu'elle devient.

$$f(x, y, z \dots).$$

---

~~Corollaire~~ II.e

le théorème est encore vrai; pour une fon. imag.re

$$S = \varphi(x, y, z \dots) + \chi(x, y, z \dots)\sqrt{-1}.$$

$S$ étant du reste entière, c.à.d, que ces coeffts soient des fons entières.

$S = u+v$. $u = \varphi(x,y,z\ldots)$ $\quad v = \chi(x,y,z\ldots)$.

pour que $S$ ainsi que ses Dérivées soient nulles il faut que l'on ait

$\partial u = 0$ $\quad \partial v = 0$

$\partial^2 u = 0$ $\quad \partial^2 v = 0$

$\vdots$ $\quad \vdots$

$\partial^n u = 0$ $\quad \partial^n v = 0$

ensuite les Dérivées $\partial^{n+1} S = \partial^{n+1} u + \partial^{n+1} v\sqrt{-1}$

$\vdots$

tout

soient identiq^t nulles.

or ces conditions ne peuvent avoir lieu qu'autant que $u$ et $v$ sont identiquement nuls ou que $S$ le soit. Donc &a...

2^d théorème.

Si dans une f^on entière $f(x)$. on remplace $x$ par $x+y\sqrt{-1}$. et ensuite $y$ par $x-y\sqrt{-1}$. --- on obtient 2 valeurs $f(x\pm y\sqrt{-1}) = \varphi(x,y) \pm \chi(x,y)\sqrt{-1}$.

dont le produit est

$$S = f(x+y\sqrt{-1})\,f(x-y\sqrt{-1}) = \{\varphi(x,y)\}^2 + (\chi(x,y))^2.$$

je vais démontrer que pour de très grandes valeurs de $x$, et $y$ on obtient de très grandes valeurs de $S$.

en effet

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots\ldots a_n.$$

remplaçant $x$ par $x+y\sqrt{-1}$. qu'on peut égaler à $r(\cos t + \sin t\sqrt{-1})$. $r$ étant différent de 0. on a

$$f(x+y\sqrt{-1}) = a_0 r^n(\cos nt + \sin nt\sqrt{-1}) + a_1 r^{n-1}(\cos(n-1)t + \sin(n-1)t\sqrt{-1})$$
$$+ a_2 r^{n-2}(\cos(n-2)t + \sin(n-2)t\sqrt{-1}) + \&a \text{---}$$

qu'on peut mettre sous la forme ——

$$f(x+y\sqrt{-1}) = (a_0 r^n \cos nt + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)t + \alpha_0 \cdots)$$
$$+ \{a_0 r^n \sin nt + a_1 r^{n-1} \sin(n-1)t + \cdots\}\sqrt{-1}$$

ce sera précisém$^t$. $f(x+y\sqrt{-1}) = \varphi(x,y) + \chi(x,y)\sqrt{-1}$

on obtiend$^t$ de même.

$$f(x-y\sqrt{-1}) = (a_0 r^n \cos nt \cdots \cdots)$$
$$- \{a_0 r^n \sin nt + \cdots\}\sqrt{-1}.$$

le produit. donnera

$$S = (a_0 r^n \cos nt + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)t + \cdots)^2 + (a_0 r^n \sin nt + \cdots)^2$$

ou bien

$$S = r^{2n} a_0^2 \left(\cos nt + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{\cos(n-1)t}{r} + \cdots\right)^2$$
$$+ r^{2n} a_0^2 \left(\sin nt + \frac{a_1}{a_0} \frac{\sin(n-1)}{r} t + \cdots\right)^2$$

or $x =$ dans ces Exp$^{ons}$ $\cos t$ et $y = \cos t$. donc $x^2+y^2=r^2$.
ainsi pour$^{que}$ $x$ et $y$ acquièrent des valeurs considérables. il suffit que $r$ soit très grand. mais dans cette hypothèse $\frac{1}{r}$ devient très petit et $S$ s'approche de devenir égal à $r^{2n} a_0^2$.

or dans $S = r^{2n} a_0^2$ $a_0$ étant constant. on voit que plus $r$ sera grand plus $S$ augmentera. donc &c.

Corollaire. $f(x)$ étant une f$^{on}$ entière $S$ qui se compose de la somme des quarrés de deux f$^{ons}$ $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ sera aussi une f$^{on}$ entière parrapp$^t$ à $x, y, z \cdots$ or si l'on donne à $x, y, z \cdots$ des valeurs finies, on obtient pour $S$ des valeurs finies ... si $x, y, z \cdots$ deviennent infinies. $S$ devient infini. de plus la f$^{on}$ est continue puisqu'elle est entière parrapport à toutes ces

variables. Donc il y aura un ou plusieurs minima de la fonction.

Cela peut se rendre sensible. en considérant les valeurs de $z$ comme les $z$ d'une surface qui reste constamment au dessus du plan des $xy$. puisque $z$ sera toujours positive. Que pour certaines valeurs finies de $x, y$. on obtient une valeur de $z$ finie et qui finit par avoir une valeur de $z$ infinie correspt. à des valeurs de $x, y$ infinies donc cette surface aura un max. ou min. ou plusieurs.

3e Théorème. cela posé. je vais démontrer que tous les minima de $S = \{\varphi(x,y)\}^2 + \{\chi(x,y)\}^2$. sont nuls.

$$S = f(x+y\sqrt{-1}) \times f(x-y\sqrt{-1}).$$

$$\partial S = f'(x+y\sqrt{-1}) \cdot f(x-y\sqrt{-1})(\partial x + \partial y\sqrt{-1}) + f'(x-y\sqrt{-1}) f(x+y\sqrt{-1})(\partial x - \partial y\sqrt{-1})$$

$$\partial^2 S = f''(x+y\sqrt{-1}) f(x-y\sqrt{-1})(\partial x + \partial y\sqrt{-1})^2 + 2 f'(x+y\sqrt{-1}) f'(x-y\sqrt{-1}) \times (\partial x + \partial y\sqrt{-1})(\partial x - \partial y\sqrt{-1}) + f''(x-y\sqrt{-1}) f(x+y\sqrt{-1}) \partial x - \partial y\sqrt{-1})^2.$$

$$\vdots$$

$$\partial^n S = f^{(n)}(x+y\sqrt{-1}) f(x-y\sqrt{-1})(\partial x + \partial y\sqrt{-1})^n + \frac{n}{1} f^{n-1}(\ldots\ldots)$$

si je fais.

$$f(x+y\sqrt{-1}) = R(\cos T + \sin T\sqrt{-1}).$$
$$f(x-y\sqrt{-1}) = R(\cos T - \sin T\sqrt{-1})$$ alors $S = R^2$.

$$\partial x \pm \partial y\sqrt{-1} = \rho(\cos\gamma \pm \sqrt{-1}\sin\gamma).$$

et par analogie....

$$f'(x \pm y\sqrt{-1}) = R_1(\cos T_1 \pm \sqrt{-1}\sin T_1).$$

$$f^{(n)}(x \pm y\sqrt{-1}) = R_n(\cos T_n \pm \sqrt{-1}\sin T_n).$$

on obtient en remplaçant. et en se rapp^t que pour des facteurs de cette forme il suffit de faire la somme des arcs.

$$\partial s = RR_1\rho\Big[\cos(-T+T_1+\lambda) + \sin(-T+T_1+\lambda)\sqrt{-1}$$
$$+ \cos(T_1-T-\lambda) + \sin(T_1-T-\lambda)\sqrt{-1}\Big]$$

or $\cos(T_1-T-\lambda) = \cos-(-T+T_1+\lambda) = \cos(-T+T_1+\lambda)$

et $\sin(T_1-T-\lambda) = -\sin(-T+T_1+\lambda)$.

les deux termes imag^res $\sin(\ldots)\sqrt{-1}$ se D^t. les 2 autres s'ajoutent et l'on a.

$$\partial s = 2RR_1\rho\,(\cos(T_1-T+\lambda).$$

on trouvera de même

$$\partial^2 s = 2RR_2\rho^2\cos(T_2-T+2\lambda) + 2R_1^2\rho^2$$

$$\partial^3 s = 2RR_3\rho^3\cos(T_3-T+3\lambda) + 2R_1R\cos(T_2-T+\lambda)$$
$$+ \ldots$$

or pour que $s$ puisse être un min. ou max. il faut que $\partial s = 0$. ~~[illegible]~~ soit $\partial x, \partial y \ldots$ par conséq^t. qq^e. soit $\rho$ et $\lambda$. qui servent à les Déterminer. or, comme l'on peut disposer de $\lambda$ on voit que $\partial s$ ne sera nul qu'autant qu'un des facteurs $R$ ou $R_1$ seront nuls.

Si $R=0$. le théorème est démontré puisque $S=R^2$.

Si $R_1=0$ alors on sait qu'il faut recourir à $\partial^2 s$ et voir quel est le signe de cette Exp^on. on sait qu'il doit être const^t positif pour que l'on ait un min. pour $s$ mais $2R_1^2\rho^2$ se détruit pour $R_1=0$. ~~mais~~ de plus le 1^r. terme pourrait changer de signe avec $\lambda$. donc il faut que $R_2=0$ ....

de même pour les autres. il faudt que $R_3 = 0$ ... ainsi de suite jusqu'à $R_n$ ... mais d'après le 1er théorème pour que ces Eqns fussent nulles ... S devrait nul. ce qui ne devrait vrai que si $f(x)$ était identiquement nul. Donc $R_1 = 0$ ne saurait être admis et il faut que $R = 0$. donc $S = 0$. pour les Divers minima.

---

Au moyen de ces théorèmes on peut démontrer le principe énoncé que toute Eqn $f(x) = 0$ entière par rapport à la variable $x$ a au moins une racine de la forme $x = (u + v\sqrt{-1})$. $u$ et $v$ étant des quantités réelles.

Si je remplace $x$ par $u + v\sqrt{-1}$ dans $f(x)$. on a

$$f(u + v\sqrt{-1}) = \varphi(u,v) + \chi(u,v)\sqrt{-1}.$$

Mais on sait que.

$$\{\varphi(u,v)\}^2 + \{\chi(u,v)\}^2 = 0 = S$$

pour des certaines valeurs des $u, v$. puisqu'on a prouvé qu'il existe toujours des minima de S et qu'ils sont nuls. mais pour que $S = 0$ il faut que

$$\varphi(u,v) = 0 \quad \chi(u,v) = 0. \quad \text{ou} \quad f(u + v\sqrt{-1}) = 0.$$

donc $f(x) = 0$ pour une valeur au moins de $x = u + v\sqrt{-1}$.

---

Leçon du 30 janvier 1823.

toute Eqon $f(x)=0$ (1) entière parrapport à la variable $x$ peut se décomposer en facteurs réels du 1er. ou du 2d. dégré.

Nous avons démontré qu'elle a au moins une racine de la forme $x = r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}$. mais si l'Eqon (1) a pour racine $x = u + v\sqrt{-1}$ elle aura pour racine $u - v\sqrt{-1}$. car alors on a

$$f(u - v\sqrt{-1}) = \varphi(u,v) - \chi(u,v).$$

et qu'on arrive aux mêmes condon. c'à d. que $f(u - v\sqrt{-1}) = f(u)=0$

$f(x)=0$ sera donc Divisible par deux facteurs de la forme.

$$(x - r\cos t - r\sin t\sqrt{-1}),\ (x - r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}).$$

dont le produit est

$$x^2 - 2r\cos t\, x + r^2$$

on aura donc

$$f(x) = (x^2 - 2r\cos t\, x + r^2)\, P.$$

$P$ est encore un polynome entier sur lequel on pourra raisr. comme précédt. donc &a...

---

## Développement des fonctions entières.

Soit $f(x)$ une fon entière on remplace $x$ par $x+h$. et l'on développe $f(x+h)$ suivant les puissances ascendantes de $h$. je suppose $f(x)$ du nme. dégré. si $f(x)$ est entière $f(x+h)$ le sera et

$$f(x+h) = P + Qh + Rh^2 + Sh^3 + \cdots\cdots Vh^n.$$

il faut trouver ces coeffts qui sont fonction de $x$. je Différentie les deux membres parrapport à $h$. on suppose que $h$ seul varie et que $x$ est considérée comme constante

$$df(x+h) = f'(x+h)\,dh = dh\{Q + 2Rh + 3Sh^2 \cdots\cdots nVh^{n-1}$$

$$f''(x+h)\,dh = dh\{1.2R + 1.2.3.Sh + \cdots\cdots (n-1)n.Vh^{n-2}$$

$$f^{(n)}(x+h) = 1.2.3\cdots n\,V.$$

il suffit de faire succes$^t$. dans chacune de ces expressions $h=0$. et l'on a —



$$P = f(x) \qquad \cdots \qquad P = f(x)$$

$$1.Q = f'(x) \qquad \text{d'où} \qquad Q = \frac{1}{1.\cancel{2}} f'(x)$$

$$1.2.R = f''(x) \qquad R = \frac{1}{1.2} f''(x)$$

$$\vdots \qquad S = \frac{1}{1.2.3} f'''(x)$$

$$1.2.3\cdots n.V = f^n(x) \qquad V = \frac{1}{1.2.3\cdots n} f^n(x).$$

remplaçant ces Exp$^{ons}$ par leurs valeurs. on a

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) \cdots \frac{h^n}{1.2.n} f^n(x)$$

<u>Corollaire</u>. on peut se proposer. de développer une f$^{on}$ entière $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de $x$.

il suffit de faire $x=0$ dans l'exp$^{on}$ ci-dessus. on a

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1} f'(0) + \frac{h^2}{1.2} f''(0) \cdots \frac{h^n}{1.2\cdots n} f^n(0).$$

Exp$^{on}$ qui a lieu qq$^e$ soit $h$. parcours$^t$. on peut dire que

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \cdots$$

---

on peut développer les fonctions entières de plusieurs variables suivant les accroissements de ces mêmes variables.

si $u = f(x, y, z \ldots)$. on veut trouver le Développ$^t$ de $f(x+\alpha h, y+\alpha k; z+\alpha l \ldots)$. suivant les puissances ascendantes de $\alpha$. le Développ$^t$ sera une f$^{on}$ entière de $\alpha$. $F(\alpha)$ par ex.

Mais on sait que $F(\alpha)$ développé suivant les puissances de $\alpha$. est

$$F(\alpha) = F(0) + \frac{\alpha}{1} F'(0) + \cdots \frac{\alpha^n}{1.2.3\cdots n} F^{(n)}(0).$$

Si $u$ est du degré $n$. car alors $F(\alpha)$ sera du même degré.

Exemp.t $F(0)$ $F'(0)$ &c.. par leurs valeurs .. on a —

$$F(\alpha) = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2u + \frac{\alpha^3}{1.2.3} d^3u \ldots \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} d^n u.$$

$u, du \ldots$ sont f.ons de $x, y, z$ .. et des constantes $h, k .. l$..
on a bien ainsi le D.t de cette suivant les puissances ascend.tes de l'accroiss.t des variables. —

appl.on à la formule du Binome. on veut développer $(x+h)^n$.

$f(x)^n$ égale dans cet exemple $x^n$. on aura donc —

$f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ ..... donc

$$(x+h)^n = x^n + \frac{h}{1} nx^{n-1} + \frac{h}{1.2} n.(n-1)x^{n-2} \ldots$$

---

Si l'on faisait croître $x$ de $\alpha h$. $h$ rep.t la D.lle de $x$ dans $f(x)$.
on aurait d'après ce qu'on a vu précédemment —

$$f(x+\alpha h) = f(x) + \frac{\alpha}{1} h.f'(x) + \frac{\alpha^2}{1.2} h^2 f''(x) \ldots$$

mais $hf'(x) = f'(x)\,dx = d.f(x)$.

$h^2 f''(x) = f''(x)\,dx^2 = d^2 f(x)$

.....

on aura donc

$$f(x+\alpha h) = f(x) + \frac{\alpha}{1} d.f(x) + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 f(x) + \ldots \frac{1}{1.2.3\ldots n} d^n f(x)$$

que l'on peut déduire comme comme cas particulier du D.t de $u$ quand il est f.on de plusieurs variables $x, y, z$

---

autre app.on trouver la vraie valeur de la fraction —

$$\frac{f(x)}{F(x)}.$$

quand ces 2 termes se réduisent à 0 pour une valeur $x=$

puisque $f(x_0)=0$ et $F(x_0)=0$. on aura

$$f(x_0+\alpha h) = \alpha h\,(f'(x_0)+\mu)$$
$$F(x_0+\alpha h) = \alpha h\,(F'(x_0)+\gamma).$$

$\mu$ et $\gamma$ étant des termes qui doivent s'évanouir avec $\alpha$.

On aura donc

$$\frac{f'(x_0)+\mu)}{F'(x_0)+\gamma} = \frac{f(x_0+\alpha h)}{F(x_0+\alpha h)}.$$

$f^t.\ \alpha=0$. on a $\dfrac{f'(x_0)}{F'(x_0)}$. pour la vraie valeur de la fraction. si ces deux termes s'évanouissaient encore pour la même valeur, il faudrait subs.r à cette f.on

$$\frac{f''(x_0)}{F''(x_0)}.$$

et ainsi-de suite .....

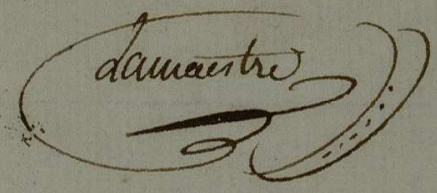
—. si l'on a $\dfrac{(x-a)^n P}{Q}$. il faudrait lui substituer les D.vées de l'ordre $n$ des deux termes

$$\frac{1.2.3\ldots n.\ P}{Q^{(n)}}.$$

École polytechnique

Cours d'analyse. 61

N° 8.



une fraction est rationnelle quand les deux termes sont des fonctions entières.

Si $f(x)$ $F(x) = k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$.
tous deux fonctions de cette nature. $\frac{f(x)}{F(x)}$ sera une fon rationnelles.

<u>Théorème.</u> Décomposer $\frac{f(x)}{F(x)}$ en une suite de fons ayant pour Dr les divers facteurs $(x-x_0), (x-x_1)$ ... &a.

$x_0$ étant racine de $F(x)$, on a $F(x) = (x-x_0)\varphi(x)$. — nous allons voir s'il est possible de la décomposer en une suite de fons — ayant cette forme.

on voit $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = A_0$. ....

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A_0 = \frac{f(x) - A\varphi(x)}{\varphi(x)}.$$

l'évanouira pour $x = x_0$ donc le nr sera divisible par $x-x_0$ — soit $X(x)$ le quotient. on a —

$$f(x) = \underline{A_0\varphi(x) + (x-x_0)X(x)}$$

$$F(x) = (x-x_0)\varphi(x).$$

donc $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{X(x)}{\varphi(x)}$.

or $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots x-x_{n-1}$. $X(x)$ a un nbre entier donc on pourra décomposer $\frac{X(x)}{\varphi(x)}$ en une autre fon $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{X'(x)}{\varphi'(x)}$

$\varphi'(x) = (x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})$.
raisonnt. sur $\frac{X'(x)}{\varphi'(x)}$ comme sur les fractions précédentes on arrivera qq. fois à un terme R que nous allons trouver ~~not~~ une constante ou fon de x suivant que le dégré de $f(x)$ que je suppose être m est égal au dégré n de $F(x)$. ou que $m < n$ ou bien $m > n$.

Ainsi $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-x_0)} + \frac{A_1}{(x-x_1)} + \cdots \frac{A_{n-1}}{x-x_{n-1}} + R$. (1)

remplaçant $F(x)$ par sa valeur et exécutant les opérations il vient

$$\frac{f(x)}{K} = A_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}) + A_1(x-x_0)(x-x_2)\dots) + R(x-x_0)(x-x_1)\dots$$

or les termes en $A_0$ $A_1$ ..... $X^{ce}$ jusqu'à $R$. sont d'un degré $n-1$. et $f(x)$. et $R(x-x_0)$ ... sont du dégré $m$ et $n$. donc $R$ est le quotient algébrique, de $\frac{f(x)}{F(x)}$. or si $m<n$. $R$ sera donc nul; si $m=n$. $R$ sera constant. si $m>n$. $R$ doit être $f^{on}$ de $x$. pour que le 2d. membre puisse être égal au 2d.

Ainsi il est reconnu qu'on peut mettre une $f^{on}$ sous la forme (1) voyons s'il existe un moyen de trouver les numérateurs de ces fractions $A_0$ $A_1$ $A_0$ ... et si ce moyen n'exige pas un certain ordre dans leur recherche. c.à.d au lieu de commencer par $A_0$ on peut commencer par tout autre terme $A_2$ ...

pour cela je suppose qu'on ait obtenu cette forme (1) par un moyen qq^e. on peut l'écrire

$$f(x) = A_0\varphi(x) + (x-x_0)\varphi(x)\left\{\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + R\right.$$

Exp^on qui doit avoir lieu qq^e. soit $x$. si je fais $x=x_0$ on a

$$f(x_0) = A_0\varphi(x_0). \quad \text{donc } A_0 = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}.$$

qq^e. soit le moyen qu'on ait employé. On voit qu'on aurait pu obtenir avant $A_1$ ou $A_2$. en regardant $\varphi(x)$ comme le produit de $(x-x_0)(x-2)$ ..... c.à.d de tous les facteurs excepté celui qui doit être le D^r. de la $f^{on}$ dont on cherche le N^r. ainsi l'ordre de la recherche de $A_0$ $A_1$ ... est indiff^t.

pour avoir le moyen direct de les obtenir on observe que

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x-x_0)f(x)}{F(x)}.$$

fon qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x = x_0$. on sait qu'alors il faut recourir à

$$\frac{f(x)}{F'(x)} \cdot (2)$$

et y faire $x = x_0$. ainsi $A_0 = \frac{f(x_0)}{F'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$.

on aurait par la même raison $A_1$ en faisant $x = x_1$ dans (2).

.....

R l'obtient en faisant la Dn algébrique.

Cette règle que nous avons établie tant que les racines sont inégales subsiste encore pour les racines imaginaires. soit $x = \alpha + \mu\sqrt{-1}$ $x = \alpha - \mu\sqrt{-1}$. on trouvera de même

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{x - \alpha - \mu\sqrt{-1}} + \frac{A_1}{x - \alpha + \mu\sqrt{-1}} + \frac{A_2}{(x-a)} + \cdots$$

ces valeurs ayant été trouvées, comme précédemment.

$$A_0 = \frac{f(\alpha + \mu\sqrt{-1})}{F'(\alpha + \mu\sqrt{-1})}, \quad A_1 = \frac{f(\alpha - \mu\sqrt{-1})}{F(\alpha - \mu\sqrt{-1})},$$

qu'on peut écrire

$$A_0 = A + B\sqrt{-1}$$
$$A_1 = A - B\sqrt{-1}$$

faisant la somme de ces 2 facteurs on voit qu'on peut toujours les remplacer par un facteur ayant pour Dr un facteur réel du 2d. degré.

$$\frac{2fA(x-\alpha) + 2B\mu}{(x-\alpha)^2 + \mu^2}.$$

---

Examinons le cas où le Dr $F(x)$ contient des racines égales,

soit $F(x) = (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^r \cdots$

$F(x) = (x-a)^p \varphi(x)$. $\varphi(x) = (x-b)^q (x-c)^r \cdots$

on peut poser $\frac{f(a)}{\varphi(a)} = A_0$. $\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A = \frac{f(x) - A\varphi(x)}{\varphi(x)}$.

est divisible par $x - a$.

soit $\chi(x)$ le quotient on a —

$$f(x) = A_0 \varphi(x) + (x-a)\chi(x)$$

mais $\Psi(x) = (x-a)^\nu \varphi(x)$. divisant on obtient

$$\frac{f(x)}{\Psi(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^\nu} + \frac{\chi(x)}{(x-a)^{\nu-1}\varphi(x)}$$

posant $\frac{\chi(a)}{\varphi(a)} = A_1$. ....

$$\chi(x) = A_1 \varphi(x) + (x-a)\chi'(x)$$

mais $(x-a)^{\nu-1}\varphi(x) = (x-a)^{\nu-2}\cdot(x-a)\varphi(x)$.

divisant on a

$$\frac{\chi(x)}{(x-a)^{\nu-1}\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\nu-1}} + \frac{\chi'(x)}{(x-a)^{\nu-2}\varphi(x)}$$

En continuant ainsi on arriverait à $\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$. ainsi on a —

$$\frac{f(x)}{\Psi(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^\nu} + \frac{A_1}{(x-a)^{\nu-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\nu-2}} + \cdots \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}.$$

on trouverait de même de la même manière

$$\frac{\chi(x)}{\varphi(x)} = \frac{B_0}{(x-b)^q} + \frac{B_1}{(x-b)^{q-1}} \cdots\cdots \frac{\chi'(x)}{\varphi'(x)}.$$

ici $\varphi'(x) = (x-c)^r(x-d)$ ----

de même.

$$\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{C_0}{(x-c)^r} + \frac{C_1}{(x-c)^{r-1}} + \cdots\cdots R.$$

donc remplaçant.

$$\frac{f(x)}{\Psi(x)} = \begin{cases} \frac{A_0}{(x-a)^\nu} + \frac{A_1}{(x-a)^{\nu-1}} + \cdots & \frac{A_{\nu-1}}{x-a}. \\ \frac{B_0}{(x-b)^q} + \cdots & \frac{B_{q-1}}{(x-b)^{q-1}} \\ \frac{C_0}{(x-c)^r} + & \frac{C_{r-1}}{(x-c)} + B \end{cases}$$

ici R encore le quotient entier de la fonction

$$f(x) = \chi^{(x)}(x) + R\Psi(x).$$

en que $\chi^{(x)}(x)$ est d'un degré moindre que $\Psi(x)$. —

je vais faire voir la méthode que l'on doit employer pour déterminer $A_0\ A_1\ A_2 \cdots\ B_0,\ B_1, B_2 \cdots$ et par suite qu'il est indifférent de commencer par la détermination du 1er système ou de celui d'un ordre qq^e.

je suppose qu'on ait obtenu la forme ci-dessus par un moyen qq^e. on peut l'écrire

$$(1)\ f(x) = F(x)\left\{\frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A_1}{(x-a)^{p-1}} + \cdots \frac{A_{p-1}}{(x-a)}\right\} + QF(x)$$

$QF(x)$ ne deviendra jamais nulle pour $x=a$. $Q$ est d'ailleurs propre à donner les fractions qui auraient pour D^teurs les fractions $(x-b)\cdots(x-c)\cdots$

je remplace $x$ par $a+z$.

$$f(x) = f(a+z) = f(a) + zf'(a) + \frac{z^2}{1\cdot 2}f''(a) \cdots \frac{z^{p-1}}{1\cdot 2\cdots p-1}f^{p-1}(a) + \frac{z^p}{1\cdots p}f^p(a) + \alpha a$$

or $F(x) = (x-a)^p\varphi(x)$. ou $F(x) = z^p\varphi(a+z)$. d'après cette Eq^on on voit que l'Eq^on en $z$ a $p$ racines nulles donc puisque $F(x)$ a $p$ racines égales à $0$ toutes ses dérivées jusqu'à celles de l'ordre $p$ s'évanouiront et

~~on devrait faire dans le résultat $x=a$, on fait aup^t $x=a$ dans l'Eq^on (1), et l'on a ainsi pour $F(x)$ une Eq^on qui a $p$ racines nulles qui par conséquent donne $p$ dérivées nulles.....~~

$$F(x) = \frac{z^p}{1\cdot 2\cdots p}f^{(p)}a + \frac{z^{p+1}}{1\cdot 2\cdots p+1}f^{(p+1)}(a) + \cdots$$

remplaçant $F(x)$ et $f(x)$ par leurs valeurs dans (1) on a

$$f(a) + zf'(a) + \frac{z^2}{1\cdot 2}f''(a) \cdots \frac{z^{p+1}}{1\cdot 2\cdots p+1}f^{(p+1)}a + \cdots$$

$$= \left\{\frac{F^{(p)}a}{1\cdot 2\cdots p} + \frac{zF^{(p+1)}a}{1\cdot 2\cdots p+1}\right\}(A_0 + A_1 z + A_2 z^2 \cdots A_{p-1}z^{p-1}$$

$$+ z^p z.$$

($z^p z$ est ce que devient $QF(x)$ quand on y remplace $x$ par $a+z$. $F(x)$ contiendra $z^p$. ainsi le terme sera divisible par $z^p$. $z$ désigne la somme de tous les facteurs qui seront f^ons de $z$.

Cette identité doit avoir qq^e. soit 2. identifiant donc terme à terme, on a.

$$f(a) = \frac{F^{(p)}a}{1.2\cdots p} A_0.$$

$$f'(a) = \frac{F^{(p)}a}{1.2\cdots p} A_1 + \frac{F^{(p+1)}a}{1.2\cdots p+1} A_0.$$

⋮

on pourra donc déterminer ainsi $A_0, A_1 \cdots$

mais on aurait pu commencer par déterminer $B_0, B_1 \cdots$ en remplaçant $x$ par $b+2$. et l'on aurait trouvé

$$f(b) = \frac{F^{(q)}b}{1.2\cdots q} B_0$$

$$f'(b) = \frac{F^{(p)}a}{1.2\cdots p} B_1 + \frac{F^{(q+1)}b}{1.2\cdots q+1} B_0.$$

⋮

on voit donc qu'on peut déterminer les num^rs de tous ces fractions. qq^e. soit l'ordre de leur Détermination.

---

Calcul intégral.

Leçon du 4 février.

Soit $f(x)$ une fonction que je suppose continue entre $x_0$ et $X$ qui sont deux valeurs de $x$ correspondantes à la fon égalée à 0. j'insère entre $x_0$ et $X$. un très grand nombre de valeurs $x_1$ $x_2$ ..... c.à.d. qu'on décompose en divers éléments la diff^ce $X - x_0$ et qu'on ajoute ces divers éléments à $x_0 \cdots$ on a

$$x_0 \; x_1 \; x_2 \cdots\cdots x_{n-1} \; X.$$

qui vont en augmentant ou en diminuant const^t. ainsi

$$X - x_0 = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots\cdots (X - x_{n-1}).$$

$(x_1 - x_0).(x_2 - x_1) \cdots$ sont appellés éléments de la d^ce $X - x_0$ — $x_0$ est l'origine de l'élément $(x_1 - x_0)$ — $x_1$ celle de $(x_2 - x_1)$ &a .....

Si je multiplie chacun de ces Eléments par la valeur de la fonction dans laquelle on a remplacé $x$ par l'origine de l'Elément que l'on considère on a

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}).$$

S dépend ici non seulement de $x_0$ et $x$ et de la forme de $f(x)$. mais encore des valeurs intermédiaires $x_1\ x_2\ x_3 \cdots x_{n-1}$ cela posé: je dis que le nombre des Eléments devenant très considérable, alors les Eléments devenant très petits, et que ces deux manières de composer S par des valeurs toujours comprises entre $x_0$ et $x$ ne changeront pas sensiblement la valeur..

I (nous admettrons le théorème suivant qui se trouve dans le cours d'analyse et dont voici l'énoncé.).

Si l'on a une suite de termes $a, a', a'' \cdots$ qu'on les multiplie par $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$ de même signe.

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \cdots = (\alpha + \alpha' + \alpha'' \cdots) M(a + a' + a'' \cdots)$$

$M(a + a' + a'' \cdots)$ indiquant la moyenne entre ces quantités $\cdots$ ]

D'après cela.

S égale la somme de tous ces Eléments que nous avons dit être de même signe multiplié par la moyenne entre $f(x_0), f(x_1) \cdots f(x_{n-1})$ que nous allons déterminer. or $f(x)$ étant continue entre $x_0$ et $x_0$ Dans le cas même où $f(x_0)$ et $f(x)$. seraient les valeurs plus grande et plus petite de la fonction pour les diverses valeurs $x_0\ x_1\ x_2 \cdots x_{n-1}\ x$. la moyenne entre toutes ces Expressions sera comprise entre ces deux fonc et pourra être mise sous la forme

$$f(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

$\theta > 0 < 1$.

ainsi

$$S = (X - x_0) f(x_0 + \theta (X - x_0)).$$

$S$ a une valeur finie car les deux $X - x_0$ . $f(x_0 + \theta(X - x_0))$ sont des quantités finies . et cela peut facilement se concevoir car dans la valeur des ci-dessus, le nombre des Eléments étant infiniment grand, ces Eléments sont infiniment petits ce qui peut établir, comme cela une compensation et donne un résultat fini.

Voyons si comme nous l'avons énoncé, en changeant le mode de Division pour les Eléments que je suppose toujours très petits, on n'obtient pas de différence sensible entre les deux valeurs de $S$. et pour cela je supposerai qu'on ait calculé $S$. et qu'on veuille passer à une autre valeur de $S$ — en sous-divisant chacun des Eléments de la 1ère Valeur de $S$.

d'abord si tous les Eléments de la 2de se réduisent à un seul. on aura —

$$S = (X - x_0) f(x_0).$$

On a déjà trouvé

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) \text{ ---- } + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}).$$

ou $S = (X - x_0) f(x_0 + \theta (X - x_0))$.

Donc pour passer du 1er système au 2d. en le subdivisant la 2de il faut remplacer $x_0$ par $x_0 + \theta (X - x_0)$.

si je subdivise de nouveau tous les Eléments de la 2de valeur de $S$. le 1er terme $(x_1 - x_0) f(x_0)$ se changera en —

$$(x_1 - x_0) f(x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0))$$

le 2d. $(x_2 - x_1) f(x_1)$ en $(x_2 - x_1) f(x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1))$

ainsi de suite des autres

$(x - x_{n-1}) f(x_{n-1})$ se changera en $(x - x_{n-1}) f(x_{n-1} + \theta_{n-1}(x - x_{n-1}))$

et l'on a — dans ce mode de Sous-Divisions

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + \theta_0 (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \theta_1 (x_2 - x_1)$$
$$+ \&^a \text{---}$$

mais puisque la fonction continue entre $x_0$ et $x$. on peut dire que —

$$f(x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)) = f(x_0) \pm \varepsilon_0$$
$$f(x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)) = f(x_1) \pm \varepsilon_1$$
$$\vdots$$
$$f(x_{n-1} + \theta_{n-1}(x - x_{n-1}) = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}.$$

$\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{n-1}$ étant supposés des quantités finies. on peut donc — écrire $S$ de la manière suivante.

$$S = \begin{array}{l|l|l} (x_1 - x_0) f(x_0) & + (x_2 - x_1) f(x_1) & \ldots (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \\ \pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0) & \pm \varepsilon_1 (x_2 - x_1 & + \varepsilon_{n-1} (x - x_{n-1}) \end{array}$$

la 1ère ligne de la valeur de $S$ est la même que celle de $S$ trouvé dans le 1er mode des Sous-divisions. la Diff$^{ce}$ de ces deux valeurs de $S$ ne dépend donc que de la 2de ligne qu'on peut écrire d'après le Théorème énoncé plus haut.

$$(x - x_0) M (\pm \varepsilon_0 \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \ldots \pm \varepsilon_{n-1}).$$

ou $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots$ étant des quantités très peu différentes de 0. la moyenne entre ces Exp$^{ons}$ différera très peu de 0. donc la Diff$^{ce}$ sera sensiblement nulle. entre les deux valeurs de $S$ ~~obtenues~~ obtenues dans ces deux modes.

je dis que si l'on prend un mode qq^e de Divisions infiniment petites les valeurs de S seront encore sensiblement égales. en effet je prends un 3^e mode tel que les divisions du 1^r et du 2^d mode soient des sous-divisions de celles du 3^ème par ce moyen le 1^r et le 3^e par ce que j'ai démontré différeront très peu.... le 2^d et le 3^e de même. or de ce que deux Exp^ons sont sensiblement égales à une 3^e elles sont égales entre elles. ainsi qq^e soit le mode de Divisions qu'on emploie, on pourra toujours deux autres systèmes de Divisions qui donneront des valeurs de S sensiblement égales, donc la valeur S donnée par le mode qq^e de Divisions sera sensiblement égale à chacune des valeurs données par les modes précédents..... donc S converge vers une limite fixe, et c'est cette limite que l'on nomme intégrale Définie.

Notations. on représente la valeur de S ci-dessus ainsi

$$S = \Sigma f(x)\,\Delta x.$$

et limite $S = \int f(x)\,dx.$ $\begin{cases} x = x_0 \\ x = X \end{cases}$

on indique ainsi que l'intégrale est définie entre les limites $x_0$ et $X$.

Ou bien ainsi $\lim. S = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$

en mettant en bas la plus petite des deux valeurs de $x$. d'après ce qu'on a vu l'intégrale sera Equivalente à un produit de la forme ci-dessus.

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X-x_0)\, f(x_0+\theta(X-x_0)).$$

on peut conclure delà ce théorème.

une intégrale est égale à la différence des deux valeurs limites $x_0$ et $X$. multiplié par

— si l'on changeait l'ordre des accroissem^ts c'a.d si l'on avait $x_0-X$. les mêmes raisonnements s'appliq^t à ce cas. et l'on aurait la même valeur pour la limite mais avec un signe contraire donc

$$\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

— si l'on prend une valeur intermédiaire $\Sigma$ entre $x_0$ et $X$. et que l'on considère $X-x_0$ comme $\Sigma-x_0$ et $X-\Sigma$ on aura en partageant ~~deux sommes~~ chacune de ces différences en Eléments très petits et en pass^t aux limites deux sommes qui seront égales à la limite de somme totale provenant de $X-x_0$. donc

$$\int_{x_0}^{\Sigma} f(x)\,dx + \int_{\Sigma}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

— si l'on suppose que $fx = \varphi(x) \pm \chi(x)$.
on aura

$$S = (x_1-x_0)\,\varphi(x) + (x_2-x_1)\,\varphi(x) + \cdots$$
$$\pm (x_1-x_0)\,\chi(x) + (x_2-x_1)\,\chi(x) + \cdots$$

donc en passant aux limites.

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx \pm \int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \big(\varphi(x) \pm \chi(x)\big)\,dx.$$

Si $f(x) = a\varphi(x)$ on voit que $f(x_0) = a\varphi(x_0)$ — $f'(x_1) = a\varphi'(x_0)$ — $f''(\ldots)$ — —

Donc tous les termes de S contiendront $a$. et

$$\int_{x_0}^{X} a\,\varphi(x)\,dx = a\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

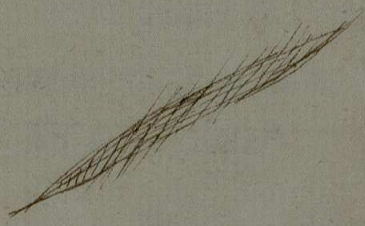
Donc s'il y a une constante on voit qu'elle multiplie l'intégrale trouvé indépt de ce facteur.

Ecole Polytechnique.

Cours d'analyse.



N°. 9.



an 1823.

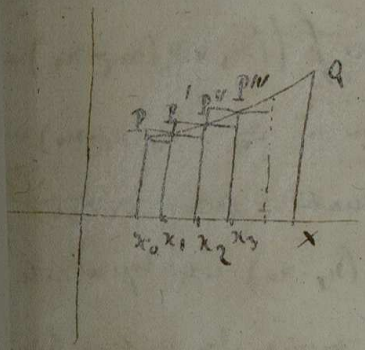
Leçon du 5 février

# Suite du calcul intégral.

On a démontré précédt que la limite de $S$ quand les accroissements sont infiniment petits représentait l'intégrale de $f(x)$ continue entre $x_0$ et $X$. La valeur de $S$ étant

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \cdots (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

En géométrie, l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ $f(x)$ étant représentée par la courbe (1) est égale à l'aire $x_0 P Q X$ de la courbe. (on entend par aire d'une courbe l'espace compris entre les 2 ordonnées limites l'axe des $x$ et la portion de courbe $PQ$ comprise entre les deux extrémités des ordonnées limites $x_0 P$, $X Q$.)




En effet si l'on partage $x_0 X$ en éléments $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$ ---- $X - x_{n-1}$ égaux précédts. on a $S$ est égale à la somme des rectangles $x_1 P$. $x_2 P'$, $x_3 P''$ ... ou on sait que

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)) + (x_2 - x_1) f(x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)) + \cdots$$

et si $\theta = 1$. on a

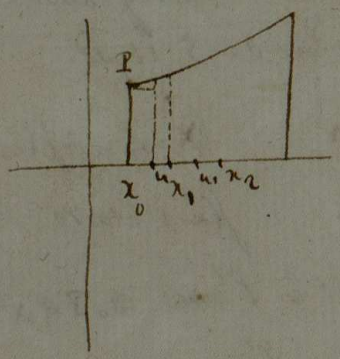
$$S = (x_1 - x_0) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_2) + \cdots (X - x_{n-1}) f(X)$$

dont la limite représente aussi l'intégrale de la $f(x)$. mais cette 2de valeur de $S$ est égale à la somme des rectangles $x_0 P' + x_1 P'' + x_2 P''' + \&^{a}$ ---

On voit donc que l'aire de la courbe est comprise entre ces deux sommes, donc à la limite elle sera représentée par l'intégrale de la fon de la courbe

entre les limites $x_0$ et $X$.

De même, que l'on a considéré les deux valeurs de $S$ ci-dessus, comme la somme de rectangles qui comprennent l'aire de la courbe. On peut aussi considérer comme une somme de rectangles




$$S=(x_1-x_0)f(x_0+\theta_0(x_1-x_0))+x_2-x_1 f((x_1+\theta_1(x_2-x_1)+\ldots$$

car on peut concevoir qu'en donnant une valeur à $\theta_0$ $\theta_0(x_1-x_0)$ soit égal à $x_0 u$. n'étant le point convenable pris entre $x_0$ et $x_1$. le 1er terme $(x_1-x_0)f(x_0+\theta_0(x_1-x_0)$ est représenté par le rectangle $uP$. il en serait de même des autres termes de $S$. donc $S$ égale une somme de rectangles qui à la limite deviendra égale à $\int^X f(x)dx$. puisque l'on a démontré direct^t que $S$ à la limite avait pour valeur cette intégrale.

et alors $S=(X-x_0)f(x_0+\theta(X-x_0)$.

représente un rectangle moyen entre tous les rectangles $uP$. $u'P'$ &c.... —

on a démontré que si l'on prend un nombre $\xi$ intermédiaire entre les deux limites $x_0$ et $X$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx=\int_{x_0}^{\xi} f(x)dx+\int_{\xi}^{X} f(x)dx.$$

je vais étendre cette règle au cas où $\xi$ n'est pas compris entre les limites $x_0$ et $X$. soient $\xi$, $x_0$, $X$ 3 nombres par ordre de grandeur. d'après ce qu'on a vu. on aura pour $x_0$.

$$\int_{\xi}^{X} f(u)\,du = \int_{\xi}^{x_0} f(u)\,du + \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

d'où $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{\xi}^{X} f(u)\,du - \int_{\xi}^{x_0} f(x)\,dx.$$

mais on sait que $$-\int_{\xi}^{x_0} f(u)\,du = +\int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx.$$

donc $$\int_{x_0}^{X} f(u)\,du = \int_{\xi}^{X} f(u)\,du + \int_{x_0}^{\xi} f(u)\,du.$$

C. Q. F. D.

On peut conclure delà que si l'on a $n$ nombres $\xi\ \xi'\ \xi''\ \ldots$ compris entre $x_0$ et $X$. on aura

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{\xi'} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\xi_{n-1}}^{X} f(x)\,dx.$$

c'à.d que l'intégrale est égale à la somme de toutes les intégrales correspondantes à $\xi\ \xi'\ \ldots$ nombre compris entre $x_0$ et $X$.

---

je suppose que $f(x)$ puisse se décomposer en deux facteurs ~~de la forme~~ $v$ dont l'un $v$ conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de $x$ entre les limites $x_0$ et $X$ l'intégrale de cette fonction pourra se mettre sous une forme que nous allons indiquer.

$u, v$ restent continus entre les limites $x_0$ et $X$.

soit $f(x) = uv$. $u = \varphi(x)$. qui peut changer de signe pour les diverses valeurs de $x$. ...

$$f(x_0) = v_0\,\varphi(x_0).$$
$$f(x_1) = v_1\,\varphi(x_1)$$
$$\vdots$$

on trouvera que

$$S = (x_1 - x_0)\, v_0 \varphi(x_0) + (x_2 - x_1)\, v_1 \varphi(x_1) + \ldots (X - x_{n-1})\, v_{n-1} \varphi(x_{n-1})$$

Les $2^{n-1}$ facteurs conserveront donc toujours le même signe pour toutes les valeurs entre $x_0$ et $X$. on aura donc

$$S = \{(x_1 - x_0) v_0 + (x_2 - x_1) v_1 + \ldots (X - x_{n-1}) v_{n-1}\} \text{ fois } (\varphi(x_0), \varphi(x_1), f(x_2) \ldots f(x_{n-1}).$$

or cette moyenne peut être représentée par une exp$^{on}$ de cette forme $\varphi(x_0 + \theta(X - x_0))$. donc

$$S = \{(x_1 - x_0) v_0 + (x_2 - x_1) v_1 \ldots\} \left(\varphi(x_0 + \theta(X - x_0)\right)$$

passant à la limite. on a

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = \varphi(x_0 + \theta(X - x_0) \int_{x_0}^{X} v\, dx.$$

forme que peut affecter l'intégrale de $f(x)$ dans cette hypothèse.

— quand $v = 1$. $\int_{x_0}^{X} dx = X - x_0$. et par suite

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\, dx = (X - x_0)\, \varphi(x_0 + \theta(X - x_0))$$

si $\varphi(x) = a$. on a

$$\int_{x_0}^{X} a\, dx = a\,(X - x_0).$$

Exp$^{on}$ qu'on avait déjà trouvée précédemment.

— Dans certains cas pour déterminer l'intégrale d'une fonction il est plus simple de faire trois éléments égaux entre eux et de une quantité $\lambda$.

Soit $f(x) = x$. si l'on partage la Différence $x - x_0$ en $n$ éléments égaux entre eux et à $\alpha$ - mais

$$S = \alpha\left(x_0 + (x_0+\alpha) + (x_0+2\alpha) \cdots x_0 + \overline{(n-1)}\alpha\right) =$$

$$= \alpha\left(nx_0 + (1+2+3\cdots \overline{n-1}\alpha)\right) = \alpha\left(nx_0 + \alpha\left(\frac{n.n-1}{2}\right)\right)$$

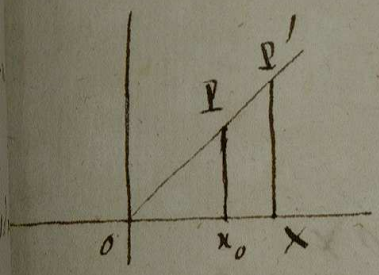
~~[illegible]~~ mais $n\alpha = x - x_0$.

donc $$S = (x-x_0).\left(x_0 + \frac{x-x_0-\alpha}{2}\right).$$

Donc à la limite.

$$\int_{x_0}^{x} x\,dx = (x-x_0)\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \frac{x^2-x_0^2}{2}.$$

ou si $f(x) = x$. on a la courbe $y = x$ qui est ici la droite DI. donc une intégrale exprime la surface du trapèze $x_0$ DI $x$.




si $x_0 = 0$. on a

$$\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

qui exprimerait la surface $0$ DI $x$.

—. Connt. les intégrales $\int_0^x$ et $\int_0^{x_0}$ de $x\,dx$ si l'on voulait trouver $\int_{x_0}^{x} x\,dx$. on remarquant que

$$\int_{x_0}^{x} x\,dx = \int_0^x x\,dx - \int_0^{x_0} x\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}.$$

donc $x\omega$....

—. je suppose qu'on veuille trouver l'aire de la courbe $y = e^x$ qu'on appelle Logarithmique, entre les limites $x_0$ et $x$.

si l'on divise $X - x_0$ en $n$ éléments égaux entre eux et à $\alpha$.

on a

$$S = \alpha\left(e^{x_0} + e^{x_0+\alpha} + e^{x_0+2\alpha} \cdots e^{x_0+\overline{n-1}\alpha}\right).$$

$$S = e^{x_0}\alpha\left(1 + e^{\alpha} + e^{2\alpha} \cdots e^{\overline{n-1}\alpha}\right) = e^{x_0}\alpha\left(\frac{e^{n\alpha}-1}{e^{\alpha}-1}\right).$$

$$S = e^{x_0}\left(e^{X-x_0}-1\right)\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}.$$

or à la limite. on aura puisque $\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}$ converge vers 1.

$$\int_{x_0}^{X} e^{x}dx = e^{X} - e^{x_0}.$$

---

si $x_0 = 0$ on a

$$\int_0^X e^{x}dx = e^{X} - 1.$$

on peut en déduire l'autre intégrale $\int_{x_0}^{X}$ car

$$\int_{x_0}^{X} e^{x}dx = \int_0^X e^{x}dx - \int_0^{x_0} e^{x}dx = (e^{X}-1) - (e^{x_0}-1) = e^{X} - e^{x_0}$$

---

Soit proposé de trouver l'intégrale de $f(x) = x^{a}$.

a désignant une quantité qq^e.

il faut diviser ici $X - x_0$ en éléments qui croissent en progon géométrique dont la raison est $e^{\alpha}$. on a

$$x_1 = x_0 e^{\alpha};\quad x_2 = x_0 e^{2\alpha};\quad x_3 = x_0 e^{3\alpha};\ \cdots\ x_{n-1} = x_0 e^{n-1\alpha}$$

on aura

$$S = x_0(e^{\alpha}-1)f(x_0) + x_0 e^{\alpha}(e^{\alpha}-1)f(x_0 e^{\alpha}) + \cdots$$

$$S = x_0(e^{\alpha}-1)\left\{f(x_0) + e^{\alpha}f(x_0 e^{\alpha}) + e^{2\alpha}f(x_0 e^{2\alpha}) + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots\ e^{n-1}f(x_0 e^{(n-1)\alpha}\right\}.$$

dans cette hypothèse ou $f(x) = x^a$.

$$e^{m\alpha} f(x_0 e^{m\alpha}) = e^{m\alpha} x_0^a e^{ma\alpha} =$$

$$= x_0^a e^{m(a+1)\alpha}.$$

est ce que devient un terme qq^e. faisant $m = 1, 2, 3 \ldots$ on aura ...

$$(1)\ S = x_0^{a+1}(e^\alpha - 1)\left\{1 + e^{(a+1)\alpha} + e^{2(a+1)\alpha} \cdots e^{(n-1)(a+1)\alpha}\right\}$$

$$= x_0^{a+1}(e^\alpha - 1)\left\{\frac{e^{n(a+1)\alpha} - 1}{e^{(a+1)\alpha} - 1}\right\} = x_0^{a+1}\left(\left(\frac{X}{x_0}\right)^{a+1} - 1\right) \times$$

$$\times \frac{e^\alpha - 1}{e^{(a+1)\alpha} - 1} = \left(X^{a+1} - x_0^{a+1}\right)\frac{e^\alpha - 1}{e^{(n+1)\alpha} - 1}.$$

il faut prendre la limite de $S$ quand $\alpha$ converge vers $0$ il faut donc connaître celle du facteur.

$$\frac{e^\alpha - 1}{e^{(a+1)\alpha} - 1} = K$$

or $\quad D^{lle}$ de $\dfrac{e^\alpha - 1}{e^{(a+1)\alpha} - 1} = \dfrac{e^\alpha}{e^{(a+1)\alpha}\, l e^{a+1}} = \dfrac{e^\alpha}{(a+1)e^{(a+1)\alpha}}$

donc $\quad \lim K = \dfrac{1}{a+1}$. quand $\alpha$ est $0$.

donc $\quad \displaystyle\int_{x_0}^{X} x^a\, dx = \frac{X^{a+1} - x_0^{a+1}}{a+1}.$

— supposons $a = -1$. on a pour intégrale $\frac{0}{0}$. mais en ~~remontant~~ à la valeur (1) de $S$. et en y faisant $a = -1$. on a $\quad S = n(e^\alpha - 1)$. il faut déterminer mais on sait $\quad X = x_0 e^{n\alpha}$. donc $n\alpha = l\left(\frac{X}{x_0}\right)$.

donc $\quad S = \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha}\, l\dfrac{X}{x_0}.$

passant à la limite on sait que $\lim \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1$.

donc $\quad \displaystyle\int_{x_0}^{X} x^{-1}\, dx = \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = lX - l x_0.$

on pouvait y parvenir en $\partial^t$. l'intégrale elle-même et faisant $a=1$ dans le résultat.

$$\partial^{lle} \ldots = \frac{x^{a+1} l x - x_0^{a+1} l x_0}{1}$$

si $a=-1$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = lx - lx_0.$$ comme précédemment.

Leçon du mardi gras. 11 février 1823.

si l'on a $f(x)$ une fon que l'on suppose continue entre $x_0+a$ et $x+a$. a étant une quantité connue.

je dis que $\int_{x_0}^{x} f(x+a)\,dx = \int_{x_0+a}^{x+a} f(x)\,dx$.

en effet on sait que

$$S = (x_1-x_0) f(x_0) + (x_2-x_1) f(x_1) \ldots (x-x_{n-1}) f(x_{n-1}).$$

si l'on augmente chacune des valeurs $x_0\ x_1\ x_2 \ldots x$ de la quantité $a$. on a

$$S = (x_1-x_0) f(x_0+a) + (x_2-x_1) f(x_1+a) \ldots (x-x_{n-1}) f(x_{n-1}+a)$$

or en prenant la limite de $S$ qui sera $\int_{x_0+a}^{x+a} f(x)\,dx$. on obtiendra l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(x+a)\,dx$. donc $x^a$...

nous avons défini une intégrale définie, il s'agit de savoir ce qu'on entend par cette même notation quand il s'agit de l'intégrale d'une fonction qui ne reste pas continue entre les limites $x_0$ et $x$ et de l'intégrale d'une fonction quand ces limites $x_0$ et $x$ sont infinies.

d'abord. on sait que pour l'exp.le partic. $\frac{dx}{x}$

$$S = \frac{x_1-x_0}{x_0} + \frac{x_2-x_1}{x_1} + \ldots \frac{x-x_{n-1}}{x_{n-1}}.$$

si $\frac{1}{x}$ n'est pas continue entre $x_0$ et $x$. ... alors

une Valeur $\frac{1}{x_0}$ $\frac{1}{x_1}$ --- sera infinie donc l'une
ou valeurs
$x_0$ $x_1$ --- sera ~~infinie~~ nulle. 74

Dans ce cas on voit que la notation précédente n'est plus applicable. pour voir pourquoi l'on peut la remplacer nous établirons le principe suivant.

Si on suppose qu'entre les limites $x_0$ et $x$ on insère deux quantités $\xi_0$ $\xi$ l'une $\xi_0$ étant très près d'être égale à $x_0$ et $\xi$ très près de $x$.

$$x_0, \xi_0, \quad \xi, x.$$

étant par ordre de grandeur on aura, d'après le principe démontré précédemment que l'intégrale d'une fonction prise par rapport aux deux limites $x_0$ et $x$ est égale à la somme des intégrales prises par rapport à $x_0$ et $x_1$. $x_1$ et $x_2$ -- $x_n$ -- $x_1$ $x_2$ -- $x_{n-1}$ étant compris entre $x_0$ et $x$.

$$(1) \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi_0} f(x)\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{x} f(x)\,dx.$$

or je dis que $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \lim. \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx.$

en effet $\int_{x_0}^{\xi_0} f(x)\,dx = (\xi_0 - x_0) f(x_0 + \theta(\xi_0 - x_0)).$

plus $\xi_0$ se rapprochera de $x_0$ plus le 1er facteur s'approchera d'être égal à 0. donc à la limite. les termes extrêmes du 2d membre de l'identité (1) deviendront nuls. et l'on aura

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \lim. \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Corollaire. Si $\xi_0$ convergeait vers $x_0$. on aurait

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{X} f(x)\,dx.$$

nous admettrons que tous les principes démontrés ci-dessus sont vrais pour des limites infinies. et d'après cela nous pourrons interpréter les intégrales suivantes

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx \;;\quad \int_{-\infty}^{X} f(x)\,dx \;;\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \;;$$

en effet si $\xi_0$ est supposé avoir pour limite $-\infty$

et $\xi$ $+\infty$

on aura d'après le principe précédent.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx.$$

ainsi l'intégrale d'une fonction entre des limites infinies est la limite de l'intégrale de cette fonction prise entre des limites $\xi_0$ et $\xi$ que ces valeurs infinies.

Exemple. Soit à trouver $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx.$

en l'appliquant à la fonction $e^x$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} e^x\,dx = \lim (e^{\xi} - e^{\xi_0}).$$

faisant $\xi = +\infty$ $\xi_0 = -\infty$. on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \infty.$$

il y a des cas ou cette intégrale entre des limites infinies sera finie, comme dans celui-ci.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim \int_{\xi_0}^{0} e^x dx = 1 - e^{-x} = 1.$$

2de app^on. Soit la f^on $\frac{1}{x}$ dont on cherche l'intégrale entre 1 et $\infty$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim \int_1^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim. (l. \frac{\xi}{1}).$$

or quand $\xi = \infty$. on a

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty.$$

si l'on cherche l'intégrale entre $-1$ et $-\infty$. on aura

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x} = \lim (l \frac{1}{\xi}) = -\infty \quad \text{quand } \xi = -\infty.$$

tout ce qu'on a dit jusqu'à présent pour trouver les intégrales définies entre des limites $x_0$ et $x$ et par extension les intégrales entre des limites infinies suppose que les limites $x_0$ et $x$ ou les quantités $\xi_0$ et $\xi$ convergeant vers les limites infinies soient de même signe. si le contraire avait lieu, les moyens précédents pour obtenir les intégrales ne suffiraient pas. voici comment on les obtient.

soit pour ex: $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$. qu'on veut déterminer

$-1$ ; $0$ ; $+1$ ; tout par ordre de grandeur j'peux supposer $-1$ et $0$ comme de même signe ainsi que $0$ et $+1$. et j'aurai d'après un

principe établi pour les intégrales prises par rapport à des limites de même signe

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+1} f(x)\,dx.$$

donc on aura dans cette Exple

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{+1} \frac{dx}{x}.$$

mais si $\xi_0$ converge vers $-0$ et $\xi$ vers $+0$. on aura

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim \int_{-1}^{\xi_0} \frac{dx}{x} + \lim \int_{\xi}^{+1} \frac{dx}{x}.$$

mais comme $\xi_0$ converge vers une quantité négative je le représente par $-\varepsilon\mu$ et je fais $\xi = \varepsilon\nu$. $\mu$ et $\nu$ sont des constantes arbitraires et $\varepsilon$ converge vers 0 la même limite que $\xi$. on aura

$$\lim \int_{-1}^{\xi_0} \frac{dx}{x} = l\left(\frac{\xi_0}{-1}\right) = l(\varepsilon\mu)$$

$$\int_{\xi}^{+1} \frac{dx}{x} = l\left(\frac{1}{\xi}\right) = l\left(\frac{1}{\varepsilon\nu}\right).$$

Donc $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = l(\varepsilon\mu) - l\left(\frac{1}{\varepsilon\nu}\right) = l\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$.

ou $\mu$ et $\nu$ étant arbitraires l'intégrale est indéterminée

Ainsi nous voyons que les intégrales entre des limites ou bien infinies, soit finies mais de signes contraires peuvent être finies, infinies ou indéterminées.

Dans ce dernier cas on a trouvé $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ indéterminée

ou $\int_{-1}^{\xi_0} \frac{dx}{x} = l(-\xi_0)$ .... donc $\lim \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = -\infty$

de même $\int_{\xi}^{+1} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{1}{\xi}\right)$ ... $\lim \int_{0}^{+1} \frac{dx}{x} = +\infty$.

et $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = +\infty - \infty$. qui est ici un caractère d'indétermination.

$$\int \frac{\ln x\, dx}{x} \cdot \overline{\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Ecole polytechnique

Cours d'analyse.

77

N.° 10.

Lamarle

Reçu le 13 février 1823.

# Des intégrales singulières.

Supposons que $f(x)$ devienne plusieurs fois infinie pour les valeurs $x_1$ $x_2$ .... $x_{n-1}$ comprises entre $x_0$ et $X$. en admettant que les lois établies ci-dessus soient vraies pour les valeurs infinies. on aura.

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \ldots \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx.$$

Si l'on suppose que l'on cherche l'intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$. on aura

$$A = \lim \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx + \text{X}^{\text{es}} \ldots$$

Mais on sait que si l'on désigne par $-\frac{1}{\varepsilon\nu_0}$ la limite $-\infty$. et par $+\frac{1}{\varepsilon\mu_n}$ la limite $+\infty$. ~~une~~

$$A = \lim \int_{-\frac{1}{\varepsilon\nu_0}}^{+\frac{1}{\varepsilon\mu_n}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{\varepsilon\nu_0}}^{x_1 - \varepsilon\mu_1} f(x)\,dx$$

pour obtenir

Si l'on suppose que $x_1 - \varepsilon\mu_1$ converge vers $x_1$ en moins et $x_1 + \varepsilon\nu_1$ vers $x_1$ en plus ... qu'il en soit de même de $x_2 - \varepsilon\mu_2$ vers $x_2$ et de $x_2 + \varepsilon\nu_2$ vers $x_2$ ... ainsi de suite. on aura

$$A = \lim \left\{ \int_{-\frac{1}{\varepsilon\nu_0}}^{x_1 - \varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1 + \varepsilon\nu_1}^{x_2 - \varepsilon\mu_2} f(x)\,dx \ldots \int_{x_{n-1} + \varepsilon\nu_{n-1}}^{+\frac{1}{\varepsilon\mu_n}} f(x)\,dx \right\}.$$

Cette Exp^on est ce qu'on appelle l'intégrale générale de la fon $f(x)$ entre des limites infinies.

$\varepsilon$ converge vers 0 ainsi il peut arriver que lorsque $\varepsilon$ sera 0. Ces intégrales partielles soient f.on de ces quantités arbitraires $\mu_0\ \mu_1\ \mu_2 \cdots \nu_0\ \nu_1\ \nu_2$ alors l'intégrale générale sera indéterminée, et pourra être ou nulle ou finie, ou infinie...

si l'on suppose $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 \cdots = 1$

$\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 \cdots = 1$.

on obtiendra

$$B = \lim \left\{ \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1 - \varepsilon} f(x)\,dx \right\} + \lim \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \lim \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{+\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx$$

qu'on appelle intégrale principale.

si l'on retranche B de A. on aura

$$A = B + \left\{ \lim \int_{-\frac{1}{\varepsilon\nu_0}}^{x_1 - \varepsilon\mu_1} f(x)\,dx - \lim \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx \right\}$$

$$+ \left\{ \lim \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx - \lim \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx \right\}$$

$$\vdots$$

$$+ \left\{ \lim \int_{x_{n-1}+\varepsilon\nu_{n-1}}^{+\frac{1}{\varepsilon\mu_n}} f(x)\,dx - \lim \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{+\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx \right\}$$

Chacune de ces lignes horizontales pourra être remplacée par d'autres en même nombre qui comprendront chacune les limites de deux intégrales qu'on nomme intégrales singulières. voici quelles sont

Ces intégrales, et comment on les obtient.

On remarque que

$$-\frac{1}{\varepsilon\nu_0}, -\frac{1}{\varepsilon}, \quad x_1-\varepsilon, \quad x_1-\varepsilon\mu_1$$

sont par ordre de grandeur parcouru d'après un principe démontré, que l'intégrale entre les deux limites extrêmes est égale à la somme des intégrales prises entre les 1ères et les 2des limites, la 2de et la 3e enfin les 3e et la 4e on obtiendra

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\nu_0}}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{\varepsilon\nu_0}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx.$$

donc on pourra remplacer chaque ligne horizontale de la valeur de A ci dessus par des valeurs de la forme

$$\lim \int_{-\frac{1}{\varepsilon\nu_0}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx + \lim \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx$$

Chacune de ces expressions est ce qu'on nomme intégrale singulière.

On voit que c'est la limite d'une intégrale comprise entre des limites extrêmement rapprochées $x_1-\varepsilon$, $x_1-\varepsilon\mu_1$, la fonction devenant infinie pour cette valeur $x_1$ ou bien l'intégrale singulière est la limite de l'intégrale comprise entre deux limites infinies.

Il s'agit de calculer ces intégrales singulières.

Il est d'abord il est aisé de voir que ces intégrales peuvent être indéterminées car

on sait que $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = (x-x_0) f(x_0 + \theta(x-x_0))$.

dans le cas où on a — pour l'intégrale singulière $0 \times \frac{1}{0}$

$= \frac{0}{0}$.

~~++++~~ si l'on a $(x-x_1) f(x)$. $x = x_1$ rendant nul les 2 facteurs en même temps qu'il rend infinie $f(x)$ on a $\frac{0}{0}$ et si je suppose que $f_1$ soit la vraie valeur de cette Expon on aura

$$(x-x_1) f(x) = f_1 + \delta.$$

$\delta$ convergeant vers 0 et qui restera tel qu'en x vrai gal à $x_1$. de là $f(x) = \frac{f_1 + \delta}{x - x_1}$.

mais on cherchant l'intégrale de cette fon on rentre dans le cas d'une fon $f(x) = uv$. v étant une expon qui reste toujt de même signe toutes les valeurs de x. où ici v est remplacé par $\frac{1}{x-x_1}$ qui restera toujt de même signe.

mais si $f(x) = v\,\varphi(x)$.

$$\int_{x_0}^{x} v\,\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0 + \theta(x-x_0)) \int_{x_0}^{x} v\,dx.$$

donc si l'on cherche, dans le cas qui nous occupe l'intégrale ci-dessus, on aura. (l'intégrale

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon\mu_1} \frac{f_1 + \delta}{x - x_1}\,dx = \int_{x_1-\varepsilon_{x_1}}^{x_1+\varepsilon\mu_1 - x_1} \frac{(f_1+\delta)\,dx}{x} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon\mu_1} \frac{(f_1+\delta)\,dx}{x}$$

d'après une loi démontrée ci-dessus.

et d'après la remarque précédente

$$\int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon\mu_1} \frac{f_1+\alpha}{x}\,dx = (f_1+\alpha_1)\int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon\mu_1} \frac{dx}{x}.$$

en désigt par $f_1+\alpha_1$ une moyenne entre toutes les fons de cette forme dans la valeur de $s$ qui servirait en déterminer l'intégrale de cette fon $f_1+\alpha$.

$$\text{or } \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon\mu_1} \frac{dx}{x} = l\left(\frac{\varepsilon\mu_1}{\varepsilon}\right) = l(\mu_1).$$

donc

$$\int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon\mu_1} \frac{(f_1+\alpha)}{x}\,dx = (l\mu_1)\,(f_1+\alpha_1).$$

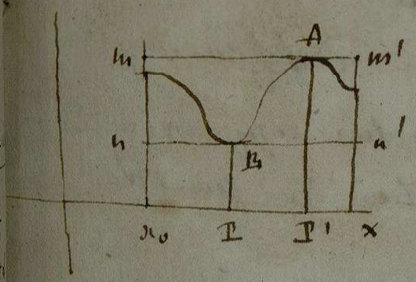
ainsi à la limite $\alpha_1$ se détruit. et l'on aura

$$\lim. \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon\mu_1} fx\,dx = (l\mu_1)\,f_1.$$

on voit que l'intégrale singulière cherchée est une Expon indéterminée. on déterminerait de même toutes les autres et l'on formerait ainsi A.

---

Leçon du 15 février 1823.




on a démontré que l'aire d'une courbe dont les ordonnées allaient toujours en croissant ou en diminuant entre les deux limites $x_0$ et $x$ étaient représentée par l'intégrale définie entre ces limites. cela a encore lieu quand la courbe a la forme qu'on voit à côté. car, dans ce cas l'aire de la courbe est comprise entre les deux rectangles $x_0m'$, $x_0n'$, construits sur l'ordonnée max. et min. de cette courbe. si A est l'aire cherchée. elle sera égale à la moyenne entre ces 2 rectangles

$$A = (x-x_0)\,f(x_0+\theta(x-x_0)).$$

on peut considérer la courbe partagée en éléments dont l'une des extrémités sera max et l'autre minimum. et l'on aura ainsi pour l'expon de A. une suite de termes de la forme ci-dessus donc

$$A = (x_1 - x_0) f(x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1) \cdots$$
$$\cdots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1} + \theta_{n-1} (X - x_{n-1}).$$

or A d'après ce qu'on a vu converge vers l'une des deux sommes.

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \cdots$$
$$S' = (x_1 - x_0) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_2) \cdots$$

qui a la limite repst l'intégrale de la fon

donc A à la limite représentera bien l'aire de la courbe.

On peut apprécier l'erreur que l'on commet en carrant cette courbe. car en suppt tous les éléments égaux. on a

$$S = \alpha (f(x_0) + f(x_0 + \alpha) + \cdots$$
$$S' = \alpha (f(x_0 + \alpha) + f(x_0 + 2\alpha) \cdots$$

or l'aire de la courbe est comprise entre ces 2 valeurs donc l'erreur est moindre que leur Différence $\pm \alpha (f(X) - f(x_0))$. mais plus approximativt prenant $\alpha$ la moyenne on obtiendra pour la vraie valeur de l'aire.

$$A = \left\{ \alpha \left( \tfrac{1}{2} f(0) + f(x_0 + \alpha) + f(x_0 + 2\alpha) \cdots \right. \right.$$
$$\cdots f(x_0 + (n-1)\alpha) + \tfrac{1}{2} f(X).$$

est l'erreur vraie

$$\pm 2\left(\tfrac{1}{2}f(x) - \tfrac{1}{2}f(x_0)\right).$$

c'est la Différence entre l'une des valeurs de S et A.

Exemple soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on veut avoir l'intégrale entre 0 et 1. je divise en 4 Elements j'ai pour les Elements

$$0, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1.$$

les diverses valeurs de $f(x)$ correspondantes à celles-ci sont

$$1, \quad \frac{16}{17}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{16}{25}, \quad \frac{1}{2}. \quad \text{prenant la moitié}$$

les dernières extrêmes, ou a $\frac{1}{2}, \frac{16}{17}, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \frac{1}{4}$

Réduisant en Décimales ces dernières valeurs de $f(x)$ et les ajoutant on appliquera la formule A ci-dessus.

$$\frac{16}{17} = 0,941$$

$$\frac{4}{5} = 0,8$$

$$\frac{16}{25} = 0,64$$

$$\frac{1}{4} = 0,25.$$

La somme S vaut 3,131. mais $\alpha = \frac{1}{4}$ dans cet exemple donc on aura

pour la courbe $\frac{1}{1+x^2} = 0,78$ ——

l'erreur est $\frac{1}{16}$ d'après la formule ci-dessus.

on a trouvé les diverses intégrales en supposant que les limites étaient constantes. Supposons ici que x devienne Variable et proposons-nous de trouver l'intégrale qui sera alors fonc de x.

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x)$$

Nous allons démontrer que $f(x)$ égale toujours la dérivée de $F(x)$. $x$ étant variable je le remplace par $x$. et j'ai

(1) $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x)$. on sait que le calcul Différentiel que $F'(x) = \lim \left\{ \frac{F(x+i) - F(x)}{i} \right\}$ i convergt vers 0. Changeant dans (1) $x$ en $x+i$ on a.

(2) $\int_{x_0}^{x+i} f(x)\,dx = F(x+i)$.

~~remplaçant~~ prenant la Différence entre (2) et (1) on a

$$\int_{x_0}^{x+i} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x+i) - F(x).$$

or le 1er. membre de cette égalité d'après des principes démontrés peut prendre la forme.

$$\int_{x_0}^{x+i} f(x)\,dx + \int_{x}^{x_0} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+i} f(x)\,dx = F(x+i) - F($$

mais on sait que l'on a G.C.

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = (x - x_0) f(x_0 + \theta(x - x_0))$$

donc $\int_{x}^{x+i} f(x)\,dx = i f(x + \theta i)$.

égt les deux valeurs de ces intégrales. on a

(K) $F(x+i) - F(x) = i f(x+\theta i)$.

Donc à la limite.

$$F'(x) = f(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'après ce théorème, on peut se proposer de trouver toutes les valeurs de y qui satisfont à l'Eq on

$$dy = f(x)\,dx.$$

soit $y = F(x)$. l'Eq on qui donnera les valeurs cherchées. on sait que l'intégrale indéfinie de $f(x)\,dx$ égale $F(x)$. $F(x)$ étant lié par la condition $F'(x) = f(x)$. ainsi pour un cas très particulier celui ou $f(x) = a$ on aurait $F'(x) = a$. il faut chercher quelles sont les valeurs propres à vérifier cette Eq on. on sait que l'on a généralement

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

ce n'est qu'une exp on plus générale de l'Eq on (14).

ou bien en changeant x en $x_0$. on a

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0) + \theta(x - x_0).$$

ou (2d. membre doit être égal à a. puisque $F'(x) = a$ q q. soit x. on a alors.

$$F(x) - F(x_0) = a(x - x_0).$$

donc $F(x) = ax + (F(x_0) - ax_0)$.

$F(x_0) - ax_0$ est une constante que je représente par c donc $F(x) = ax + c = y$.

toutes les valeurs de $y = ax + c$ satisfont donc à l'Eq^on proposée et ~~en effet~~ si l'on diff^cie on aura toujours

$$dy = a\,dx.$$

or c est qq^e. donc il y aura une infinité de valeurs pour satisfaire à $dy = a\,dx$.

Pour résoudre généralement l'Eq^on proposée, il faut suivre une marche analogue. Supposons que $y = F(x)$ ne soit pas la valeur la plus générale pour satisfaire à

$$dy = f(x)\,dx.$$

soit $y = F(x) + \varphi(x)$. cette valeur ~~[illegible]~~ dérivée doit être égale à $f(x)$. ainsi on devrait avoir

$$F'(x) + \varphi'(x) = f(x).$$

mais on a d'après le 1^er théorème $F'(x) = f(x)$. donc $\varphi'(x) = 0$. ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que $\varphi(x) = c$ c'étant une constante. donc la vraie valeur de $y$ pour satisfaire à l'Eq^on donnée est

$$y = F(x) + c.$$

on est parvenu à ce résultat en supposant sur le 1^er théorème qui n'est démontré que pour les intégrales ~~indéfinies~~ de la forme $\int^x f(x)\,dx$. mais ce résultat serait le même à $x_0$ la constante près qui changerait, en restant de même forme, si $x_0$ n'était pas constant.

car alors $y = \int_{x_1}^{x} f(x)\,dx$. comme précédemment

pour si $x_1$ est une limite fixe $x_0$ $x$ deux trois nombres pris ordre de grandeur on a

$$y = \int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

La 1ère est un nombre déterminé, la 2e rentre dans la cas précédent donc on a toujours

$$y = F(x) + C.$$

ou ces intégrales dont les limites sont variables toutes ce qu'on appelle des intégrales indéfinies. nous venons donc de voir que les valeurs de $y$ tirées de $y = \int f(x)\,dx + C$. toutes propres à vérifier l'équation différentielle provenant $y = f(x)$. $f(x)$ étant la fonction sous le signe $\int$.

---

Il reste donc à déterminer cette intégrale indéfinie dans les divers exemples qui pourraient se présenter - nous allons voir comment on peut y parvenir, et nous ferons pour cela remarquer que pour les fonctions simples et celles qui peuvent y être ramenées, il existe 4 méthodes d'intégration : l'intégration immédiate, l'intégration par substitutions, l'intégration par décomposition et l'intégration par parties.

---

$\int$ on indique que les intégrales indéfinies par le seul signe $\int$.

1er exemple d'intégr. immédiate. Voici proposé de trouver $\int \frac{dx}{x}$. on sait que les valeurs de y satisfont à $dy = \frac{dx}{x}$. on sait par le calcul Différentiel que $d(lx) = \frac{dx}{x}$. donc $y = lx$ est propre à vérifier $dy = \frac{dx}{x}$. donc

$$\int \frac{dx}{x} = lx + c.$$

2d Exemple. Voici proposé de trouver $\int x\,dx$. on se vérifier $dy = x\,dx$. on fait $y = x^2$ donne $dy = 2x\,dx$ donc $y = \frac{1}{2}x^2$ est propre à vérifier $dy = x\,dx$ et par suite $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$.

Nous donnerons bientôt d'autres exemples, mais voyons par quel moyen étant donné l'intégrale indéfinie, on peut revenir à l'intégrale définie.

on a trouvé précédemment $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) + c_0$.

mais pour déterminer $c_0$ on fera $x = x_0$ et l'on aura $0 = F(x_0) + c_0$. donc $c_0 = -F(x_0)$. et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0).$$

pour obtenir l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ il suffit dans le résultat précédent $x$ en $x$. ainsi

$$\int_{x_0}^{x} f(u)\,dx = F(x) - F(x_0).$$

Exemple 1er on a trouvé $\int \frac{dx}{x} = lx + c$.

donc $\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{x} = lx - lx_0 = l\frac{x}{x_0}$. résultat trouvé précédemment.

2. Si l'on a $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$. on aura

$$\int_{x_0}^{X} x\,dx = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}x_0^2 = \frac{X^2 - x_0^2}{2}.$$

3. si $\int e^x dx = e^x + c$. on aura $\int_{x_0}^{X} e^x dx = e^X - e^{x_0}$.

De plusieurs des théorèmes établis pour les intégrales définies subsistent encore pour les intégrales indéfinies. par ex: on sait que

$$\int_{x_0}^{X} \{\varphi(x) + \chi(x) + \cdots\}\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx + \cdots$$

cette propriété a été établie quels soient les limites extrêmes par conséquent on aura

$$\int \{\varphi(x) + \chi(x) + \cdots\} = \int \varphi(x)\,dx + \int \chi(x)\,dx + \cdots$$

on sait que l'on trouve pour les intégrales définies

$$\int_{x_0}^{X} a\varphi(x)\,dx = a\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

on aura donc.

$$\int a\varphi(x)\,dx = a\int \varphi(x)\,dx.$$

et par conséquent

$$\int (aw + bv + cw + \cdots) = a\int w + b\int v + \cdots$$

on a aussi pour les intégrales définies

$$\int_{x_0}^{X} f(x+a)\,dx = \int_{x_0+a}^{X+a} f(x)\,dx.$$

et comme l'on a obtenu $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

on aura $\int_{x_0}^{X} f(x+a)\,dx = F(X+a) - F(x_0+a)$.

donc $\int_{x_0}^{x} f(x+a)\,dx = f(x+a) - f(x_0+a)$.

ainsi plus généralement

$$\int f(x \pm a)\,dx = f(x \pm a) + c.$$

Exemple. $\int \frac{dx}{x} = l(x) + c$. de même $\int \frac{dx}{x+a} = l(x+a) + c$

et $\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a) + c$.

Leçon du 18 février 1823.

Nous allons, comme nous l'avions annoncé plus haut intégrer par les 4 manières énoncées, les diverses fonctions simples.

intégration immédiate.

on a trouvé par cette méthode, $\int a\,dx = ax + c$. connaissant $dy = a\,dx$.

et $\int e^x dx = e^x + c$. connaissant $dy = e^x dx$.

soit proposé de satisfaire à l'équation $dy = A^x dx$.

on sait que $d(A^x) = A^x l A \cdot dx$. d'où $A^x dx = \frac{d(A^x)}{l A}$.

on peut donc satisfaire par $y = \frac{A^x}{l A}$. donc

$$\int A^x dx = \frac{A^x}{l A} + c.$$

supposons que l'on veuille trouver l'intégrale indéfinie de $\cos x\,dx$. il faut satisfaire à $dy = \cos x\,dx$.

on sait par les résultats du calcul Différentiel que $y = \sin x$ y satisfait donc

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c.$$

pour avoir l'intégrale de $\sin x\,dx$. il faut satisfaire à $dy = \sin x\,dx$. on sait que c'est par $y = -\cos x$.

donc $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$.

Si l'on veut trouver $\int x^a dx$. il faut trouver la valeur de y qui satisfasse à $dy = x^a dx$. on sait que l'on a $d(x^{a+1}) = (a+1) x^a dx$ donc $x^a dx = \frac{d(x^{a+1})}{a+1}$. et $y = \frac{x^{a+1}}{a+1}$. donc, on a généralement

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c.$$

soit m un nombre entier ou nul on a

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c.$$

$m=1$ donne $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$. $m=2$ $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$.

soit $a = -m$. on a

$$\int \frac{dx}{x^m} = \frac{x^{-m+1}}{-m+1} + c. = -\frac{1}{m-1} x^{m-1} + c.$$

fait $m = 2, 3,$ &c. — on obtient les intégrales $\frac{dx}{x}$ $\frac{dx}{x^2}$ ——

mais en faisant $m=1$. on a

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + c.$$

Mais en la cherchant directement on trouve

$$\int \frac{dx}{x} = lx + c.$$

on voit que x étant négatif cette Exp$^{on}$ seroit imaginaire il faut remplacer lx par $\frac{1}{2} l(x^2)$ et la véritable valeur de

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(x^2) + c.$$

Pour obtenir $\int \frac{dx}{1+x^2} dx$ il faut satisfaire à $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$ on sait que t'est par $y = \text{arc tang } x$. donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x + c.$$

de même

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x + c.$$

on sait que $\text{arc tang } x = -\text{arc cot } x$. et $\text{arc sin } x = -\text{arc cos } x$ donc on peut écrire en formules.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = c' - \text{arc cot } x$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = c' - \text{arc cos } x .$$

on obtiendrait par les moyens précédents

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang } x + c \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c .$$

Intég.on par substitution.

Soit (1) $dy = f(x)\,dx$. je suppose qu'on y satisfasse par $y = F(x) + c$. Si l'on remplace $x$ par $z$. que je suppose fon de $z$. il viendra $y = F(z) + c$. mais il est des cas où l'on peut déterminer $F(z)$. car on tire de là $dy = f(z)\,z'\,dx$. qui l'obtiendrait aussi en remplaçant dans (1) $x$ par $z$. et $Dx$. on pourrait avoir par le moyen connu la valeur qui satisfait à

$$dy = f(z)\,z'\,dx.$$

et en remplaçant $z$ par la valeur en fon de $x$, obtenir l'intégrale cherchée.

Nous allons offrir qqes exemples, où cette manière de subs.on sert beaucoup à l'intég.on de ces fons; mais il n'en faut pas conclure qu'elle soit générale.

— Soit (1) $dy = f(x+a)\,dx$. on veut trouver l'intégrale de $f(x+a)\,dx$. je fais $(x+a) = z$. $x = z - a$.

on a (2) $dy = f(z)\,d(z-a) = f(z)\,dz$. ainsi — $dz = dx$. appliquant à (2). les règles connues ci-dessus pour ces espèces de fons on aura

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C.$$

donc en remplaçant $z$ par la valeur

$$\int f(x+a)\,dx = F(x+a) + C.$$

— on a trouvé précédemment $\int \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + C$.

proposons-nous de trouver $\int \frac{dx}{(x \pm a)^m}$. et $\int \left(\frac{A}{x-a}\right) dx$.

je fais $dy = \frac{dx}{(x \pm a)^m}$ . remp$^t$ $(x \pm a)$ par $z$.

$((x \pm a) = z$ d'où $x = z \mp a)$. on a

$$dy = \frac{dz}{(z)^m}$$

parce qu'on a précédemment.

$$\int \frac{dz}{z^m} = \frac{1}{(m-1)z^{m-1}} + c.$$

donc

$$\int \frac{dx}{(x \pm a)^m} = \frac{1}{(m-1)(x \pm a)^{m-1}} + c.$$

— pour trouver $\int \frac{A}{x-a} dx$. je $x - a = z$, $dx = dz$.

$$\int \frac{A}{z} dz = A \int \frac{dz}{z} = A\, l(z) + c.$$

donc $\int \frac{A}{x-a} dz = A\, l(x-a) + c.$

— pour trouver de même $\int \frac{A\, dx}{(x-a)^m} = \frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c.$

— soit proposé de trouver $\int f(ax) dx$. je pose

$ax = z$. $x = \frac{z}{a}$. $dx = \frac{1}{a} dz$.

donc il ~~faut~~ en remplaçant cherche

$$\int \frac{1}{a} f(z)\, dz \quad \#$$

mais par ce que l'on vient de voir on a pour cette intégrale $\frac{1}{a} F(z) + c$.

donc en remp$^t$.

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + c.$$

on aurait de même.

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c.$$

en

$$\int f(e^x)\, e^x dx = \int f(z)\, e^x dz = \int f(z)\, e^x \frac{dz}{e^x}.$$

puisque $e^x = z$. $e^x dx = dz$. d'où $dx = \frac{dz}{e^x}$

or $\int f(z) dz = F(z) + c$. donc

$$\int f(e^x)\, e^x dx = F(e^x) + c.$$

---

Soit proposé de trouver $\int f(x^2)\, x\, dx$. je fais $x^2 = z$. $2x\,dx = dz$. $x\,dx = \frac{dz}{2}$. ainsi

$$\int f(x^2)\, x\, dx = \int f(z) \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} F(z) + c =$$

$$= \frac{1}{2} F(x^2) + c.$$

---

pour avoir $\int f(lx) \frac{dx}{x}$ je fais $lx = z$. alors $\frac{dx}{x} = dz$. donc

$$\int f(z)\, dz = F(z) + c = F(lx) + c.$$

---

afin d'obtenir $\int f(\sin x) \cos x\, dx$. je fais $\sin x = z$. qui donne en $D^t$ $\cos x\, dx = dz$. donc

$$\int f(\sin x) \cos x\, dx = \int f(z) dz = F(z) + c = F(\sin x) + c.$$

et de même $\int f(\cos x) \sin x\, dx = - F(\cos x) + c$.

---

$$\int \frac{dx}{x\, lx} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{lx} = \int \frac{dz}{z} = lz + c = l.l.x + c.$$

on a posé ici $lx = z$. d'où $\frac{dx}{x} = dz$.

---

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{dz}{z} = lz + c = l \sin x + c.$$

on a posé $\sin x = z$ d'où $\cos x\, dx = dz$.

$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \int -\frac{dz}{z} = -lz + c = -l\cos x + c.$

on a posé $\cos x = z$. d'où $-\sin x\,dx = z$.

~~On~~ vient d'obtenir l'intégrale de la cotangte et de la tangte.

— je suppose qu'on fasse $f(x) = x$ dans les exemples précédents. on obtiendra.

$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c.$ $\int (ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{ax+b}{2}\right)^2 + c.$

$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c.$ $\int l(x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(lx)^2 + c.$

$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}(\sin^2 x) + c.$ ou bien $= -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

parce qu'on peut considérer ainsi ces deux intégrales

$\int \sin x.\cos x\,dx$ ou $\int \cos x.\sin x\,dx.$

— si l'on fait $f(x) = \frac{1}{x^2}$ on obtiendra

$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c.$ $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} + c.$

$= -\text{Cosec}.x + c.$

—

pour avoir $\int e^{ax}\,dx$ je fais $ax = z$. j'ai $a\,dx = dz$

donc $\int e^{ax}\,dx = \int \frac{e^z\,dz}{a} = \frac{1}{a}e^z + c. = \frac{1}{a}e^{ax} + c.$

$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c.$

—

Des intégrales des fonctions imaginaires.

soit $f(x) = \varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}.$

Alors la valeur de S que l'on a trouvée pour Définir l'intégrale $\int f(x)dx$ se décomposera en deux termes —

$$S = \{(x_1 - x_0)\varphi(x_0) + (x_2 - x_1)\varphi(x_1) \cdots (x - x_{n-1})\varphi(x_{n-1})$$
$$+ \sqrt{-1}\{(x_1 - x_0)\chi(x_0) + \cdots + x - x_{n-1}\chi(x_{n-1})$$

donc si

$$\int_{x_0}^{x} \{\varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}\}dx = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{x} \chi(x)dx.$$

mais cette Définition étant vraie quels que soient $x_0$ et $x$. elle le sera encore quand $x_0$ et $x$ seront variables et l'on aura donc $\int (u + v\sqrt{-1})dx = \int u\,dx + \sqrt{-1}\int v\,dx$.

Et toutes intégrales de $u\,dx$ et $v\,dx$ donneront l'intégrale cherchée.

Si l'on a à chercher

$$\int \frac{A\,dx}{(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})^m}$$

on obtiendra en regardant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ comme $a$ dans l'Exemple $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m}$.

$$\int \frac{A\,dx}{(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})^m} = -\frac{A}{(m-1)(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})^{m-1}} + C.$$

et $\int \frac{A + B\sqrt{-1}}{(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})^m} = -\frac{A + B\sqrt{-1}}{(m-1)(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})^{m-1}} + C$

---

## Intégration par Décomposition.

On en fait usage toutes les fois que la fonction que l'on veut intégrer est décomposable en plusieurs autres fonctions que l'on peut intégrer par les moyens déjà connus.

On sait que

$$\int (u+v+w\ldots)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx \ldots$$

d'après ce principe. On peut intégrer

$$\int (A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots)\,dx = A\int dx + B\int x\,dx + C\int x^2 dx + D\int x^3 dx + \&^a \ldots$$

par conséquent on a remplaçant ces intégrales par leurs valeurs déja trouvées.

$$\int (A+Bx+Cx^2\ldots)\,dx = Ax + B\frac{x^2}{2} + C\frac{x^3}{3} + \&^a \ldots + C.$$

On peut par cette méthode intégrer les fractions rationnelles, de la forme $\frac{f(x)}{F(x)}$. nous supposerons 1° que les racines de $F(x)$ soient réelles et que le dégré du $D^r$ est plus grand que celui du $D^r$. On sait que l'on peut décomposer cette fraction en fractions de cette espèce

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} \ldots \frac{A_{n-1}}{x-x_{n-1}}$$

donc

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = A_0\int \frac{dx}{x-x_0} + A_1\int \frac{dx}{x-x_1} + \&^a \ldots$$

mais on sait que $\int \frac{dx}{x-x_0} = l(x-x_0) + c_0$

et $\int \frac{dx}{x-x_1} = l(x-x_1) + c_1$ donc

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} = A_0\, l(x-x_0) + A_1\, l(x-x_1) + \ldots + C.$$

Si le dégré de $f(x)$ était supérieur à celui de $F(x)$ aurait un polynome $R$ qu'on devrait ajouter à toutes ces fractions, alors

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \ldots + R.$$

on aura intégrer $\int R$ par la méthode ci-dessus donc on peut trouver l'intégrale d'une fonction dont les racines sont réelles.

je suppose que plusieurs racines de $F(x)$ soient imaginaires ch de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ $\alpha-\beta\sqrt{-1}$. les fractions qui composent $\frac{f(x)}{F(x)}$ seront de la forme

$$\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} \text{ et } \frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}.$$

mais comme il y aura toujours deux fractions qui correspondront à deux racines imaginaires conjuguées. on pourra en les ajoutant mettre ces fractions sous une forme réelle, on aura —

$$\frac{(A+B\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})+(A-B\sqrt{-1})(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})}{(x-\alpha)^2+\beta^2} =$$

$$= \frac{2A(x-\alpha)+2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{2A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

on aura donc dans ce cas —

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{2A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \int \frac{2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \text{——}$$

plus autant de termes de cette forme qu'il y aura de racines inégales dans $F(x)$.

$$+\frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \text{---} + R. \text{ —}.$$

il faut donc savoir intégrer les facteurs de la forme $\frac{2A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.

pour cela on écrit, — —

$$\int \frac{2A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = A\int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

on n'a fait $(x-\alpha)^2+\beta^2 = z$. On a donc $2(x-\alpha)\,dx = dz$

donc en remplaçant on a

$$\int \frac{dz}{z} = l(z) + C = l\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + C.$$

il faut de plus intégrer les fonctions de la forme

$$\frac{2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$ on a — si l'on fait $(x-\alpha) = \beta z$.
on a $dx = \beta\,dz$.

$$\int \frac{2B\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{2B\beta\,dx}{\beta^2(z^2+1)} = \frac{2B}{\beta}\int \frac{dz}{z^2+1} = \text{arc tang}(z) + C$$

donc $$\int \frac{2B\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = 2B\,\text{arc tang}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C.$$

par conséquent

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = A\,l\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\} + 2B\,\text{arc tang}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \text{Const.}$$

on voit donc que l'on peut intégrer une fonction rationnelle

$\frac{f(x)}{F(x)}$ quelles soient les racines.

NB on peut avoir besoin de l'intégrale d'une fonction de la forme

$$\int \frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}\,dx.$$

pour l'obtenir je multiplie le N° et le D^r par $x-\alpha+\beta\sqrt{-1}$ j'aurai,

$$\int \frac{A-B\sqrt{-1}}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})}\,dx = \int \frac{(A-B\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{(A-B\sqrt{-1})(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$+ \int \frac{(B+A\sqrt{-1})\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$ il faut trouver ces deux —

intégrales, et l'on aura l'intégrale cherchée. 

or $\int \frac{(A-B\sqrt{-1})(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = (A-B\sqrt{-1}) \int \frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$

d'après ce qu'on a vu précédemment on a pour la valeur de cette intégrale $(A-B\sqrt{-1}) \frac{1}{2} l\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} + C$.

pour obtenir la 2de on observe que l'on aura d'après une Eqn semblable qu'on a traité précédemt

$$\int \frac{(B+A\sqrt{-1})\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = B+A\sqrt{-1} \operatorname{arc\,tang} \frac{x-\alpha}{\beta} + C$$

donc réunissant ces deux intégrales on a

$$\int \frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}(A-B\sqrt{-1}) l\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} + (B+A\sqrt{-1})\times$$

$\times \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$.

on obtiendrait $\int \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}$ en changeant dans

ce résultat $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$. on aurait

$\frac{1}{2}(A+B\sqrt{-1}) l\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} + (B-A\sqrt{-1}) \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$.

si l'on fait la somme, on retrouve le 1er terme

de $\int \frac{F(x)}{f(x)}$ trouvée ci-dessus.

---

## Intégration par parties.

L'intégration par parties est fondée sur la formule

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

si l'on intègre cette Eqn on aura

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$ ##

d'où $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

donc $\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx$.

<u>appon</u> soit proposé de trouver $\int lx\,dx$. on pose $lx = u$. pour $v'$ soit égal à 1 il faut que $v = x$. on aura donc

$$\int lx\,dx = x\,lx - \int x\,d.l(x) = x\,lx - \int dx = x(lx-1)+$$

on reviendra plus tard sur ces sortes d'intégon qui peuvent être très utiles.

---

## Intégration des fonctions irrationnelles.

31ème leçon. 20 février 1823.

à l'aide des méthodes précédentes on peut intégrer les fonctions rationnelles, nous allons chercher un moyen d'y ramener les fonctions irrationnelles.

si l'on avait à intégrer

$$\int \frac{x\,dx}{1+(ax+b)^{\frac{m}{n}}}$$

on poserait $(ax+b) = z^n$ d'où $(ax+b)^{\frac{m}{n}} = z^m$

et $a\,dx = nz^{n-1}dz$ donc $dx = \frac{nz^{n-1}}{a}$. remplaçant dans la fon ci-dessus, on obtient

$$\int \frac{\frac{z^n-b}{a^2}\cdot nz^{n-1}dz}{1+z^m} = \frac{x}{a^2}\int \frac{z^{n-1}(z^n-b)\,dz}{1+z^m}.$$

Expon rationnelle que l'on sait intégrer.

<u>Généralement</u>, si l'on a $f(x,u)$ à intégrer $u$ étant égal à $(ax+b)^{\frac{1}{n}}$. on pourra comme

précédt pour $ax+b=u^n$ et ramener l'intégon de cette fon à celle de



$$\frac{n}{a}\int f\left(\left(\frac{u^n-b}{a}\right), u\right) u^{n-1}\,du.$$

---

Soit à intégrer $\int f(x,u)\,dx$, $u=\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{1}{n}}$.

alors on a $(a'x+b')u^n = ax+b$. d'où $x=\frac{b-b'u^n}{a'u^n-a}$.

or $x$ est rationnel en $a$. on parviendra donc à remplacer l'intégrale ci-dessus par

$$\int \varphi(u)\,du.$$

rationnelle en $u$. ainsi on saura intégrer en ft $n=\frac{1}{2}$.

$$\int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{1}{2}}\right) dx. \quad (1)$$

mais si on fait $\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{1}{2}}=u$ et qu'on multiplie les 2 membres par $a'x+b'$. on aura $u(a'x+b')=\{(ax+b)(a'x+b')^{\frac{1}{2}}\}$ $=(Ax^2+Bx+C)^{\frac{1}{2}}$. d'où $u=\frac{1}{(a'x+b')}\sqrt{Ax^2+Bx+C}$

donc réciproquement on voit que toutes les fois qu'on aura une Expon

$$f(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}.)$$

renfermant un radical du 2d dégré. ~~qui par le~~ décomposable en 2 facteurs $(ax+b)$, $(a'x+b')$ du second dégré, on pourra la ramener à la forme (1) et par conséquent l'intégrer. ~~Cette~~ Expon sera remplacée par celle-ci

$$f\left(x, (a'x+b')\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Expon intégrable par les considérations précédentes.

il est vraisemblable que la possibilité de l'intégration dépend par des décompositions des facteurs du second degré en facteurs du 1er nous allons chercher un moyen pour intégrer immédiatement une expression

$$\int f(x, \sqrt{Ax^2+Bx+c})\,dx.$$

il existe 2 méthodes pour faire disparaître l'irrationalité

1er moyen. je fais $\sqrt{Ax^2+Bx+c} = z \pm A^{\frac{1}{2}}x$.

en élevant au carré $Bx+c = z^2 - 2A^{\frac{1}{2}}zx$.

Expression rationnelle en $x$. $x = \dfrac{z^2-c}{B+2A^{\frac{1}{2}}z}$.

le radical ainsi que $dx$ pourront donc s'exprimer rationnellement en $z$ on parvient la fonction proposée

2d moyen. je pose

$$\sqrt{Ax^2+Bx+c} = c^{\frac{1}{2}} - zx.$$

d'où $Ax+B = x z^2 - 2c^{\frac{1}{2}}z$. Expression rationnelle en $x$.

$x = \dfrac{B+2c^{\frac{1}{2}}z}{A-z^2}$. parvient $dx$ et le radical sont rationnels. donc l'expression proposée le sera.

Exemple. soit à chercher $\int \dfrac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+c}}$.

soit $z = A^{\frac{1}{2}}x + \sqrt{Ax^2+Bx+c}$. $dz = \left(A^{\frac{1}{2}} + \dfrac{Ax+\frac{1}{2}B}{\sqrt{Ax^2+Bx+c}}\right)dx$

$= \dfrac{A^{\frac{1}{2}}z + \frac{1}{2}B}{\sqrt{Ax^2+Bx+c}}\,dx$. donc $dx =$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+c}} = \int \frac{dz}{A^{\frac{1}{2}}z+\frac{1}{2}B} = \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} \int \frac{A^{\frac{1}{2}}\,dz}{A^{\frac{1}{2}}z+\frac{1}{2}B}$$

$$= \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} l\left(\tfrac{1}{2}B+z\right) = \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} l\left(\tfrac{1}{2}B + Ax + A^{\frac{1}{2}}\sqrt{Ax^2+Bx+c}\right).$$

ou intégrera comme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

on pose $\sqrt{x^2+1} = z - x$. d'où $z = x + \sqrt{x^2+1}$.

$dz = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx = \frac{z\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$. donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dz}{z} = l(z) = l\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

on pourrait de même intégrer

$$\int f(u, v, w \ldots).$$

si $u = (ax+b)^{\frac{1}{2}}$ $v = (a'x+b')^{\frac{1}{2}}$ $w^m = (a''x+b'')^{\frac{1}{2}}$ ...

en ramenant tout à $z$ variable et traitant le résultat comme nous venons de le faire.

---

Leçon du 21 février

## intégration des Différentielles Binômes.

je rappelle que l'on sait intégrer

$$\int x^{m-1}(ax^n+b)^{\frac{p}{q}}\,dx.$$

on fait $x^n = z$; $x^m = z^{\frac{m}{n}}$. et $n l x = l.x$ d'où $\frac{n\,dx}{x} = \frac{dz}{z}$.

l'exp$^{on}$ ci-dessus devient puisque $\int x^{m-1}dx = \frac{1}{n} z^{\frac{m}{n}-1} dz$

$$\int z^{\frac{m}{n}-1}(az+b)^{\frac{p}{q}} \cdot \frac{1}{n}\frac{dz}{z} \cdot z^{\frac{m}{n}}.$$

qui se réduit à

$$\frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}-1}(az+b)^{\frac{p}{q}}\,dz.$$

Exp$^{on}$ qui ne contient plus qu'un facteur linéaire $az+b$. donc on pourra par les méthodes précédentes ramener cette exp$^{on}$ à une fonction rationnelle et parconséquent l'intégrer. toutes les fois que $\frac{m}{n}$ ou $\frac{p}{q}$ seront entiers. ou que $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ le sera

ces deux cas sont évidemment vrais. pour démontrer que cela a lieu quand $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ est entier. on observera qu'on peut mettre l'exp$^{on}$ obtenue sous la forme

$$\int x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1} \left(\frac{ax+b}{x}\right)^{\frac{p}{q}} dx$$

et faisant $\frac{ax+b}{x} = u^q$ on fait disparaître l'irrationnalité

Gt. si l'on a

$$\int (ax+b)^{\mu} (a'x+b')^{\nu} dx.$$

on pourra le ramener à une forme rationnelle quand $\mu$ et $\nu$ exp$^{ts}$ des fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$. leur somme $\mu+\nu$ sera un nombre entier. car cette intégrale peut s'écrire

$$\int (ax+b)^{\mu+\nu} \left(\frac{a'x+b'}{ax+b}\right)^{\nu} dx.$$

et en faisant $\frac{a'x+b'}{ax+b} = z^q$ on aura une fonction rationnelle.

---

Il s'agit à chercher

$$\int (ax+b)^{\mu} (a_1x+b_1)^{\nu} dx = A.$$

on veut tout l'avantage qu'il y aurait à diminuer les exposants et à ramener ainsi l'intégrale ou des différentielles binomes à des intégrales beaucoup plus simples.

Méthode pour diminuer un exposant $\nu$ quelconque aussi grand l'autre d'une unité.

elle est fondée sur l'intégration par parties c'est à dire que $\int u dv = uv - \int v du$. (1)
il faut donc tacher de ramener l'exp$^{on}$ à intégrer sous cette forme. et pour cela j'observerai que

$d(ax+b) = a\,dx$. d'où $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$.



remplaçant on a à intégrer.

$$\frac{1}{a}\int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu} d(ax+b).$$

pour la comparer à (1). on suppose $(a_1x+b_1)^{\nu} = u$.

et $(ax+b)^{\mu} d(ax+b) = dv$.

alors on cherche les parties composantes $uv$, et $\int v\,du = \int uvd(lu)$

pour obtenir $uv$ il faut chercher $v$. mais il faut remarquer que

$$d\left\{\frac{(ax+b)^{\mu+1}}{\mu+1}\right\}.$$

reproduit $dv$. on aura $\frac{(ax+b)^{\mu+1}}{\mu+1} = v$.

donc $uv = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{\mu+1}$.

pour trouver $\int vdu$ il faut calculer $d.l(u)$. or

$lu = \nu l(a_1x+b_1)$ donc $d.l(u) = \frac{\nu a_1 dx}{a_1x+b_1}$.

donc

$$\int uv\,d(lu) = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{\mu+1}\cdot\frac{\nu a_1 dx}{a_1x+b_1}$$

$$= \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu-1}\cdot \nu a_1 dx}{\mu+1}$$

substituant on aura

$$A = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{a(\mu+1)} - \frac{\nu a_1}{(\mu+1)a}\int (ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu-1} dx$$

on aurait pu diminuer $\mu$ de 1 et aug$^{r}$. $\nu$ de 1. et l'on aurait obtenu le même résultat en changeant $a$ et $b$ en $a_1$; $b_1$; $\mu$ en $\nu$. et réciproquement.

$$A = \frac{(a_1x+b_1)^{\nu+1}(ax+b)^{\mu}}{a_1(\nu+1)} - \frac{\mu a}{(\nu+1)a_1}\int (a_1x+b_1)^{\nu+1}(ax+b)^{\mu-1} dx$$

Voilà les deux formules cherchées elles ont lieu qq.e soit le signe des exposants ~~pourvu~~ on voit qu'elles ne seront utiles qu'autant que les exposants seront de signe contraire, puisque un exposant diminuant, l'autre augmenterait si les exposants étaient de même signe.

Formules pour diminuer l'exposant de l'un des facteurs sans toucher à l'autre dans l'exp.on

$$\int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}dx = A \quad (1)$$

il faut, comme précédemment faire usage de l'intégration par parties. et pour cela je fais

$$d(a_1x+b_1) = a_1dx. \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{1}{a_1}d(a_1x+b_1).$$

remplaçant il vient

$$\frac{1}{a_1}\int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}d(a_1x+b_1)$$

on peut mettre cette exp.on sous une autre forme, de manière à introduire une des 2 fractions $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$, $\frac{a_1x+b_1}{ax+b}$. la 1.re quand on veut diminuer l'exposant $\mu$ de 1 et la 2.de quand on veut diminuer $\nu$. ... on a

$$\frac{1}{a_1}\int\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\mu+\nu}d(a_1x+b_1). \quad (2)$$

pour la comparer à la formule de l'intégration par parties je fais

$$u = \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu} \quad \text{et} \quad (a_1x+b_1)^{\mu+\nu}d(a_1x+b_1) = dv.$$

il faut comme précédemment obtenir $uv$ et $\int uv\,dl(u)$. on tire de ces hypothèses.

$$l(u) = \mu\{l(ax+b) - l(a_1x+b_1)\}. \text{ donc } \frac{du}{u} = \mu\left\{\frac{adx}{ax+b} - \frac{a_1dx}{a_1x+b_1}\right\}$$

$$= \frac{\mu(ab_1-a_1b)dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)} = d.l(u).$$

La 2de donne par l'intégon immédiate.

$$d.\left\{\frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}}{\mu+\nu+1}\right\} = dV. \quad \text{donc}$$

$$\nu = \frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}}{\mu+\nu+1}.$$

remplaçant dans l'Eqon (2). qui est égale à l'Eqon (1).

on a

$$A = \frac{1}{a_1}\left\{\frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}}{\mu+\nu+1}\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu} - \int\frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}}{\mu+\nu+1}\frac{(ax+b)^{\mu}}{(a_1x+b_1)^{\mu}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\mu(ab_1-a_1b)\,dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)}\right\}.$$

réduisant on obtient

$$A = \frac{(a_1x+b_1)^{\nu+1}(ax+b)^{\mu}}{(\mu+\nu+1)a_1} - \frac{\mu(ab_1-a_1b)}{(\mu+\nu+1)a_1}\int(a_1x+b_1)^{\nu+1}(ax+b)^{\mu-1}dx$$

on obtiendrait ~~un même~~ résultat analogue en changeant $a$ et $b$ en $a_1$ et $b_1$ $\nu$ en $\mu$ &a et réciproquement. et l'on aurait

$$A = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{(\mu+\nu+1)a} - \frac{\nu(a_1b-ab_1)}{(\mu+\nu+1)a}\int(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu-1}dx.$$

voilà les formules cherchées elles peuvent être utiles quand les exposants sont positifs.

quand on a des exposants négatifs il faut chercher des formules qui augmentent un exposant sans augmenter l'autre.

soit toujours $\int(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}dx = A.$

il faut toujours la ramener à une formule propre à l'intégon par parties : on peut l'écrire d'une autre manière en observant que

$$dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right) = \frac{d\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)}{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}} = \frac{a\,dx}{ax+b} - \frac{a_1\,dx}{a_1x+b_1} =$$

$$= \frac{ab_1 - a_1 b}{(ax+b)(a_1x+b_1)} dx \quad \text{donc}$$

$$d\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right) = \frac{ax+b}{a_1x+b_1} \left\{\frac{(ab_1 - a_1 b)}{(ax+b)(a_1x+b_1)}\right\} dx.$$

réduisant

$$d\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right) = \frac{(ab_1 - a_1 b)}{(a_1x+b_1)^2} dx. \quad \text{d'où } dx = \frac{(a_1x+b_1)^2}{(ab_1-a_1b)} d\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)$$

mettant au lieu de $dx$ sa valeur dans A. on aura

$$A = \frac{1}{ab_1-a_1b} \int (ax+b)^{\mu} (a_1x+b_1)^{\nu+2} d\frac{ax+b}{a_1x+b_1}.$$

pour pouvoir enfin comparer cette f^on à la formule de l'intég^on par partie il faut mettre A sous la forme

$$A = \frac{1}{ab_1-a_1b} \int \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu} (a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2} d\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$$

je fais

$$u = (a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu} d\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = dv.$$

pour former $uv$ et $\int (uv\,dlu.)$. il faut avoir $v$ et $d\,l(u)$. on tire des Exp^ons précédentes

$$l(u) = \mu+\nu+2\; l(a_1x+b_1). \quad \text{donc}$$

$$d\,l(u) = \frac{(\mu+\nu+2)\,a_1 dx}{a_1x+b_1}.$$

et de la 2^de

$$v = \frac{\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

remplaçant on a

$$uv = \frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2} \cdot \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1}}{\mu+1}$$

et

$$\int uv\,d(lu) = \int \frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2} \cdot \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1}}{\mu+1} \cdot \frac{(\mu+\nu+2)\,a_1 dx}{a_1x+b_1}$$

Réduisant ces Exp^ons et substituant dans A. on obtient

$$A = \frac{(ax+b)^{\mu+1}\cdot(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)} - \frac{(\mu+\nu+2)a_1}{\mu+1\,(ab_1-a_1b)} \times$$

$$\times \int (ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx.$$

changeant a et b en $a_1$ et $b_1$ &c... on aura

$$A = \frac{(a_1x+b_1)^{\nu+1}(ax+b)^{\mu+1}}{\nu+1\,(a_1b-ab_1)} - \frac{(\mu+\nu+2)a}{\nu+1\,(a_1b-ab_1)} \times$$

$$\times \int (a_1x+b_1)^{\nu+1}(ax+b)^{\mu}\,dx.$$

formules cherchées.

On pourra au moyen de ces formules diminuer successivement les exposants ou les augmenter de manière à ramener dans certain cas des Exp^ons Binomes à celles que l'on sait intégrer.

---

Lecon du 25 février

Intégration de quelques exp^ons transcendantes.

on pourra en général intégrer une exp^on $\int f(x)\,dx$. x étant une Exp^on transcendte et $f(z)$ une f^on algébrique car alors il suffira de poser $x=z$ et l'on aura $f(x)dx$ qui sera exprimés algébriquement en z. on aura $\int \varphi(z)\,dz$.

qu'on pourra intégrer plusieurs fois d'après les principes connus.

Exemple. soit $\int f(e^x)\,dx$. on fait $e^x = z$. et l'on a $dx = \frac{dz}{z}$. donc on aura

$$\int f(z)\frac{dz}{z}.$$

il est des cas où $\frac{f(z)}{z}$ est intégrable alors $f(e^x)dx$ le sera.

—

De même $\int f(\operatorname{arctang} x)\frac{dx}{1+x^2}$ peut être remplacée par $\int f(z)dz$. en faisant $\operatorname{arctang} x = z$ d'où $dz = \frac{dx}{1+x^2}$

—

où aussi. $\int f(\arcsin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(z)dz$ si $\arcsin x = z$. —

—

$\int f(\sin x)\,dx = \int f(z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. qu'on sait intégrer.

—

Si l'on a $\int f(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots)\,dx$.

$\sin 2x$, $\cos 2x$ .. &a peuvent s'exprimer en $\sin$, et $\cos x$, et l'on peut la ramener à

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx. \quad (1).$$

et si l'on fait $\sin x = z$ $\cos x = \sqrt{1-z^2}$. l'on a à intégrer

$$\int f(z, \sqrt{1-z^2})\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Expon qui ne contient qu'un radical du 2d degré, et qu'on saura par conséquent intégrer par les moyens précédents.

(1) pourrait aussi s'intégrer en ramenant la fon sous le signe $\int$ à une autre forme. je fais $\sin x = z^{\frac{1}{2}}$ $\cos x = (1-z)^{\frac{1}{2}}$ et (1) devient

$$\int f\left(z^{\frac{1}{2}}, (1-z)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

qu'on sait également intégrer.

—. soit $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctang} e^x + c$.

en fesant $e^x = z$. —

$$-\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = A. \quad \text{si } e^x = z. \text{ on a } A = \int \frac{dz}{z^2-1}.$$

on décompose en facteurs et l'on a

$$A = \int \frac{A_0}{z-1} dz + \int \frac{A_1}{z+1} dz.$$

on trouvera $A_0, A_1$ en faisant successivement $z=1$, $z=-1$ dans

$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{1}{2z}$. ainsi.

$$A = \int \frac{1}{z(z-1)} dz + \int \frac{dz}{z(z+1)} = \frac{1}{2} l(z-1) - \frac{1}{2} l(z+1)$$

donc

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2} l \frac{e^x-1}{e^x+1} + C.$$

Si l'on cherche $\int \sin^m x \cos^n x dx$. met $n$ étant entier.

on pose $\sin x = z$. $\cos x = \sqrt{1-z^2}$ donc $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

remplaçant on a;

$$\int z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz.$$

Cqfd que l'on sait intégrer.

on serait arrivé aux mêmes conclusions, en posant

$$\sin x = z^{\frac{1}{2}} \qquad \cos x = (1-z)^{\frac{1}{2}}. \qquad dx = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

on a

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} \int z^{\frac{m-1}{2}} (1-z)^{\frac{n-1}{2}} dz.$$

fcc rationnelle si $\frac{m-1}{2}$ ou $n-1$ sont pairs ou bien leur somme mais tout l'un ni l'autre n'est pair leur sommes est un nombre pair. on pourra donc toujours intégrer une Exp$^{on}$ de cette forme.

Si l'on a $\int \cos^n x dx$. à intégrer, on peut remplacer $\cos^n x$ par la valeur trouvée dans l'analyse algébrique.

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left( \cos nx - \frac{n}{1} \cos(n-2)x + \dots \right).$$

donc

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \int \cos nx dx - \frac{n}{1} \int \cos(n-2)x dx + \&^{ca} \right.$$

voir le cours d'analyse de Cauchy page 124

mais on sait que —

$$\int \cos x\,dx = \sin x \quad \text{et} \quad \int f(ax)\,dx = \frac{f(ax)}{a}.$$

donc — on a ...

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \cdots\right.$$

Même pour trouver $\int \sin^n x\,dx$. on remplace $\sin^n x$ par sa valeur. on sait que lorsque $n$ est pair.

$$\sin^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-3)x + \cdots\right.$$

donc

$$\int \sin^n x\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{-\frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\sin(n-2)x}{n-2} - \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}\,\frac{\sin(n-4)}{n-4}\cdots\right.$$

on trouverait des formules analogues si $n$ était impair.

si l'on voulait chercher (1) $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ par des moyens semblables. on remplacerait $\cos^n x$ et $\sin^n x$ par leurs valeurs. et l'on aurait à intégrer des produits de la forme.

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx, \quad \text{et} \quad \int \cos(mx)\cos(nx).$$

pour cela, on les met sous la forme —

$$\sin mx \cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}.$$

donc

$$\int \sin mx \cos nx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin(m+n)}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(m-n)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{m-n}{m-n}\right)x + c.$$

de même pour l'autre

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\cos(m+n)x + \frac{1}{2}\cos(m-n)x.$$

et par conséquent

$$\int \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(m-n)x}{m-n}.$$

On voit donc que fesant les produits convenables en remplaçant dans (1) $\sin^n x$ et $\cos^n x$ par leurs valeurs on pourra l'intégrer et obtenir l'intégrale cherchée.

—

on pourra généralement obtenir $\int P z^n dx$.
$P$ étant une f^on algébrique de $x$, $z$ une f^on transcendante dont la dérivée $z'$ soit f^on algébrique. or, comme les f^ons rationnelles ne donnent quand on les intègre que f^ons transcendantes que $z = lx$ et $z = \text{arc tang}(x)$. — je vais chercher dans quels cas il serait possible d'intégrer des fons qui renferment des exposans égales à $lx$ ou arc tang $x$, arc sin $x$ ... $x^n$ .. ou qui peuvent s'y ramener.

pour intégrer $\int P z^n dx$, au moyen de l'intég^on par parties

$$\int u\,dv = uv - \int v\,d(u)$$

je fais $\int P dx = Q$, $z^n = u$ $dv = P dx$. d'où $v = Q$. donc —

$$\int P z^n dx = Q z^n - \int Q n z^{n-1} z' dx = Q z^n - n \int Q z' z^{n-1} dx$$

si donc $z'$ est une f^on algébrique on sera par ce moyen intégrer la f^on transcendante proposée
car je fais de même,

$$\int Q z' dx = R \qquad \text{ici } z^{n-1} = u, \text{ et } v = R.$$

donc $\int Q z' z^{n-1} dx = R z^{n-1} - (n-1) \int R z' z^{n-2} dx$.

Continuant ainsi, on parviendra qq^e fois à faire disparaître la transcendante, on a —

$$\int P z^n dx = Q z^n - n R z^{n-1} + n(n-1) S z^{n-2} + n.n-1.n-2 T z^{n-3} + \&^a.$$

app^on ~~cité~~ ~~$z = lx$~~. Soit $\int x^m (lx)^n dx$. on a ici
$z = lx$, $P = x^m$, $Q = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $R = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$, $S = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$
remplaçant dans la formule ci-dessus, on a

(Sang) $$\int x^m (lx)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left\{ (lx)^n - \frac{n (lx)^{n-1}}{m+1} + \frac{n.n-1}{(m+1)^2} (lx)^{n-2} - \cdots + c \right.$$

Dans plusieurs cas on peut par des transformations ramener la fon proposée à cette forme ou à celle qu'on sait être intégrables par ce moyen.

$\int x^n e^{mx} dx$ devient $\int (lz)^m z^m dz$ il faut $e^x = z$.

de même $\int x^m \cos mx\, dx$ et $\int x^m \sin mx\, dz$. peuvent être transformées en fonctions renfermant $\sin x$ ou $\arccos x$ dont les dérivées sont algébriques.

Leçon du 26 février.

On peut au moyen de l'intégration par parties établir pour $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ les 6 formules d'intégration qu'on a établies pour les fonctions algébriques Binomes.

je vais d'abord chercher les formules pour augmenter l'exposant du sinus de 2 unités et diminuer en même temps de deux unités celui du cosinus.

on sait que l'intégration augmente l'exposant de la fon chaque fois que la Dée le diminue. il faut donc ici faire porter l'intégration sur $\sin x$ et la Dif$^{e}$ sur $\cos x$.

je fais donc $d.\sin x = \cos x\, dx$. $dx = \frac{d.\sin x}{\cos x}$.

il vient $\int \sin^m x \cos^{n-1} x\, d.\sin x = A$

faisant $u = \cos^{n-1} x$ $dv = \sin^m x\, d.\sin x$

pour intégrer par la formule $\int u\, dv = uv - \int v\, d(u)$.

$v = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$, $lu = n-1\ l.\cos x$, $d(lu) = (n-1)\frac{-\sin x}{\cos x} dx$.

donc (1) $A = \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx$.

formule qu'on se proposait de trouver. —

S'il s'agissait de diminuer de 2 unités l'exposant du sinus et d'augmenter de la même quantité celui du cosinus

on pose $d\cos x = -\sin x\, dx$. $dx = \frac{-d(\cos x)}{\sin x}$.

remplaçant on a —

$$A = -\int \sin^{m-1} x \cos^{n} x\, d\cos x. \qquad \sin^{m-1} x = u. \quad \cos^{n} x\, d\cos x = dv.$$

$$v = \frac{\cos^{n+1} x}{n+1}. \qquad lu = (m-1)\, l \sin x \qquad d.lu = \frac{(m-1)\cos x\, dx}{\sin x}.$$

$$-A = \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} - \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx.$$

ou (2) $A = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx.$

Ces formules (1) et (2) sont propres à résoudre les questions énoncées.

Je suppose qu'on veuille diminuer l'exposant du sinus des deux unités sans toucher à celui du cosinus.

je fais $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{m-1} = u$. on peut écrire l'exp$^{on}$ proposé ainsi $\int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{m} \cos^{m+n} x\, dx$. posant $d\cos x = -\sin x\, dx$. $\frac{d\cos x}{\cos x} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$.

on a $-\int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{m-1} \cos^{m+n-2} x \frac{\cos x}{\cos x} = A$.

je pose $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{m-1} = u$. $dv = \cos^{m+n-1} x\, d\cos x$ d'où $v = \frac{\cos^{m+n} x}{m+n}$.

$$lu = m-1\, l\frac{\sin x}{\cos x} \qquad du = m-1\left\{\frac{d.\sin x}{\sin x} - \frac{d\cos x}{\cos x}\right) =$$

$$= m-1\left\{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{m-1}{\sin x \cos x}.$$

remplaçant —

(3) $A = -\frac{\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^{n} x\, dx.$

formule cherchée.

si l'on veut diminuer l'exposant du cosinus sans toucher à celui du sinus, il faut faire porter la Diff.on sur $\frac{\cos x}{\sin x}$ et l'intégration sur $\sin x$.

je pose $d \sin x = \cos x \, dx$. donc

$$A = \int \sin^m x \cos^n x \, d.\sin x = \int \sin^{m+n-1} x \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{n-1} d.\sin x.$$

soit $u = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{n-1}$ $dV = \sin^{m+n-1} d\sin x$, $d'où V = \frac{\sin^{m+n} x}{m+n}$

$lu = n-1 . l\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ $d.lu = n-1 \left\{ \frac{d\cos x}{\cos x} - \frac{d\sin x}{\sin x} \right\} =$

$= n-1 \left\{ \frac{-dx}{\sin x \cos x} \right\}$. donc

$$(4) A = \frac{\sin^{m+1} \cos^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

formule cherchée

soit proposé d'augmenter l'exposant du sinus de 2 unités sans toucher à l'autre.

je pose $d \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{dx}{\cos^2 x}$ $dx = \cos^2 x \, d \frac{\sin x}{\cos x}$

$$A = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^m \cos^{m+n+2} x \, d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right).$$

je fais $\cos^{m+n+2} x = u$.

$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^m d \frac{\sin x}{\cos x} = dV$ $d'où V = \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{m+1}}{m+1}$.

$lu = m+n+2 \, l\cos x$ $d(lu) = m+n+2 \frac{d.\cos x}{\cos x} =$

$= -\frac{(m+n+2) \sin x \, dx}{\cos x}$ donc

$$(5) A = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x \, dx.$$

formule cherchée.

si l'on veut augmenter l'exposant du cosinus d'une toucher à celui des sinus.

on pose $\int \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{dx}{\sin^2 x}$. d'où $dx = -\sin^2 x\, d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

et l'on met A sous cette forme

$$A = -\int \sin^{m+n+2} x \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^n d\,\frac{\cos x}{\sin x}$$

faisant $\sin^{m+n+2} x = u$, $dV = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^n d\,\frac{\cos x}{\sin x}$ ou a $V = \frac{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{n+1}}{n+1}$.

$du = m+n+2 \cdot \sin x$. $du = \frac{(m+n+2)\cos x\, dx}{\sin x}$.

on aura donc

$$(6) - A = \frac{\sin^{m+n+2} x \cos^{n+1} x}{n+1} - \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x\, dx.$$

Ces formules (1), (2), (3), (4), (5), (6). sont propres à intégrer la formule A proposée.

En donnant les exposants m et n de $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$. on peut ramener cette Exp$^{on}$ à l'intégration de l'une des 8 formules suivantes

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x\, d\sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

$$\int \sin x\, dx = \cos x + C \qquad \int \cos x\, dx = -\sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}l\tan\frac{x}{2} \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}l\tan\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\frac{1}{2}l\cos^2 x + C \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin x}$$

on voit intégrer chacune de ces Exp$^{ons}$ aura donc dans tous les cas intégré la formule $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

SORBONNE

Leçon du 1er mars.

# Intégration des fonctions à deux variables.

Si l'on a à intégrer $\int f(x,y)$. on peut considérer $y$ comme constante. et l'on aura par conséquent

$$\int f(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx + c.$$

théorème. on sait que $\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx = F(x,y)$ (1) démontrer qu'on différentie le 2d membre par rapport à $y$ en différentiant l'expon sous le signe $\int$. c.à.d. qu'on a toujours.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.$$

en effet soit $w = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx = F(x,y)$. $\Delta y$ l'accroisst de $y$ et $\Delta_y w$ celui de $w$. $\Delta y = \alpha\,dy$ $\alpha$ étant une quantité infiniment petite qui converge vers $0$. si je fais varier $y$ de $\Delta y$ dans $w$. j'aurai

Gueilly de Mr Cauchy Leçon 33e. Page 129.

$$w + \Delta_y w = \int_{x_0}^{x} \{f(x,y) + \Delta_y f(x,y)\}\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx + \int_{x_0}^{x} \Delta_y f(x,y)\,dx.$$

donc

$$\Delta_y w = \int_{x_0}^{x} \Delta_y f(x,y)\,dx.$$

Divisant par $\alpha$. on a

$$\frac{\Delta_y w}{\alpha} = \int_{x_0}^{x} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\alpha}\,dx.$$

donc à la limite

$$D_y w = \int_{x_0}^{x} \partial_y f(x,y)\,dx.$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$ C.Q.F.D.

Exemple.

on sait que $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$. et

$$\int_{x_0}^{x} e^{ax} = \frac{e^{ax} - e^{ax_0}}{a}$$

Concevons que $a$ varie indépendamment de $x$. d'après le théorème précédemment on aura.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial . e^{ax}}{\partial a} dx = \partial \left\{ \frac{e^{ax} - e^{ax_0}}{a} \right\}.$$

or $\frac{\partial e^{ax}}{\partial a} = x e^{ax}$ donc . puisque $\partial \frac{e^{ax_0}}{a}$ est $0$.

on a $\int x e^{ax} dx = \frac{\partial \left( \frac{e^{ax}}{a} \right)}{\partial a} + c$ (2).

puisque l'on a démontré ce théorème entre $x_0$ et $x$ — on peut dire que généralement.

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} + c.$$

on effectuant les calculs indiqués dans l'Eq on (2).

on a

$$\int x e^{ax} dx = e^{ax} \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) + c.$$

et si $a = 1$. on a

$$\int x e^{x} dx = e^{x} (x - 1) + c.$$

résultat qu'on aurait obtenu de même au moyen de l'intégration par parties.

Corollaire. on a trouvé que

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.$$

en posant $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = u$ et $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = u$ et raisonnant de même. on voit que l'on a le résultat suivant

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,dx = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}.$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\,dx = \frac{\partial^3 F(x,y)}{\partial y^3}$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial^n y}\,dx = \frac{\partial^n F(x,y)}{\partial y^n}.$$

<u>Exemple.</u> en appliquant ce principe à l'exemple précédent on a

$$\int \frac{\partial^n (e^{ax})}{\partial a^n}\,dx = \frac{\partial^n (a^{-1} e^{ax})}{\partial a^n} + c.$$

il s'agit d'avoir la Dée n^e parrapp^t à y du second membre. or

$$\frac{\partial e^{ax}}{\partial a} = x e^{ax};\quad \frac{\partial^2 e^{ax}}{\partial a^2} = x^2 e^{ax} \ldots \quad \frac{\partial^n e^{ax}}{\partial a^n} = x^n e^{ax}$$

mais on a trouvé généralement dans le calcul Diff^el que

$$\partial^n uv = u\partial^n v + \frac{n}{1}\partial u\,\partial^{n-1} v + \frac{n.n-1}{1.2}\partial^2 u\,\partial^{n-2} v + \ldots$$

On aura donc en appliquant ce principe

$$\frac{\partial^n a^{-1} e^{ax}}{\partial a^n} = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{a^2} x^{n-1} e^{ax} + \ldots$$

$$\pm \frac{n.n-1 \ldots 3.2.1.}{a^n}.$$

donc enfin

$$\frac{\partial^n a^{-1} e^{ax}}{\partial a^n} + c = \int \frac{\partial^n (e^{ax})}{\partial a^n}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a}\left(1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2 x^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{a^n x^n}\right).$$

on a trouvé la valeur de $\int x^n e^{ax}\,dx$ dans la feuille 119 de cors 30^e

tout ce qu'on vient de dire sur les intégrales indéfinies a également lieu pour une intégrale définie, ainsi

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}.$$

Exemple. ainsi on a —

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = +\frac{1}{a}$$

D'où de nouveau on a —

$$\int_0^\infty x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2}.$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{ax} dx = \frac{1.2}{a^3}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{ax} dx = \frac{1.2 \cdots n}{a^{n+1}}.$$

Si $a = 1$ on a

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = 1.2.3 \cdots n.$$

dans le calcul on se sert beaucoup de cette formule — Ainsi représentée

$$\int_{x_0}^{x} x^{u-1} e^{-x} dx = \Gamma(u).$$

---

## Intégration sur le signe $\int$.

Il s'agit ici d'une fonction $f(x,y)$ qu'on a intégrée depuis $x_0$ et $x$ et le résultat depuis $y_0$ et $y$ Ce qui s'indique ainsi

$$\int_{y_0}^{y} \int_{x_0}^{x} f(x,y)\, dx\, dy$$

je dis qu'on peut intégrer d'abord par rapport à $x$ ensuite par rapport à $y$ et qu'on obtiendra le même résultat qu'en intégrant d'abord par rapport à $y$ et ensuite par rapport à $x$. on

$$\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx \quad (1)$$

je pose

$$\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy = u.$$

d'après ce qu'on vient de voir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy.$$

intég$^t$ par rapp$^t$ à $x$ seulement on a

$$u = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx + c_0$$

donc la prop$^{on}$ (1) est démontrée. si $c_0 = 0$ mais cela n'arrive que lorsque la f$^{on}$ que l'on intègre est continue entre $x_0$ et $x$. comme nous le verrons tout-à-l'heure.

pour déterminer $c_0$ il faut en égalant les deux valeurs de $u$

$$\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx + c_0$$

faire $x = 0$ on a

$$0 = c_0.$$

ainsi le théorème est donc démontré quand on a $c_0 = 0$.

Exemple. On a trouvé,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}.$$

Ainsi on voit que —

$$\int_0^\infty \left(\int_1^\infty e^{-ax}\,dx\right) da = \int_1^\infty \left(\int_0^\infty \frac{x}{a}\,da\right) = lx.$$

Mais le 1er membre peut se mettre sous une autre forme en observant que

$$\int_1^\infty e^{-ax}\,da = \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}.$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}\,dx = lx.$$

intégrale dont on n'aurait pas déterminé la valeur sans le théorème établi ci-dessus.

Nous avons vu précédemment qu'on pouvait dans les intégrales doubles commencer à intégrer par rapport à x ou par rapport à y et qu'on obtenait le même résultat. Il est des cas où cette règle est en défaut. En effet:

Leçon du Mardi 4 Mars 1823.

si l'on cherche $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx$. on trouve $\frac{\pi}{4}$.

et — $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = -\frac{\pi}{4}$.

On trouve cette intégrale, en observant que

$$\frac{d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{dy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

l'erreur que l'on a commise ne tient ici que dans la détermination de la Constante, dans le passage de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie entre les limites 0 et 1. L'on a supposé pour l'égale à 0 qu'elle ne changeait pas de valeur avec x. parce qu'elle était indépendante. Nous allons faire voir qu'il existe des cas où cette Constante, (que nous continuerons d'appeller ainsi par analogie), peut être fonction de x et que

cela ne peut avoir lieu que lorsque la fon dont on cherche l'intégrale est discontinue.

Nous rappellerons d'abord ici, que l'Eqn qu'on a voulu satisfaire à

$$dy = f(x)\,dx. \quad (1)$$

$f(x)$ étant continue, on a démontré que la valeur de $y = F(x)$ devait être telle que $F'(x) = f(x)$. — je dis $y = F(x) + c$. $c$ étant une constante invariable satisfait à la cond$^{on}$ car soit

$$y = F(x) + \varpi x. \quad (2)$$

une valeur propre à satisfaire l'Eq$^{on}$ (1). il faut évid$^{t}$ qu'elle soit continue ; car supposons-la discontinue. elle représente une courbe dont $f(x)$ est la tang$^{te}$ — si donc une valeur de $x$ substituée dans (2) rendait $y = \frac{1}{0}$. la valeur ∞ par ex: pour cette abscisse — $f(x)$ serait aussi infinie, ce qui est contre l'hypothèse puisque nous avons supposé $f(x)$ continue. Ainsi — y est une fonction continue. Mais pour satisfaire à (1) il faut que

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + \varpi'(x) = F'(x) = f(x).$$

mais $f'(x) = f(x)$. il faut donc que $\varpi'(x) = 0$.

or pour que la Dérivée d'une fonction continue $\varpi x$ soit nulle il faut que $\varpi(x)$ soit une constante, car on a démontré que

$$\frac{\varpi(x) - \varpi(x_0)}{x - x_0} = \varpi'(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

si donc $\varpi'(x) = 0$. $\varpi(x) - \varpi(x_0) = 0$. donc $\varpi(x)$ est

une constante.



Supposons que $f(x)$ soit discontinue entre certaines limites entre $x=1$, $x=-1$. par ex: les raisonnements que nous venons de faire pour prouver que — dans

$$y = F(x) + C.$$

C est ~~une~~ constante indépendante de x ne sont plus applicables, car il peut arriver que y soit discontinue entre les mêmes limites. alors

$$y = f(x) + \varpi(x).$$

peut satisfaire à $dy = f(x)\,dx$ quelque $\varpi(x)$ soit fonction de x. en effet il peut arriver qu'elle soit de cette forme

$$\varpi(x) = \frac{c_0 - c_1}{2} + \frac{c_1 + c_0}{2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2}}.$$

et l'on aura cependant $\varpi'(x) = 0$ et.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + \varpi'(x) = F'(x) = f(x).$$

Ainsi l'on voit que l'intégrale indéfinie se compose d'une exp^on $F(x)$ plus une quantité C. que l'on ne peut plus regarder comme constante entre les limites $x_0$ et $X$ par ex: la f^on que l'on veut intégrer $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$.

étant elle-même discontinue entre ces limites.

Dans cela prenant C comme constante de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie entre $x_0$ et $X$. on commettrait des erreurs, que nous apprendrons à rectifier dans

la leçon suivante

ainsi, $f(x)$ étant une f^on Discontinue depuis $x_0$ et $X$ mais offrant des solutions de continuité dans le voisinage des limites $(x_0, x_1), (x_1, x_2) \ldots (x_{n-1}, X)$ $x_1\ x_2 \ldots x_{n-1}$ étant compris entre $x_0$ et $X$ et rendant discontinue, la f^on

on peut dire,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \pi(x).$$

$\pi(x)$ pouvant prendre les valeurs constantes $c_0, c_1, \ldots c_n$ entre les limites $(x_0\ x_1) \ldots (x_1, x_2) \ldots$ &^a..
cela aura lieu par ex: si

$$\pi(x) = \frac{c_0 + c_m}{2} + \frac{c_0 - c_1}{2}\frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2}} \ldots \frac{c_{m-1} - c_m}{2}\cdot\frac{x - x_{m-1}}{\sqrt{(x-x)^2}}$$

On voit bien dans cet exemple que si l'on voulait revenir à $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$. il faudrait faire $x = X$, $x = x_0$ et retrancher les résultats. mais ici $\pi(x)$ change avec $x$ et devient $c_0$ et $c_m$ donc on ne peut plus en conclure la valeur qu'on avait trouvée de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

cela n'aura lieu qu'autant que la f^on $f(x)$ sera continue entre les limites $x_0$ et $X$.

Exemple de l'absurdité à laquelle on serait conduit, en opérant sur une exp^on discontinue, si on ne tenait pas compte des remarques précédentes. on trouverait

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -2.$$

résultat absurde, qui provient de ce que l'on a

13

105

Supposé dans $\pi(n)$ constante invariable

$$y = -\frac{1}{n} + \pi(n).$$

Qui est la valeur générale de l'intégrale indéfinie de $f(n)$.

---

Leçon du 6 mars 1823.

En intégrant par rapport à $x$ et ensuite par à $y$. Des exp.ns qui deviennent infinies pour $x = x_1$, $y = y_1$ ou parvient à un résultat. Nous allons donner sur la fon $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ un exemple du moyen que l'on devrait généralement employer pour corriger le résultat précédent.

On a trouvé dans la leçon précédente que

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx = +\pi.$$

ou $$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\, dx\, dy = -\pi.$$

il faut en intégrant d'une autre manière ramener la 2.de à la 1.re

j'ai $-1$, $-\varepsilon$, $+\varepsilon$, $x=1$.

pour valeurs de $x$ par ordre de grandeur depuis les limites $-1$ et $1$, donc avant de prendre l'intégrale entre $-1$ et $+1$ parrapport à $x$ je la prends entre $(-1, -\varepsilon)$ et $(+\varepsilon, +1)$. et le résultat parrapport à $y$ entre les limites $-1$ et $1$. je n'aurai par à craindre les erreurs, car elles ne proviennent que de ce qu'il y a des valeurs $x=0$ $y=0$ qui rendent la fon indéterminée. or ici j'aurai d'abord

$$(1)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\, dx = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\, dx$$

il faudra ensuite prendre l'intégrale entre $-1$ et $+1$. de ces résultats, parrapport à $y$. or les limites

Voilà ici $-1-\varepsilon$ pour $x$. $-1$ $+1$ pour $y$. L'intégrale qui ne comprend pas $x=0$ $y=0$. donc la constante $\pi(x)$. ne changera pas, et l'on n'a pas à craindre d'erreurs.

Exécutant les calculs indiqués dans (1). on a —

on peut intégrer $\int \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{-1}{1+y^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2} \quad \text{et}$$

$$\int_{+1}^{+\varepsilon} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2} - \frac{1}{1+y^2} \cdot \quad \text{donc} \quad —.$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx = -\frac{2}{1+y^2} + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}$$

intégrant cette Exp^on. par rapport à $y$ entre $-1$ et $+1$. on a —

$$\int_{-1}^{+1} \frac{-2\,dy}{1+y^2} = -2\left(\text{arc tang } y\right)_{-1}^{+1} = -2\left(\text{arc tang } 1 - \text{arc tang}(-1)\right)$$

$$= -2\left(\text{arc tang } 1 + \text{arc tang } 1\right) = -2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

de même $\int_{-1}^{+1} \frac{2\varepsilon\,dy}{\varepsilon^2+y^2} = 2\int_{-1}^{+1} \frac{d\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)}{1+\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^2} = 2\left[\text{arc tang}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \text{arc tang}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$

$= 2\pi$. donc —

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = +\pi.$$

on parvient donc par ce moyen au même résultat. Soit que l'on intègre d'abord par rapport à $y$ et ensuite par rapport à $x$, ou d'abord par rapport à $x$ et ensuite par rapp^t à $y$.

On aurait obtenu le 2^d résultat si on avait raisonné sur $y$ comme on l'a fait sur $x$. cela tient à l'indétermination de ces intégrales à 2 variables.

On vient de voir dans cet exemple que,

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = -\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}.$$

nous allons démontrer que cette loi a lieu généralement vraie pour toute Expon imaginaire.

Soit $f(x+y\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1}$. Diff. on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}\sqrt{-1} = f'(x+y\sqrt{-1}). \quad (1)$$

Différentiant par rapport à $y$. on a - - -

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\sqrt{-1} = f'(x+y\sqrt{-1})\sqrt{-1}. \quad (2).$$

Identifiant ces 2 Expons terme à terme, on arrive à la conclusion voulue

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Corollaire. En égalant (1) et (2). on obtient un théorème dont nous nous servirons tout-à-l'heure,

$$\sqrt{-1}\,\frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial x} = \frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial y}.$$

Théorème. Si l'on intégre par rapport à $y$ une Expon imag$^{re}$ entre les limites $y_0$ et $Y$ et ensuite par rapport à $x$ entre $x_0$ et $X$. (cette Expon imag$^{re}$ devenant infinie pour $x = x_1$ et $y = y_1$ comprises entre ces limites). on obtiendra un résultat. nous allons donner le moyen de parvenir au même résultat, en intégrant d'abord par rapport à $x$ et ce résultat par rapport à $y$.

Soit $\frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial y}$ l'Expon imag$^{re}$ proposée.

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial y}\,dy\,dx = \int_{x_0}^{X}\{f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})\}.$$

Si l'on commence à présent à intégrer cette expon par rapp. à $x$. on observera que l'on peut écrire cette Expon égale à

$$\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial x}\,dx\,dy=\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\{f(x+y\sqrt{-1}-f(x_0+y\sqrt{-1})+c$$

on ~~ne~~ pourra conclure que cette Expon est égale à l'autre parceque $c$ ne serait pas nul puisqu'il est ici fon de $x$ d'après ce que nous avons dit dans la précédente leçon.

nous allons chercher à corriger l'erreur et pour cela entre $x_0$ et $X$ j'insère $x_1-\varepsilon$ $x_1+\varepsilon$. et j'ai ...

$$\overline{x_0,\ x_1-\varepsilon};\quad \overline{x_1+\varepsilon,\ x_1}$$

qui sont par ordre de grandeur. $\varepsilon$ converge vers 0. en prenant d'abord l'intégrale entre $x_0$ et $x_1-\varepsilon$, ensuite entre $x_1+\varepsilon$ et $x_1$ et l'intégrale de ces deux là, entre les nouvelles limites $y_0$ et $Y$. je n'aurai pas à craindre d'erreur pour $c$. les raisonnements sont les mêmes que dans l'exemple $\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$. en effet on voit que l'on aura

$$(1)\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial x}\,dx\,dy=\int_{y_0}^{Y}\left\{\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon}\frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial x}\,dx+\int_{x_1+\varepsilon}^{X}\frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial x}\right.$$

et alors il n'y aura plus de valeur de $x$ entre les limites $x_0$ et $x_1-\varepsilon$ qui combinée avec $y_1$ entre $y_0$ et $Y$. qui rende la fon infinie donc $c$ sera une constante invariable, et il n'y aura pas d'erreur commise.

Exécutant les calculs indiqués on voit qu'il faut remplacer dans $f(x+y\sqrt{-1})$ valeur de l'intégrale indéfinie $\int\frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial x}\,dx$. $x$ par $x_0$ $x_1-\varepsilon$ ... et $x_1+\varepsilon$, $X$ ... on aura — pour (1).

$$\int_{y_0}^{Y}\Big\{f(x+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})\Big\}dy \int_{y_0}^{Y}\Big\{f(x_1-\varepsilon+y\sqrt{-1})+f(x_1+\varepsilon+y\sqrt{-1})\Big\}dy$$

Le 1er. donne en la valeur qu'on avait trouvée. La 2de intégrale qu'il s'agit de déterminer en donc l'erreur que l'on avait commise. ~~On voit~~ On voit que $x=x_1$ et $y=y_1$ rendant infinies $f(x+y\sqrt{-1})$. donc

$$\{x+y\sqrt{-1}-(x_1+y_1\sqrt{-1})\}(f(x+y\sqrt{-1})).$$

sera $\frac{0}{0}$ si $f_1$ en la vraie valeur, on aura

$$f(x+y\sqrt{-1})=\frac{f_1}{(x+y\sqrt{-1})-(x_1+y_1\sqrt{-1})}.$$

dans ce cas pour $x_1-\varepsilon$ mis pour $x$ on a

$$f(x_1-\varepsilon+y\sqrt{-1})=\frac{f_1}{-\varepsilon+(y-y_1)\sqrt{-1}}.$$

et $f(x_1+\varepsilon+y\sqrt{-1})=\frac{f_1}{+\varepsilon+(y-y_1\sqrt{-1})}$;

donc la somme en

$$\frac{-2\varepsilon f_1}{\varepsilon^2+(y-y_1)^2}.$$

il faut prendre l'intégrale entre $y_0$ et $Y$. on a donc

$$-2f_1\int_{y_0}^{Y}\frac{\varepsilon\,dy}{\varepsilon^2+(y-y_1)^2}=-2f_1\left\{\operatorname{arc\,tang}\frac{Y-y_1}{\varepsilon}-\operatorname{arc\,tang}\frac{y_0-y_1}{\varepsilon}\right\}$$

$$=-2f_1\left\{\operatorname{arc\,tang}\frac{Y-y_1}{\varepsilon}+\operatorname{arc\,tang}\frac{y_1-y_0}{\varepsilon}\right\}.$$

quand $\varepsilon=0$. on a $-2\pi f_1$. pour la valeur de cette intégrale.

et par conséquent on a en outre cette valeur dans (1) et par suite dans la valeur générale

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\frac{f(x+y\sqrt{-1})}{dy}dy\,dx=\int_{x_0}^{X}f(x+y\sqrt{-1}-f(x+y_0\sqrt{-1})=$$

$$\sqrt{-1}\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x+y\sqrt{-1})}{\partial x}\,dx\,dy = \sqrt{-1}\int_{y_0}^{y}\{(f(x+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})\}- 2\pi f_1.$$

Mais on aurait raisonné de même en supposant que cette expression devienne infinie pour les couples

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ----- | $x_m$ |
| $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | | $y_m$. |

$f_1$ $f_2$ $f_3$ $f_m$

étant les valeurs des expressions

$$f_1 = (x+y\sqrt{-1}) - (x_1+y_1\sqrt{-1})$$
$$f_2 = (x+y\sqrt{-1}) - (x_2+y_2\sqrt{-1})$$
$$\vdots$$

et l'on aurait — pour la correction à faire

$$-2\pi(f_1+f_2+f_3 \cdots f_m).$$

---

Exemple. Supposons que l'on ait $f(x+y\sqrt{-1}) = \frac{1}{x+y\sqrt{-1}}$

on peut la mettre sous la forme

$$\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y\sqrt{-1}}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+y\sqrt{-1}}.$$

Prenant la dérivée afin d'appliquer exactement la formule précédente on a. à prendre réduite

$$-\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \sqrt{-1}\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dy\,dx = A.$$

on aura en observant que ici $f_1 = 1$.

$$A = -\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \sqrt{-1}\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx\,dy = 2\pi\sqrt{-1}.$$

# Des intégrales multiples.

Si l'on a $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x)$. qu'on peut écrire $\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = f(x)$

intégrant cette Expon on a ..

$\frac{\partial y}{\partial x} = \int f(x)\,dx$. intégrant de nouveau $y = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx$.

qu'on écrit

$$\int^2 f(x)\,dx^2.$$

et qu'on appelle intégrale double.

Si l'on avait $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = f(x)$ à intégrer on peut écrire

$$\int f(x)\,dx = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

et d'après ce que nous venons de voir.

$$y = \iiint f(x)\,dx\,dx\,dx = \int^3 f(x)\,dx^3.$$

en général la valeur de y propre à vérifier $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = f(x)$ se représente par

$$y = \int^n f(x)\,dx^n.$$

cette valeur n'est toujours pas exacte; elle doit en général renfermer n constantes arbitraires.

car $\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + c$.

c pouvant changer de signe.

$$\int^2 f(x)\,dx^2 = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x}^{0} f(x)\,dx + c\right)dx = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^2 + c' + cx$$

⋮

en général l'intégrale renfermera n constantes.

<u>on peut le faire voir autrement.</u>

Si l'on a à resoudre $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = f(x)$. et $y = F(x)$ satisfaire. on aura pour valeur générale de y.

$$y = F(x) + \varpi(x).$$

et il faudra que $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = F^n(y) + \frac{\partial^n \varpi(x)}{\partial x^n} = f(x)$.

d'où $\frac{\partial^n W(x)}{\partial x^n} = 0.$

pour que l'on ait une dérivée de l'ordre $n$ nulle il faut que

$$W x = c + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\cdots c_{n-1} x^{n-1}.$$

donc la valeur propre à satisfaire à l'Eq$^{on}$ proposée

$$y = F(x) + c + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_{n-1} x^{n-1}.$$

Lecon du Samedi 8 Mars 1823.

# Intégration des fonctions à plusieurs variables.

pour l'intégr^on à deux variables il faut chercher une valeur de — w qui satisfasse à

$$dw = \varphi(x,y)\,dx + \chi(x,y)\,dy \quad (1)$$

le 2^d membre étant une exp^on donnée, il faut pour que — cette Eq^on soit vraie il faut que

$$\frac{dw}{dx} = \varphi(x,y); \qquad \frac{dw}{dy} = \chi(x,y).$$

qui donnent lieu à l'Eq^on de condition suivante —

$$\frac{d^2w}{dx\,dy} = \frac{d.\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d.\chi(x,y)}{dx}.$$

donc il n'existe qu'une condition d'intégrabilité

$$\frac{d.\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}$$

pour que l'Eq^on (1). soit exacte, et intégrable;

— Si l'on cherche à résoudre une exp^on à 3 variables —

$$dw = \varphi(x,y,z) + \chi(x,y,z) + \psi(x,y,z).$$

on voit que ce trinome ne peut être considéré comme la — Diffle d'une f^on à 3 variables qu'autant que

$$\frac{dw}{dx} = \varphi(x,y,z) \;;\; \frac{dw}{dy} = \chi(x,y,z) \;;\; \frac{dw}{dz} = \psi(x,y,z).$$

Eq^ons qui vont donner lieu à trois autres

$$\frac{d^2w}{dx\,dy} = \frac{d.\varphi(x,y,z)}{dy} = \frac{d.\chi(x,y,z)}{dx}$$

$$\frac{d^2w}{dx\,dz} = \frac{d.\varphi(x,y,z)}{dz} = \frac{d.\psi(x,y,z)}{dx}$$

$$\frac{d^2w}{dy\,dz} = \frac{d.\chi(x,y,z)}{dz} = \frac{d.\psi(x,y,z)}{dy}.$$

—

Conditions d'intégrabilité pour une f^on à trois variables.

dans le cas de 2 variables. on a eu une seule cond^on parcequ'on $dx\,dy$. on ne peut faire qu'un seul produit diff^t. dans le cas de 3 variables, on a 3 produits différent et par conséquent 3 cond^ons pour 4 variables, on en aurait 6. pour 5 variables 10... et en général pour $n$ variables $\frac{n(n-1)}{2}$ ou la formule des nombres triangulaires.

Reste à trouver, dans le cas où ces cond^ons d'intégrabilité sont satisfaites, une valeur de $u$ propre à satisfaire aux Eq^ons ci-dessus.

Soit $du = \varphi(x,y)dx + \chi(x,y)dx$.

on a pour cond^on $\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}$ et $\frac{du}{dx} = \varphi(x,y)$, $\frac{du}{dy} = \chi(x,y)$

je commence par la dernière formule. La valeur de $u$ qui y satisfait est

$$u = \int_{y_0}^{y} \chi(x,y)dy + C.$$

Mais $C$ sera f^on de $x$. je désigne par $v$. et j'aurai

$$u = \int_{y_0}^{y} \chi(x,y)dy + v.$$

qui satisfait à la dernière formule $\frac{du}{dy} = \chi(x,y)$. pour satisfaire à l'autre $\frac{du}{dx} = \varphi(x,y)$. il faut déterminer $v$ d'après cette cond^on il faut donc prendre la D^ne. par rapport à $x$ sous le signe $\int$, pour intégrer cette Exp^on par rapport à $x$.

$$\frac{du}{dx} = \int_{y_0}^{y} \frac{d.\chi(x,y)}{dx}dy + \frac{dv}{dx} = \int_{y_0}^{y} \frac{d\varphi(x,y)}{dy}dy + \frac{dv}{dx} =$$

$$\varphi(x,y) + \frac{dv}{dx} - \varphi(x,y_0)$$

or $\frac{du}{dx} = \varphi(x,y)$, donc $\frac{dv}{dx} = \varphi(x,y_0)$, d'où

$$y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\, dx + C.$$

donc
$$u = \int_{y_0}^{y} \chi(x,y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\, dx + C.$$

Valeur qui satisfait à l'Eqon proposée.

On aurait pu parvenir à la valeur de $u$ ~~...~~ raisonnant sur

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x, y).$$

On trouverait
$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \int \chi(x_0, y)\, dy + C.$$

Exemple. soit $du = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. ~~...~~

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \ (1) \ ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \ (2)$$

et
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}.$$

or cette Eqon se trouve vérifiée quand on exécute les calculs.

pour obtenir $u$. j'aurai en prenant (1)

$$u = \int_{y_0}^{y} \frac{x}{x^2+y^2}\, dy + v.$$

On trouvera que $v$ en diff.t on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}\, dy + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{x} = \cancel{\int \frac{\partial\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}\, dy} + \frac{\partial v}{\partial x} + \cancel{\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y_0}{x}}$$

$$+ \cancel{\int} + \frac{y_0}{x^2+y_0^2}. \quad \text{donc}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y_0}{x^2+y_0^2}. \quad \text{et} \quad v = -\int \frac{y_0\, dx}{x^2+y_0^2} + C.$$

donc

$$u = \int_{y_0}^{y} \frac{x\,dy}{x^2+y^2} - \int \frac{y_0\,dx}{x^2+y_0^2} + C.$$

or $\int \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \operatorname{arctang} \frac{y}{x}$ et $\int \frac{y_0\,dx}{x^2+y_0^2} = \operatorname{arctang} \frac{x}{y_0}$.

donc

$$u = \operatorname{arctang} \frac{y}{x} - \operatorname{arctang} \frac{y_0}{x} - \operatorname{arctang} \frac{x}{y_0} + C.$$

on voit que $\operatorname{arctang} \frac{y_0}{x} + \operatorname{arctang} \frac{x}{y_0} = \frac{\pi}{2}$. donc.

$u = \operatorname{arctang} \frac{y}{x} + C$. valeur propre à satisfaire l'Eqon donnée.

---

Dans le cas de trois variables. nous avons trouvé les conditions pour que l'expon à trois variables donnée soit la Dlle de u. nous allons dans le cas où ces conditions sont satisfaites chercher la valeur de u.

$$du = \varphi(x,y,z)\,dx + \chi(x,y,z)\,dy + \psi(x,y,z)\,dz.$$

On a trouvé ...

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x,y,z) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \chi(x,y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \psi(x,y,z).$$

et les trois Eqons de condon ci-dessus. il faut que u satisfasse à ces 3 Eqons on aura donc pour satisfaire à la dernière

$$u = \int_{z_0}^{z} \psi(x,y,z)\,dz + v.$$

v étant fon de x, y. il faut déterminer v d'après la condon que u satisfasse à la 1ère Eqon. différentiant cette Expon on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \psi(x,y,z)}{\partial x}\,dz + \frac{\partial v}{\partial x}$$

or d'après l'Eqon de condon

$$\frac{\partial \psi(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial z}.$$

on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial z}\, dz + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

ou bien exécutant les calculs et remplaçant $\frac{\partial u}{\partial x}$ par sa valeur

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(x,y,z) - \varphi(x,y,z_0) + \frac{\partial v}{\partial x}$$

donc

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi(x,y,z_0).$$

et ~~$v = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y,z_0)\, dx + c$~~

On trouverait de même qu'il faut que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \chi(x,y,z_0).$$

pour satisfaire à la 2de on voit donc que d'après la 1ère méthode pour l'intégr. qu. à deux variables il faut que $v$ soit choisi de manière à satisfaire à

$$\partial v = \varphi(x,y,z_0)\, dx + \chi(x,y,z_0)\, dy.$$

donc d'après ce qu'on a vu il faut

$$v = \int_{y_0}^{y} \chi(x,y,z_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y_0,z_0) + C.$$

par conséquent

$$u = \int_{z_0}^{z} \psi(x,y,z)\, dz + \int_{y_0}^{y} \chi(x,y,z_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y_0,z_0) + C.$$

on aurait partie de l'une qq. des 2 autres formules et obtenir pour chacun des cas 2 valeurs de $u$. donc $u$ peut avoir 6 valeurs.

Leçon du mardi
11 Mars 1823.

Dans l'intégration par partie on fait usage de la formule $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

elle provient de $d(uv) = u\,dv + v\,du$. d'où

$$\int d.(uv) = \int u\,dv + \int v\,du = uv + c.$$

on néglige $c$ pour les intégrales indéfinies, pour les intégrales définies il faut en tenir compte. on a

$$\int_{x_0}^{x} uv'\,dx = uv - \int_{x_0}^{x} vu'\,dx + c.$$

si la fonction reste continue entre $x_0$ et $x$. on fait $x = x_0$ et l'on a

$$0 = u_0 v_0 + c \quad \text{d'où } c = -u_0 v_0.$$

et $\int_{x_0}^{x} uv'\,dx = uv - u_0 v_0 - \int_{x_0}^{x} vu'\,dx.$

Voilà la formule dont il faut faire usage pour les f^ons continues entre certaines limites.

théorème. on a généralement

$$\int_0^X f(x)\,dx = \int_0^X f(X - x)\,dx.$$

en effet je suppose l'intervalle entre 0 et $X$ partagé en un grand nombres d'Eléments ...

$$0\ x_1\ x_2 \cdots x_3 \cdots x_{n-1}\ X.$$

tout par ordre de grandeur.

on aura d'après la formule connue pour l'intégon

$$\int_0^X f(x)\,dx = \lim \{ x_1 f(\theta_1 x_1) + (x_2 - x_1) f(x_1 + \theta_2 (x_2 - x_1) + \cdots$$
$$+ (X - x_{n-1}) f(x_{n-1} + \theta_{n-1} (X - x_{n-1}).$$

et $\int_0^X f(X-x)\,dx = \lim \{ x_1 f(X-\theta_1 x_1) + (x_2-x_1) f(X-x_1-\theta_2(x_2-x_1)$

$+ \quad X-x_{n-1} f(X-x_{n-1}-\theta_{n-1}(X-x_{n-1})$

Si on suppose que les termes qu'on a insère entre les limites 0 et X soient en progon ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, que $X = ni$ ... on a

$0, i, 2i, 3i \text{ ---- } (n-1)i, X.$

on a lors

$\int_0^X f(x)\,dx = \lim ( i \{ f(\theta_1 i) + f(i+\theta_2 i) + \text{----} + f(n-1)i + \theta_{n-1} i \}$

et

$\int_0^X f(X-x)\,dx = \lim (i \{ f(X-\theta_1 i) + f(X-i-\theta_2 i) \cdots f(i-\theta_{n-1} i)$

on sait que $\theta > 0 < 1$. ou tout au plus $\theta = 0$ et $\theta = 1$.

si je fais $\theta = 0$ dans la 1ère on a

$\int_0^X f(x)\,dx = \lim (i \{ f(0) + f(i) + \text{---} f(n-1)i$

et si je fais $\theta = \theta_1 = 1$. on a ...

$\int_0^X f(X-x)\,dx = \lim (i \{ f(X-i) + f(X-2i) \cdots f(i) + f0 \})$

on voit que ces intégrales sont égales et par conséquent

$$\int_0^X f(x)\,dx = \int_0^X f(X-x)\,dx.$$

on peut démontrer ce théorème autrement

je fais $X - x = z$. on a $-dx = dz$.

Les limites 0 et X se trouvent remplacées par $X-x$. ou l'on fait d'abord $x=0$ et $x=X$, on a donc pour nouvelles limites X et 0.

ainsi $\int_0^X f(X-x)\,dx = -\int_X^0 f(z)\,dz = \int_0^X f(z)\,dz.$

par conséquent, on peut dire que

$$\int_0^x f(x-x)\,dx = \int_0^x f(x)\,dx.$$

puisque $\int_0^x f(z)\,dz$ n'est que $\int_0^x f(x)\,dx$ dans laquelle on a mis une lettre pour une autre variable $f$.

---

## Théorème de Taylor.

Le théorème de Taylor sert à développer $f(x+h) - f(x)$ sous une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $h$.

je pose

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h \frac{\partial . f(x+z)}{dz}\,dz. \quad (1).$$

je puis poser cette égalité car si j'intègre (suivant $z$) j'aurai l'identité.

$$f(x+h) - f(x) = \int \frac{\partial f(x+h)}{\partial z}\,dz - \int \frac{\partial f(x)}{\partial z}\,dz = f(x+h) - f(x).$$

donc d'après le théorème précédent on peut mettre (1) sous la forme

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+z)\,dz = \int_0^h f'(x+h-z)\,dz$$

intégrant par parties. je fais $v = z$ $u = f'(x+h-z)$.

$dv = dz$ $du = -f''(x+h-z)\,dz$.

donc $\int f'(x+h-z)\,dz = z f'(x+h-z) + \int z f''(x+h-z)\,dz$. prenant cette intégrale entre ses limites

ou, $A = f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \int_0^h z f''(x+h-z)\,dz$.

on peut intégrer par parties cette nouvelle intégrale en posant $z\,dz = dv$ d'où $v = \frac{z^2}{1\cdot 2}$. et $u = f''(x+h-z)$.

d'où $du = -f'''(x+h-z)\,dz$.

on a

$$\int f''(x+h-z)\,z\,dz = \frac{z^2}{1\cdot 2} f''(x+h-z) + \int f'''(x+h-z)\frac{z^2}{1\cdot 2}\,dz.$$

prenant à l'intégrale entre $0$ et $h$. on a

$$\int_0^h f''(x+h-z)\,z\,dz = \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(x) + \int_0^h f'''(x+h-z)\frac{z^2\,dz}{1\cdot 2}.$$

On pourra de même intégrer cette dernière intégrale — voici les calculs.

$$\frac{z^2 dz}{1\cdot 2} = dv \; ; \text{d'où} \quad v = \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}. \quad u = f'''(x+h-z). \quad du = -f^{iv}(x+h-z)\,dz$$

$$\int f'''(x+h-z)\,z^2 dz = \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x+h-z) + \int f^{iv}(x+h-z)\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,dz.$$

$$\int_0^h f'''(x+h-z)\,z^2 dz = \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x) + \int_0^h f^{iv}(x+h-z)\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,dz.$$

Continuant ainsi à intégrer la dernière expon on arrivera nécessairement à

$$\int_0^h f^{(n)}(x+h-z)\frac{z^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}\,dz. = B.$$

Que l'on peut mettre sous une autre forme en observant que le facteur $\frac{z^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}$ restera constamment de même signe entre 0 et $h$. On aura donc

$$B = f^{(n)}(x+\theta h)\int_0^h \frac{z^{n-1}dz}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}.$$

$f^{(n)}(x+\theta h)$ étant une valeur de $f^{(n)}(x+h-z)$. On peut lui donner cette forme, en prenant $\theta > 0 < 1$. car $z$ ne peut être $> h$ ni $< 0$.

prenant cette intégrale entre les limites 0 et $h$. en faisant succesnt $z=0$ $z=h$.

$$B = f^{(n)}(x+\theta h)\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$$

On aura donc en remontant à la valeur dont on voulait trouver le Développement

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x) + \cdots$$

$$+ \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} f^{(n)}(x+\theta h) =$$ on peut remplacer ce dernier terme par celui-ci en remplaçant $z$ par $h-z$ dans $B$.

$$= \int_0^h f^n(x+z)\frac{(h-z)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}\,dz.$$

Série de Taylor.

quand on a trouvé $B = \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n} f^n(x+z)$. On peut obtenir $\int_0^{x+h} \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n-1} f^n(z)\,dz$.

dans la série de Maclaurin, on aura donc $\int_0^{x+h} \frac{f^n(x-z)\,z^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}\,dz = \int_0^{x+h} \frac{f^n(z)\,(x-z)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}\,dz$

en observant que $\int_0^x f(x+a)\,dx = \int_0^{x+a} f(x)\,dx$.

Si dans cette formule générale, on fait $h = x$ et $x = 0$. on aura, ...

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0) + \text{----} \int_0^x f^{(u)}(z) \frac{(x-z)^{u-1} dz}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots u-1}$$

pour trouver le dernier on emploie le dernier terme de la formule précédente. on peut mettre le dernier terme — sous une autre forme

$$\int_0^x f^u(z) \frac{(x-z)^{u-1} dz}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots u-1} = \int^u f(x) dx^u.$$

d'après la théorie des intégrales multiples.

on pourra donc mettre cette formule due à Maclaurin sous la forme

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \text{----} + \int^u f(x) dx^u.$$

elle reste à développer une fonction de $x$ suivant les puissances ascendantes de $x$.

Exemple. pour appliquer à la série de maclaurin la fonction $e^x$. on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ ---} \frac{x^{u-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots u-1} \frac{x^u}{1\cdot 2 \cdots u}$$

plus $u$ augmente plus cette fraction $\frac{x^u}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots u} e^{\theta x}$ ou l'approche de 0. car quand on a le terme $+\frac{x^u}{1\cdot 2 \cdots u}$. on passe au terme suivant en multipliant par $\frac{x}{u+1}$. donc le dénom. est d'autant plus petit que $u$ est grand. donc cette série est convergente ..... elle s'approche d'une limite fixe qui est la somme de tous ces termes, on l'écrit ainsi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ etc} -$$

Leçon du Jeudi 13 Mars 1823.

Le reste de la série de maclaurin peut se présenter sous l'une des formes suivantes

$$\int_0^x \frac{f^{(u)}z\,(x-z)^{u-1}\,dz}{1\cdot 2\cdot 3\cdots u-1}, \qquad \int_0^x \frac{f^{(u)}(x-z)\,z^{u-1}}{1\cdot 2\cdots u-1}\,dz,$$

$$\int^x f(x)\,dx^u, \qquad \frac{h^u}{1\cdot 2\cdots u} f^u(\theta x).$$

Nous allons appliquer les principes que nous avons établi jusqu'ici aux séries.

On appelle série une suite de termes qui dérivent les uns des autres d'après une loi constante. on l'appelle convergente si elle s'approche d'une limite fixe.

il s'ensuit que

$$s_u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{u-1}$$

est une série convergente si $\frac{u_{u+1}}{u_u}$ converge vers une limite $\theta$ plus petite que l'unité. du moins nous ferons voir que cette hypothèse ayant lieu, tous les termes vont en diminuant (on peut voir dans l'analyse algébrique d'autres conditions telles que $(u_u)^{\frac{1}{u}} < \theta$.

or $\frac{u_{u+1}}{u_u}$ étant plus petit que $\theta$ est compris entre $\pm\theta$. comme c'est une exp$^{on}$ générale $\frac{u_{u+1}}{u_u}$ sera aussi compris entre $\pm\theta$. donc $u_{u+1}$ sera entre $\pm\theta u_u$. de même $\frac{u_{u+2}}{u_{u+1}}$ est compris entre $\pm\theta$. donc $u_{u+2}$ sera entre $\theta^2 u_u$. ..... en général

$$u_{u+u'} \cdots \theta^{u'} u_u$$

or plus $u'$ est grand plus $\theta^{u'}$ sera petit. donc tous les termes convergent vers 0. ..... ainsi dans beaucoup cette condition $\frac{u_{u+1}}{u_u}$ vers 1 indiquera la convergence de la série.

appon à la formule de maclaurin dans certains cas particuliers.

soit 1° $f(x) = e^x$. on a.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots \frac{x^{n-1}}{1.2\cdots n-1} + \frac{x^n}{1.2.3\cdots n} f^n(\theta x).$$

le terme qui exprime le reste de la série croit ou décroit d'après $\frac{x^n}{1.2\cdots n}$. il faut donc démontrer si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite plus petite que 1. or.

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1.2.3\cdots n+1}$$

$$u_n = \frac{x^n}{1.2.3\cdots n}.$$

dans cet exemple. donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}.$$

qui converge vers 0 à mesure que n augmente. donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots \&^a \cdots$$

série convergente.

soit un second exemple ou $f(x) = \sin x$.

ici on a pour le reste dans la série de maclaurin.

$$f^n(\theta x) = \sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

qui converge vers une limite entre 0 et 1. donc la série est encore convergente pour la déterminer il faut chercher les dérivées de $\sin x$ et y faire $x=0$ on a

$\sin x = f(x)$. $\cos x = f'(x)$. $-\sin x = f''(x)$.

$\sin x = f'''(x)$. $\cos x = f^{iv}(x)$. $f^{v}(x) = \cos x \cdots\cdots$

donc on a

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&^a \cdots$$

on trouverait de même.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&^a$$

Soit $f(x) = (1+x)^{\mu}$. $\mu$ pouvant être rationnel ou irrationnel.

afin de déterminer le reste de la série dans ce cas je cherche $f^{(n)}(z)$ qui est ici.

$$f^{(n)}(z) = \mu.\mu-1.\mu-2\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}.$$

donc $f^{n}(x-z) = \mu.\mu-1.\mu-1\ldots\mu-n+1\,(1+x-z)^{\mu-n}$.

on aura donc ici pour

$$\int_0^x \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^{n}(x-z)\,dz \quad \text{le terme suivant}$$

$$\int_0^x \frac{\mu\mu-1.\mu-2\ldots\mu-n+1}{1.2\ldots n}\,\frac{z^{n-1}}{(1+x-z)^{n-\mu}}\,dz$$

si l'on change dans cette expon $z$ en $x-z$. on aura enfin pour la véritable expon de ce reste

$$\int_0^x \frac{\mu\mu-1.\mu-2\ldots\mu-n+1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{(x-z)^{n-1}}{(1+z)^{n-\mu}}\,dz$$

pour savoir si la série sera convergente, il faut donc former $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ qui sera dans ce cas.

$$u_{n+1} = \frac{\mu\mu-1\ldots\mu-n+1}{1.2\ldots n}\,\frac{(x-z)^{n}}{(1+z)^{n-\mu+1}}$$

$$u_n = \frac{\mu-\mu-1\ldots\mu-n+1}{1.2\ldots n}\,\frac{(x-z)^{n-1}}{(1+z)^{n-\mu}}.$$

et par conséquent

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mu-n}{n}\cdot\frac{x-z}{1+z} = -\left(1-\frac{\mu}{n}\right)\frac{x-z}{1+z}.$$

$n$ devenant de plus en plus grand $1-\frac{\mu}{n}$ converge vers l'unité. il importe donc de savoir dans quel cas $\frac{x-z}{1+z}$ converge vers une limite plus petite que 1.

on voit en général si la quantité comprise sous le signe $\int$ satisfait à la condon $\frac{u_{n+1}}{n} < \lambda$ mais on peut le faire, car on peut considérer cette quantité comme un moyenne entre les intégrés du reste $z$ étant compris entre $0$ et $x$.

Ainsi il faudra voir si ce reste satisfait à $\frac{u_{n+1}}{n} < 1$ ou $(e_n)^{\frac{1}{n}} < \lambda$ ou enfin à la condon que $f^{n}(z)$ ne converge pas vers $0$ pour des valeurs infinies de $n$.

or on voit qu'il faut que $x<1$; ~~or~~ or on peut supposer $z=\theta x$ car $z$ d'après l'intégrale ci-dessus est compris entre 0 et $\theta$ étant $>0$, $<1$. et l'on a

$$\frac{x-z}{1+z} = \frac{x-\theta x}{1+\theta x} = \frac{x(1-\theta)}{1+\theta x}.$$

qui ~~devient~~ évid$^t$ ~~de plus en~~ plus petit ~~à mesure~~ que 1.

donc $(1+x)^\mu$ est développable en série convergente quand $x<1$. on a — en formant $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ ....

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots \&^a$$

qui est le D$^t$ du Binome de newton si $\mu$ est entier.

---

Soit $l(1+x)$ à développer en série. on reconnait que cette Expon n'est développable en série convergente qu'autant que $x<1$.

on trouve dans ce cas ou $f(x) = l(1+x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \cdots$$

donc

$$l(1+x) = 0 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \&^a$$

étant donné cette formule, on peut trouver $L(1+x)$.

car $l(1+x) = \frac{L(1+x)}{LA}$. or $\frac{1}{LA} = le$. donc

$$L(1+x) = LA\left\{0 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \&^a\right.$$

ou $L(1+x) = \frac{1}{le}\left\{0 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots \&^a\right.$

Dans la formule qu'on a trouvée ci-dessus pour le binome $1+x$. si l'on fait $\mu=-1$. on a

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \&^a$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdots$$

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 \cdots \pm \frac{n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-1}$$

cette dernière formule a pour coefficients la suite des nombres triangulaires.

d'après la loi énoncée Leçon 37$^e$ page 147. qu'il faut que dans $\frac{(x-z)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n-1} f^n(z)$. $f^n(z)$ ne converge pas vers l'infini avec $n$. or on trouve que dans ce cas ce terme est égal

$$\frac{x-z^{n-1}}{(1+z)^n}$$

si on fait $z=\theta x$. on a

$$\frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n} = \frac{x^{n-1}}{(1-\theta)}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

or $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ est $<1$

et $\frac{x^{n-1}}{1-\theta}$ ~~ne~~ converge vers 0 ~~quand~~ $n$ converge vers $\infty$, qu'autant que $x<1$.

soit ...

$$(1) \quad (1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{(1-2)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{(1-2)(1-2\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots} x^3$$

Cette série est convergente car $\lim (1+2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \alpha^n \cdots$

série que nous avons reconnue convergente et égale à $e$.

Donc $\lim (1+2)^{\frac{1}{2}} = e$.

Changeant $2$ en $2x$ on a $\lim (1+2x)^{\frac{1}{2x}} = e$. ou

$$\lim (1+2x)^{\frac{1}{2}} = e^x.$$

$e^x$ est une série convergente donc la série représentée par (1) l'est aussi.

on a trouvé

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu\mu-1}{1\cdot 2} x^2 + \alpha^n \cdots$$

donc $\dfrac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x + \dfrac{\mu-1}{1\cdot 2} x^2 + \dfrac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \cdots$

$\lim \dfrac{(1+x)^\mu - 1}{\mu}$ quand $\mu$ converge vers $0$ est

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = l(1+x).$$

Donc

$$\lim \left( \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} \right) = l(1+x).$$

il s'agit d'étendre le théorème de Taylor aux fonctions à plusieurs variables.

soit $u = f(x, y, z)$.

je change chaque variable en $x+2h$, $y+2k$, $z+2l$ et je vais développer cette nouvelle fonction suivant les puissances ascendantes de $2$.

$$f(x+2h, y+2k, z+2l) = F(2).$$

on peut développer $F(2)$ d'après le théorème de Maclaurin et on a

$$F(2) = F(0) + \frac{2}{1} F'(0) + \frac{2^2}{1\cdot 2} F''(0) + \cdots + \frac{2^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n-1} F^{n-1}(0)$$

$$+ \frac{2^n}{1\cdot 2\cdots n} F^n(\theta 2).$$

on sait que $T'(0) = du$. $T''0 = d^2u$ ---

donc

$$T(\alpha) = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2u + \cdots \frac{\alpha^n}{1.2..n} (d^n u \pm \varepsilon)$$

$\varepsilon$ converge vers 0 en même temps que $\alpha$.

on peut s'en servir pour la théorie des minima.

---

Leçon du samedi 15 mars 1823.

Appon de la série de Maclaurin à la fon imagre $f(x) = \varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x)$.

car $\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) \cdots \frac{x^{n-1}}{1.2..n-1}\varphi^{n-1}(0) + \int_0^x \frac{z^{n-1}}{1.2..n-1}\varphi^n(x-z)$

et $\chi(x) = \chi(0) + \frac{x}{1}\chi'(0) \cdots \frac{x^{n-1}}{1.2..n-1}\chi^{n-1}(0) + \int_0^x \frac{z^{n-1}}{1.2..n-1}\chi^n(x-z)$

en admettant les principes démontrés pour les intégrales encore vrais pour les fons imgres on a

$$\int_0^x (u+\sqrt{-1})\,dx = \int_0^x u\,dx + \sqrt{-1}\int_0^x v\,dx.$$

et l'on a

$$f''(x) = \varphi'(x) + \sqrt{-1}\,\chi'(x).$$

$$f'''(x) = \varphi''(x) + \sqrt{-1}\,\chi''(x)$$

$$\vdots$$

donc en remplaçant.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \cdots \int_0^x \frac{z^{n-1}}{1.2..n-1} f^n(x-z)\,dz$$

Appon de la série des fons imaginaires à quelques fons que l'on veut réduire en séries convergentes, et reconnaître dans quels cas, cette rédon sera possible.

pour que la série soit convergente généralement, il faut que les 2 restes ~~restes~~ de ~~ses~~ séries provenant de $\varphi(x)$ et $\chi(x)$. convergent en même temps vers 0. et que ces séries convergent vers une limite fixe.

ces restes se présentent sous la forme

$$\frac{(x-z)^{n-1}\varphi^n(z)}{1.2.3\ldots n-1} \quad \text{pour } \varphi(x).$$

$$\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots n-1}\chi^n(z) \quad \text{pour } \chi(x).$$

la somme est

$$\left(\frac{x-z}{1.2\ldots n-1}^{n-1}\right)\left(\varphi^n(z)+\sqrt{-1}\,\chi^n(z).\right) = T.$$

il faut savoir dans quels cas ce terme converge vers 0.

on peut mettre l'expon imagre sous la forme

$$\rho\,(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1}).$$

alors $\rho = \sqrt{(\varphi^n(z))^2+(\chi^n(z))^2}$

$$T = \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots n-1}\sqrt{(\varphi^n(z))^2+(\chi^n(z))^2}\,(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1}).$$

or $T$ s'approchera de 0 en même temps que le module. donc dans une expon imagre de la forme ci-dessus, qu'on développe en série toutes les fois que le reste se formera d'une expon imagre dont le module converge vers 0. la série sera convergente.

soit $f(x) = (a+x)^\mu$

a étant une expon imagre $\rho\,(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$.

on a trouvera

$$(a+x)^\mu = a^\mu + \frac{\mu}{1}a^{\mu-1}x + \ldots \frac{\mu\,\mu-1\ldots\mu-n+1}{1.2\ldots n-1}\int\frac{(x-z)^{n-1}}{(a+z)^{n-\mu}}\,dz.$$

on aura pour $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\left(1-\frac{\mu}{u}\right)\left(\frac{x-z}{a+z}\right)$.

si $a$ était réel on a trouvé qu'il faut que $x<a$, pour que la série soit convergente. si $a+b$ imaginaire. il faut voir si

$$-\frac{x-z}{\rho\cos\varphi+\rho\sin\theta\sqrt{-1}+z}\cdot\left(1-\frac{\mu}{u}\right)$$

converge vers une limite plus petite que 1. Il en sera de même si le module de (1) $\frac{x-z}{\rho\cos\varphi+\rho\sin\theta\sqrt{-1}+z}$ converge vers une limite plus petite que 1. $\frac{x-z}{\sqrt{\rho^2+2\rho z\cos\theta+z^2}}$ est le module de (1).

et comme l'on peut faire $\theta=0$ $\theta=1$ on voit que ce module est compris entre $\frac{x-z}{\rho-z}$ et $\frac{x-z}{\rho+z}$.

qui seront constamment plus petits que 1. si $x<\rho$.

Voilà la Cond$^{on}$ pour que la série provenant de $(a+x)^\mu$ soit convergente.

app$^{on}$. soit $f(x)=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$. à développer en série.

on a $f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

$f''(x)=\cos(x+\pi)+\sqrt{-1}\sin(x+\pi)$

$\vdots$

$f^u(x)=\cos\left(x+\frac{u\pi}{2}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(x+\frac{u\pi}{2}\right)$.

d'où on peut écrire $f^u(x)=(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)\left(\cos\frac{u\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{u\pi}{2}\right)$.

faisant dans ces dérivées $x=0$ on aura, en observant que $f$ donnera pour $x=0$

$$f^u(0)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right)^u=(\sqrt{-1})^u.$$

on aura $u_u=\frac{(x-z)^{u+1}}{1\cdot2\cdot3\cdots u+1}\left(\cos z+\sqrt{-1}\sin z\right)(\sqrt{-1})^u$.

N° 14

suite de la leçon de samedi 15 mars 1823



Soit $f(x) = e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx)$.

$$f'(x) = ae^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx) + be^{ax}\left\{\cos\left(bx+\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

or $\left\{\cos\left(bx+\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}\right)\right\} = (\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx)\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right)$
$= (\cos b + \sqrt{-1}\sin bx)\sqrt{-1}$.

donc
$$f'(x) = ae^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx) + be^{ax}\sqrt{-1}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx).$$

d'où $f'(x) = f(x)(a+b\sqrt{-1})$ ( ).

de même $f''(x) = f'(x)(a+b\sqrt{-1})\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx = (a+b\sqrt{-1})^2 f(x)$

quand on fait $x=0$... il reste

$$f(x) = 1 + (a+b\sqrt{-1}) + (a+b\sqrt{-1})^2 + \cdots$$

On peut voir que cette série est convergente car

$$u_n = (a+b\sqrt{-1})^n e^{ax}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)\left(\frac{x-z}{1\cdot 2\cdots n-1}\right)^{n-1}$$

il faut remplacer les expons imag^res par leurs modules

on aura
$$\frac{(x-z)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax} = u_n^+$$

$$\frac{(x-z)^n}{1\cdot 2\cdots n}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}+1}e^{ax} = u_{n+1}$$

donc
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(x-z)(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{n}.$$

Expon qui converge vers 0 quand n augmente. donc la série ci-dessus est convergte.

ainsi
$$(1)\quad e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx) = 1 + (a+b\sqrt{-1})x + (a+b\sqrt{-1})^2\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

si l'on fait $x(a+b\sqrt{-1}) = z$. on sait que

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots$$

donc en rempt z par sa valeur dans (1). on retrouve la même valeur, donc

$$e^{(a+b\sqrt{-1})x} = e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx)$$

si $a=0$, $b=1$
$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1\cdot 2} + \cdots = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cdots = \cos x - \sqrt{-1}\sin x$$

Lecon du Mardi 18 Mars 1823.

on trouve que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2(1+z^2)} x\,dx\,dz = \frac{\pi}{4}.$$

d'où $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

---

on a vu que

$$e^{(a+b\sqrt{-1})x} = e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx).$$

si $x=1$. on a

$$e^{a+b\sqrt{-1}} = e^a(\cos bx + \sqrt{-1}\sin b).$$

ou si $a=x$, $b=y$

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

on sait aussi que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \&^a \ldots$$

or $A^x = e^{l(A).x}$ car $A = e^{lA}$. d'où $A^x = e^{l(A).x}$ (1)

on trouve par la formule de maclaurin que

$$A^x = 1 + \frac{x\,l(A)}{1} + \frac{(x\,l(A))^2}{1\cdot 2} + \ldots \&^a \quad (2).$$

il faut voir que la formule (1) démontrée pour les valeurs réelles de $x$, peut être admise pour les valeurs imaginaires.

Soit $x = (a + b\sqrt{-1}) = z$.

si l'on remplace $z$ par $z$ dans (2). on a

$$A^z = 1 + \frac{z\,lA}{1} + \frac{(z\,lA)^2}{1\cdot 2} + \&^a \ldots$$

Cette série sera encore convergente car la série des modules

$$1 + \frac{\rho\,lA}{1} + \frac{(\rho\,lA)^2}{1\cdot 2} + \&^a \ldots$$

l'est.

cela posé, on voit le 2$^d$ membre de (2). être le même que celui de $e^x$ en changeant $x$ en $x\,lA$. donc on peut dire que $A^z = e^{z\,lA}$.

Ayant admis ce principe, nous pouvons résoudre certaines questions sur les logarithmes, faire voir qu'un nombre imaginaire a une infinité de logarithmes imaginaires.

Soit $x = \alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$. $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

nous allons chercher les log^mes dans la Table il sera aisé de les avoir dans un autre au moyen de l'Eq^on $A^2 = e^{2lA}$. que je vais d'abord étendre aux quantités imag^res si $u+v\sqrt{-1}$ est le log^me de x. d'après la déf^on on a

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = x.$$

on sait que $e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u(\cos v + \sqrt{-1}\sin v)$. on aura donc —

$$e^u(\cos v + \sqrt{-1}\sin v) = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta). \quad (1)$$

Deux Exp^ons imaginaires étant égales, leurs Modules le sont: car on a aussi

$$e^u(\cos v - \sqrt{-1}\sin v) = \rho(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta).$$

ou bien $e^{2u} = \rho^2$ d'où $e^u = \rho$. donc $u = l.\rho = \frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)$.

Et en identifiant les deux membres de (1). $\cos v = \cos\theta$ et $\sin v = \sin\theta$. d'où $v = \theta \pm 2k\pi$.

Ainsi le log^me de x que je désignerai par une double parenthèse

$$l.((\alpha+\beta\sqrt{-1})) = l.\rho + (\theta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}.$$

ici $\theta$ est déterminé par les deux formules —

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

pour qu'un log^me soit réel il faut qu'il soit le log^me d'un nombre α positif et réel. si je crois α positif $\beta = 0$. j'ai $\sin\theta = 0$. $\cos\theta = +1$. donc $\theta = 0$. $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \alpha$. dans cette hyp^thèse et alors $l(\alpha) = l(\alpha)$. ——

si $\beta = 0$ $\alpha = 1$. on a $\rho = 1$. $\cos\theta = 1$ $\sin\theta = 0$.

$$l((1)) = \pm 2k\pi\sqrt{-1}.$$

il n'y a qu'un log^me réel c'est celui qui vient de $k = 0$. ... il y a une infinité de valeurs de k. donc il y a une infinité de log^mes imaginaires.

si $\alpha = -1$. $\cos\theta = -1$. $\sin\theta = 0$. donc $\theta = \pm(2k+1)\pi$.

et $l((-1)) = \pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}$.

On peut donner aux Logmes imaginaires une autre forme : nous distinguerons deux cas, quand $\alpha$ positif et $\alpha$ négatif. —

on a ..... $\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. $\sin\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

d'où $\operatorname{tang}\theta = \frac{\beta}{\alpha}$.

j'appelle $\xi$ le plus petit arc qui ait cette tangente. j'ai $\operatorname{tang}\xi = \frac{\beta}{\alpha}$

or quand $\alpha$ est positif. on a ces tang$^{tes}$ positives donc, ...

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{+\sin\xi}{+\cos\xi}.$$

et $\theta = \xi \pm 2k\pi$.

si $\alpha$ est négatif $\operatorname{tang}\xi$ est négative et l'on a —

$$\theta = \xi \pm (2k+1)\pi.$$

donc —

$\alpha > 0$, $l((\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + \operatorname{arctang}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1} \pm (2k\pi)\sqrt{-1}$.

$\alpha < 0$ $l((\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + \operatorname{arctang}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1} \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}$.

ou bien remplaçant les dernières termes par les racines de l'unité on a, —

$$l((\alpha+\beta\sqrt{-1})) = \frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + \operatorname{arctang}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1} \pm l((1)).$$

$$l((\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + \operatorname{arctang}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1} \pm l((-1)).$$

---

On peut se servir de cette formule pour étendre aux Exp$^{ons}$ imaginaires la règle du calcul intégral que

$$\int\frac{dx}{x-a} = l(x-a) + c.$$

je dis qu'on aura de même

$$\int\frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} = l((x-\alpha-\beta\sqrt{-1}) + c.$$

on trouve que

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})} = \frac{1}{2} l\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\sqrt{-1} + c$$

or $\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{x-\alpha}$. donc on aura une exp^on comparable aux formules ci-dessus et la règle est démontrée.

Leçon du 20 mars 1823.

## Intégration par séries.

Soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \cdots\cdots u_{n-1} + u_n + \&^a \cdots$ une série convergente. $S_n$ désignant les n premiers termes et $r_n$ tous les autres — on a $S = S_n + r_n$. je suppose que la série soit convergente entre $x_0$ et $X$. si l'on prend l'intégrale de chacun des termes de la série, on aura

$$\int_{x_0}^{X} S\,dx = \int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx \cdots\cdots \int_{x_0}^{X} r_n\,dx. \quad (1)$$

qui est encore convergente car la $n^{ème}$ intégrale $\int_{x_0}^{X} r_n\,dx$ est égale à $X - x_0$ multiplié par une moyenne entre toutes les valeurs de $r_n$. or plus $n$ croit plus $r_n$ devient petit, donc la série (1) est convergente.

Exemple soit $S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots a_{n-1} x^{n-1} + \&^a$ — on aura

$$\int_0^X S\,dx = a_0 X + a_1 \frac{X^2}{2} + a_2 \frac{X^3}{3} \cdots\cdots a_{n-1}\frac{X^n}{n} + \&^a$$

faisons $S = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \cdots + \text{etc.}$

qui est convergente entre $x=1$ et $x=-1$. on a

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots = l(1+x) + c$$

et le premier membre est égal à $l(1+x) + c \cdots$ on trouve ainsi le Développement de $l(1+x)$. qu'on n'aurait pas obtenu facilement par la formule de Maclaurin.

Soit $S = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \ldots$ entre $x=-1$ $x=+1$.

intégrant les deux membres on a

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \text{ etc.}$$

On sait que $\text{arc sin } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

On tire que $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$

si l'on intégre les deux membres à partir de $x=0$, on aura

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

on tire aussi de là

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \ldots$$

On trouverait de même,

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

on peut trouver par un moyen analogue,

$$\int \frac{\left\{l\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^m dx}{1-x}.$$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ donc

$$\int \frac{\left\{l\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^m dx}{1-x} = \int \left\{l\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^m (1 + x + x^2 \ldots)\, dx.$$

il faut donc trouver

$$\int \left\{l\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^m x^n\, dx.$$

et faire dans le résultat $n = 1, 2, 3, \ldots$

Nous chercherons l'intégrale entre 0 et 1. n'importe

$l\left(\frac{1}{x}\right) = z$ $\quad \frac{1}{x} = e^z$, $x = e^{-z}$ donc $dx = -e^{-z}dz$ $x=0$ $x=1$

donc $\int_0^1 x^n \left(l\left(\frac{1}{x}\right)\right)^m dx = \int_{-\infty}^{0} z^m e^{-(n+1)z} dz.$

ou $= \int_0^{\infty} z^m e^{-(n+1)z} dz.$

je fais $(n+1)z = y$. d'où $(n+1)\,dz = dy$, $z^m = \frac{y^m}{(n+1)^m}$

et $\int_0^\infty z^m e^{-(n+1)z}\,dz = \int_0^\infty \frac{y^m e^{-y}}{(n+1)^{m+1}}\,dy = \frac{1}{(n+1)^m}(1.2.3.\ldots m)$

faisant $n = 1, 2, 3, \ldots$ on a

$$\int_0^1 \frac{(l\frac{1}{x})^m}{1-x}\,dx = (1.2.3.\ldots m)\left\{1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \ldots\right).$$

on trouverait de même

$$\int_0^1 \frac{(l\frac{1}{x})^m\,dx}{1+x} = (1.2.3.\ldots m)\left\{1 - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} - \frac{1}{4^{m+1}} + \ldots\right.$$

## usage des expressions imaginaires dans les intégrales définies

on a trouvé précédemment que,

$$\int_{x_0}^{X}(f(x+y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1}))\,dx = \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}(f(X+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1}))\,dy - 2\pi(f_1+f_2\ldots f_{n-1})\sqrt{-1}.$$

toutes les fois que la fon $f(x+y\sqrt{-1})$ deviendra infinie pour les couples $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ ; $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$

$f_1, f_2 \ldots f_{n-1}$ étant les valeurs des fractions

$$\{(x+y\sqrt{-1}) - (x_1+y_1\sqrt{-1})\}f(x+y\sqrt{-1}) = f_1$$
$$\{(x+y\sqrt{-1}) - (x_2+y_2\sqrt{-1})\}f(x+y\sqrt{-1}) = f_2$$
$$\vdots$$

si l'on suppose que $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouisse pour $x = \pm\infty$ et $y = +\infty$. et qu'on prenne l'intégrale entre les limites $+\infty$ et $-\infty$ pour $x$ et 0 et $+\infty$ pour $y$. on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\infty\sqrt{-1}) - f(x)) = \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}(f(\infty+y\sqrt{-1}) - f(-\infty+y\sqrt{-1}) - 2\pi(f_1+f_2\ldots f_{n-1})\sqrt{-1}\ldots$$

La 1ère intégrale se réduit à $\int_{-\infty}^{+\infty} -f(x)dx$ et la 2de à 0. on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi\sqrt{-1}\,(f_1 + f_2 \cdots f_{n-1}).$$

Exemple.

Soit $f(x) = \dfrac{x^{a-1}e^{bx\sqrt{-1}}}{1+x^2}$. dont on veut chercher l'intégrale entre les limites $-\infty$ et $+\infty$.

il faut former $f(x+y\sqrt{-1}) = \dfrac{(x+y\sqrt{-1})^{a-1}e^{b(x+y\sqrt{-1})\sqrt{-1}}}{1+(x+y\sqrt{-1})^2}$

et voir pour qu'elles valeurs elle se réduit à $\infty$. on peut l'écrire

$$\frac{(x+y\sqrt{-1})^{a-1}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx)\,e^{-by}}{1+(x+y\sqrt{-1})^2}$$

qui devient infinie pour $x=0$ $y=1$.

on rentre donc dans le cas précédent, il suffit de chercher $f_1$ pour cette valeur $x=0$ $y=1$. et l'on aura la valeur de l'intégrale cherchée.

$$f_1 = \frac{(x+y\sqrt{-1})^{a-1}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx)\,e^{-by}}{1+(x+y\sqrt{-1})^2}\left((x+y\sqrt{-1}) - (x_1+y_1\sqrt{-1})\right).$$

il faut donc chercher la Dne du numr et du Dr et dans le résultat faire $x = x_1 = 0$ $y = y_1 = 1$. on peut d'abord faire $x = x_1 = 0$ avant de diffr. on a

$$\cancel{(y\sqrt{-1})^{a-1}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx)\,e^{-by}}$$

$$\frac{(y\sqrt{-1})^{a-1}e^{-by}(y-y_1)\sqrt{-1}}{1+(y\sqrt{-1})^2}.$$

Dt. on voit que la diffne du 1er terme par le produit des autres facteurs donnera un terme de la Dne totale, ~~que~~ terme qui détruira en faisant $y = y_1 = 1$. il en sera de même de la

D^{ne} du 2^d. terme par le produit des deux autres. reste donc celle du 3^e. terme par le produit des deux 1^{rs} — ou — donc pour la dérivée de la f^{on} $f_1$

$$\frac{\sqrt{-1}\cdot(y\sqrt{-1})^{a-1}e^{-by}}{(2y\sqrt{-1})\sqrt{-1}}$$

ou bien quand $y = y_1 = 1$.

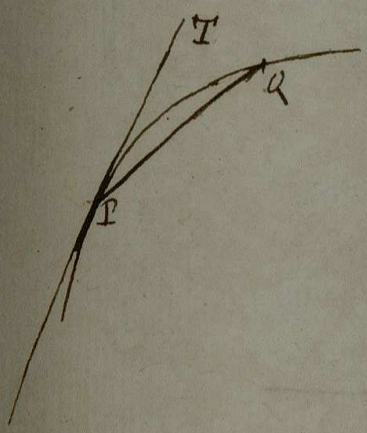
$$f_1 = \frac{(-1)^{\frac{a-1}{2}}e^{-b}}{2\sqrt{-1}}.$$

donc —

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \pi(-1)^{\frac{a-1}{2}}e^{-b}.$$

# Applications du calcul différentiel et intégral.

1° Une courbe plane ou à double courbure étant donnée par les deux projections $y=\varphi(x)$, $z=\chi(x)$ sur deux des trois plans rectangulaires ou par $f(x,y,z)=0$ et $F(x,y,z)=0$. nous allons chercher les angles que fait la tangente à la courbe en M avec les trois axes coordonnés, et par suite les équations de la tangente.




On considère une tangente en P comme une sécante PQ qui tourne autour du point P de manière à n'avoir plus que le point P de commun avec la courbe. soient $x,y,z$ les coordonnées de P. $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ seront celles de Q. pour avoir les cosinus des angles que la droite fait avec les axes, on ne considèrera que les angles qu'elle fait avec les demi-axes positifs. $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, représentant les projections de PQ sur les trois axes on aura donc

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}} = \cos\alpha$$

$$\frac{\Delta y}{\sqrt{\quad}} = \cos\beta$$

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\quad}} = \cos\gamma$$

Mais on peut aussi de $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, mettre les différentielles dans ces cas

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}$$

et $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{dz}{dx}$. Donc

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\quad \cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

ou $\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)$. $\frac{dz}{dx}=\chi'(x)$.

On peut déduire de ces formules les Eq^ons des proj^ons de la tang^te car si je prends un point qq^e $\xi, y, \zeta$ sur la tang^te on aura,

$$\frac{\xi - x}{\sqrt{(\xi - x)^2 + \dots}} = \cos\alpha$$

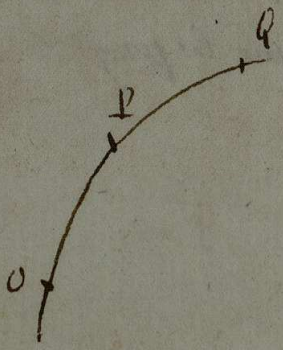
$$\frac{y - y}{\sqrt{\phantom{x}}} = \cos\beta$$

$$\frac{\zeta - z}{\sqrt{\phantom{x}}} = \cos\gamma$$

Donc $$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{y - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma}.$$

Eq^ons cherchées. ou bien encore

$$\frac{\xi - x}{\partial x} = \frac{y - y}{\partial y} = \frac{\zeta - x}{\partial z}.$$




2^de question. trouver la longueur d'un arc $S$ d'une courbe dont on connaît les Eq^ons des proj^ons. Supposons qu'il s'agisse de la courbe précédente et que l'arc soit compté à partir du point $O$. $OP = S$.

Si $x$ devient $x + \Delta x$. $S$ deviendra $S + \Delta S$. et $\Delta S =$ arc $PQ$. ou plus $PQ$ est petit plus le rapport de la corde à l'arc s'approche d'être égal à 1.

donc $$1 = \lim \frac{\Delta S}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}$$

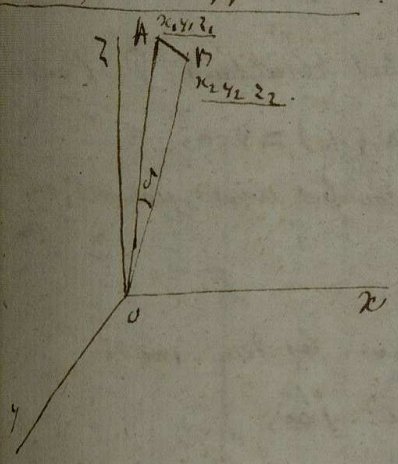
ou bien $$1 = \frac{\partial S}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}}$$

ou bien $$\frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

ainsi $S = \int_x^x \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$

comme la limite $0$ est ici fixe, il n'y a pas de constante arbitraire.

2e. Leçon des applications




On peut déterminer l'angle deux droites OB, OA de la manière suivante. dans le triangle OAB on a,

$$\cos\delta = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2\,OA.OB}$$

on a trouvé que $\alpha, \beta, \gamma$ étant les angles que AB fait avec les demi axes, et $\alpha' \beta' \gamma'$ les angles de OB avec les mêmes demi-axes, on a

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \quad \text{——} \quad \cos\alpha' = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \quad \text{——} \quad \cos\beta' = \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \quad \text{——} \quad \cos\gamma' = \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

et

$$OA = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \quad OB = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

donc

$$\cos\delta = \frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2 - \{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\}}{2\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

faisant les réductions, on a

$$\cos\delta = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

~~tel~~ est l'angle des deux droites OA, OB. on peut lui donner une autre forme, en observant que l'on a trouvé précédt.

$$\frac{x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_1}{\cos\beta} = \frac{z_1}{\cos\gamma}. \quad \frac{x_2}{\cos\alpha'} = \frac{y_2}{\cos\beta'} = \frac{z_2}{\cos\gamma'}$$

on peut donc remplacer $x_1 y_1 z_1$ ; $x_2 y_2 z_2$ par les quantités qui leur sont sont proportionnelles, et l'on a

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

on peut déterminer de là les condons pour que deux droites soient perpr.es

et pour que deux droites soient parallèles.

Plan tangent à une surface $f(x,y,z) = u = 0$.

pour le déterminer je considère la courbe résultante de l'intersection de $u=0$ par une 2de surface $f'(x,y,z) = v = 0$. —

On a trouvé que la tangente à une courbe avait pour Eqns

$$\frac{\cos\lambda}{dx} = \frac{\cos\mu}{dy} = \frac{\cos\nu}{dz}.$$

$\lambda, \mu, \nu$ étant les angles de cette tangente avec les demi-axes.

je dis que les deux surfaces $u=0$ $v=0$ ont pour Eqns

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0$$

$$\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz = 0.$$

On peut dans ces Eqns remplacer $dx, dy, dz$ par les grandeurs $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$, ou par $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ qui leur sont proportionnelles

$$(1)\quad \frac{du}{dx}(\xi - x) + \frac{du}{dy}(\eta - y) + \frac{du}{dz}(\zeta - z) = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(\xi - x) + \frac{dv}{dy}(\eta - y) + \frac{dv}{dz}(\zeta - z) = 0$$

représenteront la tangente à la courbe résultante de l'int$^{on}$ de $u=0$ $v=0$. car $\xi, \eta, \zeta$ représentent les coord$^{es}$ d'un point quelconque de la tang$^{te}$ par conséquent la tangente doit se trouver sur des surfaces, on qq$^{es}$ soit la surface $v=0$ pourvu qu'elle passe par le même point de tangence on aura toujours l'Eq$^{on}$ (1). Or toutes les tangentes se trouvent dans le plan représenté par (1). donc (1) est le lieu de toutes les tangentes à toutes les sections faites dans la surface et passant par le point de tangence (1) est donc l'Eq$^{on}$ du plan tangent à la surface $u=0$.

Soit proposé de trouver le plan normal en P. à la courbe $u=0$
il faut qu'il soit perp$^{re}$ à la tang$^{te}$ si $\alpha, \beta, \gamma$ sont les angles
de la tang$^{te}$ et $\alpha' \beta' \gamma'$. celle de la normale avec les demi-axes
il faut que l'on ait puisque l'angle de ces droites est droit

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \quad (1)$$ or

si $\xi, \eta, \zeta$ sont les coordonnées d'un point q$^{que}$ de la normale
on voit que d'après les Eq$^{ons}$

$$(2)\quad \frac{\xi - x}{\cos\alpha'} = \frac{\eta - y}{\cos\beta'} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\alpha}{\frac{du}{dx}} = \frac{\cos\beta}{\frac{du}{dy}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{du}{dz}}.$$

on peut en remplaçant dans (1) $\cos\alpha$ — — $\cos\alpha'$ — —
par les quantités qui leur sont proportionnelles on a —

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

Eq$^{on}$ qui représente le plan normal.

pour avoir l'Eq$^{on}$ de la normale, on la considère comme
perp$^{re}$ au plan tangent, elle doit être perp$^{re}$ à une tang$^{te}$ q$^{que}$
tirée dans ce plan. or le plan tangent est —

$$\frac{du}{dx}(\xi - x) + \frac{du}{dy}(\eta - y) + \frac{du}{dz}(\zeta - z) = 0.$$

mais d'après (2). on a ——

$$\frac{du}{dx}\cos\alpha' + \frac{du}{dy}\cos\beta' + \frac{du}{dz}\cos\gamma' = 0.$$

or l'Eq$^{on}$ (1). doit avoir lieu pour que la droite soit perp$^{re}$
donc $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ sont proportionnels à $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

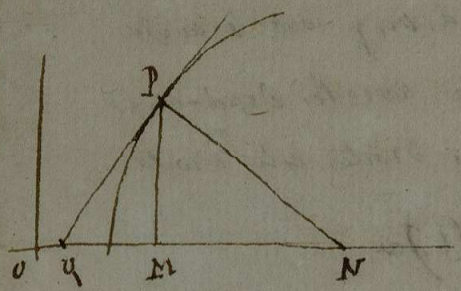
or $$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma}.$$

exprime l'Eq$^{on}$ de la normale. et remplaçant $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$
par les quantités proportionnelles on a ——

$$\frac{\xi - x}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{\eta - y}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{\zeta - z}{\left(\frac{du}{dz}\right)}$$

est l'Eq$^{on}$ de la normale.

3e. Leçon des applications.




$$\frac{\xi - x}{\partial x} = \frac{\eta - y}{\partial y}.$$

telle est l'Eqon de la tangte à la courbe plane $f(x, y) = a$

on peut l'écrire $\quad y - y = y'(\xi - x).$

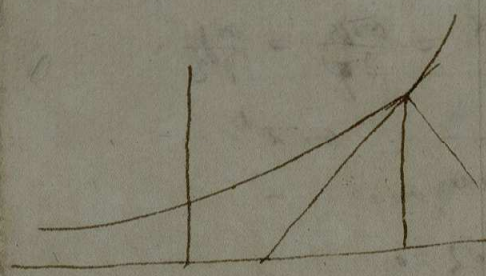
$y = 0$ donne $\quad x - \xi = \frac{y}{y'}$ Soustte.

$y - y' = -\frac{1}{y'}(\xi - x)$. est l'Eqon de la ~~sous~~normale

$y = 0$ donne — $\xi - x = yy'$. Sous normale.

$$PQ = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}} = y\sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}. \text{ Longeur de la tangte.}$$

$$PN = \sqrt{y^2 + y^2 y'^2} = y\sqrt{1 + y'^2}$$



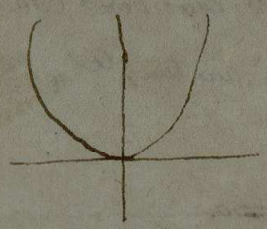
Appons 1ère soit $y = A^x$ l'Eqon de la logque $x = L(y)$.

$y' = A^x / A$. donc,

$$y - y = A^x / A(\xi - x). \quad \text{Eqon de la tangte.}$$

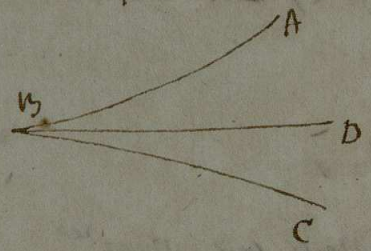
$$x - \xi = \frac{y}{A^x / A} = \frac{1}{/A} = L(e). \quad \text{Sous normale}$$

dans la logque toutes les sous ~~tangentes~~ tangentes sont égales.

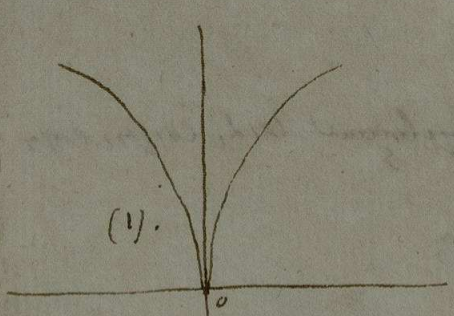


$$\xi - x = yy' = y^2 / A. \quad \text{Sous normale.}$$

2de parabole $y = px^2$. $y' = 2px$. $\frac{y}{y'} = \frac{1}{2}x$. pour la tangte trigque de l'angle que fait la touchante avec l'axe des $x$.




Quand une courbe AB est tangente à une droite et qu'elle revient sur elle-même de manière à former une autre branche BC tangte aussi à BD. on nomme le point B point de rebroussement du 1er ordre quand les 2 branches AB, BC sont à droite et à gauche de la tangte et du 2d. ordre quand elles sont du même côté.




exemple soit une courbe du genre de la parabole $y = ax^{\frac{2}{3}}$. ou $y = a(x^{\frac{1}{3}})^2$. elle est d'après sa forme située au dessus de l'axe des $x$. et symétrique par rappt à l'axe des $y$. $y' = \frac{2a}{3x^{\frac{1}{3}}}$ faisant $x = 0$ — on a $y' = \infty$. or $y' = \text{tang}(T)$ $T$ étant l'angle de la tangte avec l'axe des $x$. donc au point O, la tangte à la courbe fait un angle droit. puisqu'elle est symétrique, il y a un point de rebroussmt en O. elle a la forme (1)

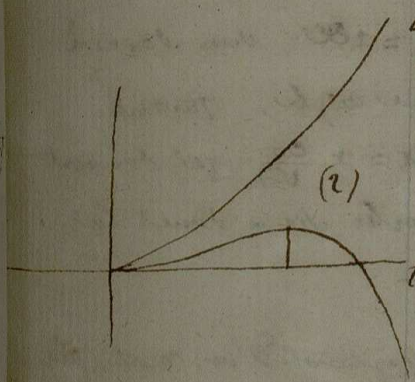
Exemple du 2e ordre de rebrouss.t $(y - x^2)^2 = x^5$ d'où $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$.

La courbe ne s'étend que du côté des $x$ positives à cause de $x^{\frac{5}{2}}$. qui peut s'écrire $\sqrt{x^5}$.

$$y' = 2x + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad \text{quand on prend le signe } +$$
$$y' = 2x - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad \text{quand on prend le signe } -$$

La courbe passe par l'origine et à ce point $y' = 0$. donc elle est tang.te à l'axe des $x$, $y'$ va en aug.t avec $x$ jusqu'à $y' = \frac{1}{0}$ donc la 1ère branche va en s'évasant en considérant la 2de valeur on a

$$y = x^2(2 - x^{\frac{1}{2}}).$$



(2)

la courbe sera au dessus de l'axe des $x$ tant que $x^{\frac{1}{2}} < 2$ et sera tangente à l'axe des $x$. au point 0. donc elle est la forme (2) il existe un point A max.me pour la 2de courbe il faut pour ce point que $y' = 0$. dans la 2de Eq.on ci-dessus.

or $y' = x(2 - \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}})$. il faut que $x^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ ou $x = \frac{16}{25}$. voilà l'abscisse du point maximum.

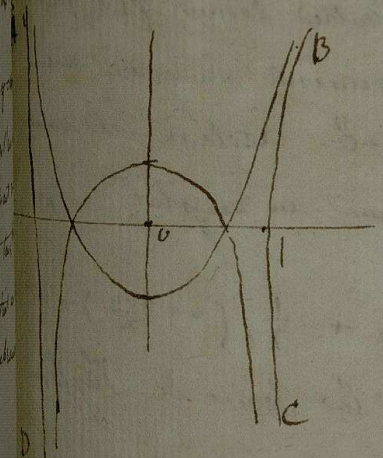
---

il existe des points isolés dans certaines courbes.

Exemple. $y^2 = x^2(x^2 - a^2)$. $y = \pm x\sqrt{x^2 - a^2}$. si $x = 0$ $y = 0$ — c'est un point isolé car jusqu'à $x = a$ on n'aura aucun point de la courbe. donnant à $x$ des valeurs plus grandes que $a$. On aura deux branches symmétriques, dont on peut déterminer les asymptotes car $y = \pm x\sqrt{x^2 - a^2}$ peut se mettre sous la forme

$$y = \pm x^2\left\{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} = \pm x^2\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2} - 1)}{1 \cdot 2}\frac{a^2}{x^4} + \cdots\right.$$

ou $y = \pm x^2\left\{1 - \frac{a^2}{2x^2} - \frac{a^4}{8x^4} - \&a \cdots\right)$.



or tous les termes à partir de $\frac{a^4}{8x^4} - \&a \cdots$ peuvent être représentés par $u$. $u$ dev.t nul quand $x$ devient très grand. donc

$$y = \pm x^2\left(1 - \frac{a^2}{2x^2}\right) = \pm\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right).$$

sont deux paraboles asymptotes de la courbe. elle est ainsi construite. ces 2 branches sont BC, AD. le centre o est un point singulier.

Soit la courbe $y^2 = x^2(a^2-x^2)$. à construire.

d'abord elle est limitée entre $x=+a$ et $x=-a$. elle est symmétrique par rapport à l'axe des $x$ et des $y$.

$$y' = \pm \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$x=a$. donne $y'=\frac{1}{0}$. donc la tang$^{te}$ est perp$^{re}$ à l'axe des $x$ aux points A, B, déterminés par $x=+a$ et $x=-a$.

si je fais $x=0$. j'ai $y' = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2}} = \pm a$. on a donc à l'origine deux tang$^{tes}$ qui font le même angle. faisant $y'=0$ par $a^2-2x^2=0$. on a $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ qui donnent les 4 points maxima. de la courbe elle a donc la forme indiquée à côté. ———.



Méthode générale pour déterminer les asymptotes lin$^{es}$ d'une courbe plane dont l'Eq$^{on}$ est du degré $m$ en $x, y$. et homogène par rapport à ces variables. on pourra l'écrire

$$(2)\ x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}\chi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2}\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots = 0.$$

l'Eq$^{on}$ de l'asymptote est $y=ax+b$. et pour que la courbe puisse avoir des asymptotes il faut qu'on puisse mettre l'Eq$^{on}$ de la courbe sous la forme

$$y = ax + b + u. \quad (1)$$

$u$ étant une Expression qui devient 0 quand $x=\infty$

on peut écrire (1) et (2) ainsi qu'il suit :

$$(4)\ \frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{u}{x}, \quad (3)\ \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\chi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots$$

ou quand $x=\frac{1}{0}$. $\left(\frac{y}{x}\right) = a$. et l'autre donne $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=0$. donc on a $\varphi(a)=0$. qui résolue donnera la valeur de $a$ propre à être substituée dans $y=ax+b$. reste à déterminer $b$.

on peut mettre (3) sous une autre forme en remplac$^{t}$ $\frac{y}{x}$ par sa valeur tirée de (4) ....

$$\varphi\left(a + \frac{b+u}{x}\right) + \frac{1}{x}\chi\left(u + \frac{b+u}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\left(u + \frac{b+u}{x}\right) + \ldots$$

Développant chacun de ces termes par la série de Taylor

ou on ——

$$\left.\begin{array}{l} \varphi a + \frac{b+u}{x}\varphi'(a) + \frac{(b+u)^2}{1\cdot 2\cdot x^2}\varphi''(a) + \text{----} \\ \frac{1}{x}\chi(a) + \frac{b+u}{x^2}\chi'(a) + \frac{(b+u)^2}{1\cdot 2\cdot x^3}\chi''(a) + \text{----} \\ \frac{1}{x^2}\psi(a) + \frac{b+u}{x^3}\psi'(a) + \text{----} \end{array}\right\} = 0$$

$\varphi(a) = 0$. d'après la cond$^{on}$ précédente on peut ensuite diviser par $x$. il reste $(b+u)\varphi'(a) + \chi(a)$ qui en supposant pour un D$^r$ tous les autres termes se réduisent à 0 quand $x = \frac{1}{0}$. Admettons que $u$. Il reste donc

$$b\varphi'(a) + \chi(a) = 0. \quad \text{d'où} \quad b = -\frac{\chi(a)}{\varphi'(a)}.$$

Si $\varphi(a)$ avait des racines égales $\varphi'(a) = 0$ donc alors il n'y aurait pas d'asymptote.

appl$^{on}$ aux courbes du 2$^{d}$. degré.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

On peut l'écrire

$$x^2\left(C + B\frac{y}{x} + A\frac{y^2}{x^2}\right) + x\left(E + D\frac{y}{x}\right) + F\frac{1}{x} = 0.$$

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C + B\frac{y}{x} + A\frac{y^2}{x^2}$$

$$\chi\left(\frac{y}{x}\right) = E + D\frac{y}{x}.$$

Ainsi $\varphi(a) = C + Ba + Aa^2 = 0$. (1)

et $\chi(a) = E + Da$.

Or pour qu'il puisse y avoir des asymptotes il faut que les racines de (1) soient inégales et réelles ou que

$$B^2 - 4AC > 0.$$

donc ce n'est que dans le cas de l'hyperbole qu'on peut avoir des asymptotes. alors

$$a = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

et pour avoir $b$ il faut avoir $\varphi'(a)$. qui est $2Aa + B$ donc $b = -\frac{\chi(a)}{\varphi'(a)} = +\frac{E + D\frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}}{2A\frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} + B}$

on a donc ainsi $b$ et $a$ et l'asymptote est déterminée

4e Leçon des applications

## Des infinis des divers ordres.

Si $\alpha$ est une quantité infiniment petite, $\alpha^2$ sera une quantité inft petite du 2d ordre $\alpha^3$ du 3e ..... $\alpha^n$ du ne.

On voit aussi que

$(K \pm \varepsilon)\alpha$ sera inft petite du 1er ordre
$(K \pm \varepsilon)\alpha^2$ ..... du 2d ordre
$\vdots$
$(K \pm \varepsilon)\alpha^n$ ..... du ne. ordre.

En général toute quantité de la forme $(K \pm \varepsilon)\alpha$. dont le rapport avec $\alpha$ converge vers $K$ quantité finie quand $\alpha$ et $\varepsilon$ convergent vers 0. $\alpha$ est inft petit car $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$. quantité finie $\frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1$. donc $\alpha^2$ l'est aussi ... il en sera de même de tous les termes $(K \pm \varepsilon)\alpha - K\alpha^n$ ....

Si l'on a une courbe $y = f(x)$. dans laquelle je fais $x = x + \alpha\delta x$ on a d'après le théorème de Taylor.

$$f(x+\alpha\delta x) = y + \frac{\alpha}{1}\delta y + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\delta^2 y + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3 y \text{ ----- } + \frac{\alpha^n}{1\cdot 2\cdots n}\delta^n y$$
$$\text{ ----- } + \frac{\alpha^{n+1}}{1\cdot 2\cdots n+1}(\delta^{n+1} y \pm \varepsilon).$$

Si toutes les dérivées sont nulles jusqu'à celle de l'ordre $n$, on a

$$f(x+\alpha\delta x) = \frac{\alpha^{n+1}}{1\cdot 2\cdots n+1}(\delta^{n+1} y \pm \varepsilon).$$

qui est un inft petit de l'ordre $n+1$. car en $\delta$ tout $\alpha^{n+1}$ reste pour rapport $\frac{\delta^{n+1} y}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n+1}$ quantité finie.

Si $f'x$ devient pas nul on a

$$f(x+\alpha\delta x) - y = \Delta f(x) = \frac{\alpha^{n+1}}{1\cdot 2\cdots n+1}(\delta^{n+1} y \pm \varepsilon).$$

infiniment petit relatif à l'accroissement de $x$. dans la fon

### Propriétés des infiniment petits.

si l'on a $(K \pm \varepsilon)\alpha^m$ inft petit de l'ordre $m$. (1)
et $(K' \pm \varepsilon')\alpha^n$ inft ..... $n$. (2)

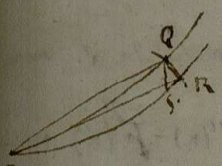
si $m > n$ (1) finira par avoir des valeurs plus petites que (2).

car en prenant le rapport de (1) à (2). on a —

$$\frac{(K \pm \varepsilon')}{(K' \pm \varepsilon')}\, \alpha^{m-n}$$

or $\alpha$ devenant nul ce rapport est nul, il faut donc que le $\mathrm{H}^{\mathrm{er}}$ soit plus petit que le dénominateur. ainsi (1) a donc des valeurs plus petites que (2).

ces principes une fois posés, proposons-nous de reconnaître si deux courbes données $y = f(x)$ et $y = Y_1(x)$, ont un point de contact du 1er du 2d du 3e — du $n^{\mathrm{e}}$ ordre. on dit que deux courbes qui ont un point commun R ont un point de contact du $n^{\mathrm{e}}$ ordre, quand le rapport de l'arc QR au rayon PQ est un infiniment petit de l'ordre $n$. ($\overset{\frown}{QR}$ étant l'arc de sphère décrit de P comme centre avec un rayon PQ infiniment petit). PQ étant ici un inf$^{\mathrm{t}}$ petit du 1er ordre.



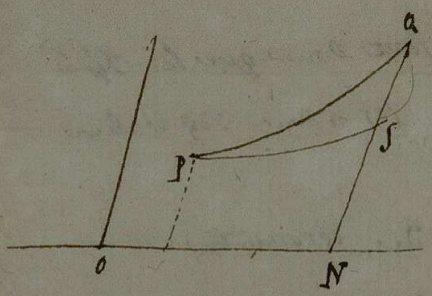

. soient quand coupés par une sphère d'un rayon inf$^{\mathrm{t}}$ petit, traversent l'arc de courbe compris entre les 2 courbes un inf$^{\mathrm{t}}$ petit de l'ordre $(n+1)$. Dans ce cas on dit que les courbes ont un contact de l'ordre $n$.

je dis que $\frac{\text{arc } QR}{PQ}$ étant infiniment petit arc QR ou bien QR qui lui est sensiblement égal puisque le rayon PQ est infiniment petit est un infiniment petit d'un ordre supérieur à PQ, dans les fonc $y = f(x) = y = Y_1(x)$ · continues.

car $\frac{\text{arc } QR}{PQ}$ = angle QPR qui est infiniment petit puisque PR et PQ se confondent sensiblement avec la tangente en R. donc $\frac{QR}{PQ}$ est inf$^{\mathrm{t}}$ petit. PQ aussi il faut donc que QR décroisse plus que PQ. donc d'après le principe ci-dessus il faut que QR soit d'un ordre supérieur à PQ.

si l'on mène une corde QS qq$^{\mathrm{e}}$ je dis qu'elle sera un inf$^{\mathrm{t}}$ petit du même ordre que QR. car dans le triangle PQR. on a $\frac{QS}{QR} = \frac{\sin(QRS)}{\sin(QSR)}$. or SR se confond sensib$^{\mathrm{t}}$ avec la tang$^{\mathrm{te}}$ en R à la courbe IR. ainsi $\sin QRS = 1$. donc le rapport de $\frac{QS}{QR}$ est constant. Donc ces inf$^{\mathrm{ts}}$ petits sont du même ordre.

nous allons donc chercher de quel ordre est l'infiniment petit QS quand il s'agit des courbes $y = F(x)$, $y = f(x)$. QS étant parallèle à l'axe des y. delà nous conclurons l'ordre de l'inf$^t$ petit provenant du rapport de l'arc au rayon, et par conséquent l'ordre de l'infiniment petit relatif au contact des deux courbes en P.




soit $y = f(x)$ la courbe PQ — $x, y$ les coord$^{ées}$ de P.

$y = F(x)$ ..... PS. — $x + \alpha dx$. l'abscisse ON.

on aura — $NQ = y = f(x + \alpha dx)$

$SN = y = F(x + \alpha dx)$. d'où $NQ - SN = f(x + \alpha dx) - F(x + \alpha dx)$

Développant chacune de ces Exp$^{ons}$ suivant les puissances de $\alpha$. on aura

$$QS = f(x) - F(x) + \frac{\alpha dx}{1}\left(f'(x) - F'(x)\right) + \frac{\alpha^2 d^2x}{1.2}\left(f''(x) - F''(x)\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\alpha^n d x^n}{1.2\cdots n}\left(f^{(n)}(x) - F^n(x) \pm \varepsilon\right).$$

nous avons vu que pour avoir un inf$^t$ petit de l'ordre n il fallait que tous les termes jusqu'à celui de l'ordre n s'évanouissent par la valeur de x qui convient au point commun P. donc

$$f(x) = F(x).$$
$$f'(x) = F'(x)$$
$$\vdots$$
$$f^{n}(x) = F^{n}(x).$$

il y aura un inf$^t$ petit pour QS, de l'ordre n+1, par conséquent un contact de l'ordre n+1.

—— ce que l'on vient de dire pour les courbes planes, a également lieu pour les courbes à double courbure.

soient $y = f(x)$ la 1$^{ère}$ courbe PQ et $y = F(x)$ la 2$^{de}$ courbe PS.

$z = f(x)$ — $z = F(x)$

$x, y, z$ les coordées de P et $x + \alpha dx$ l'x des deux points

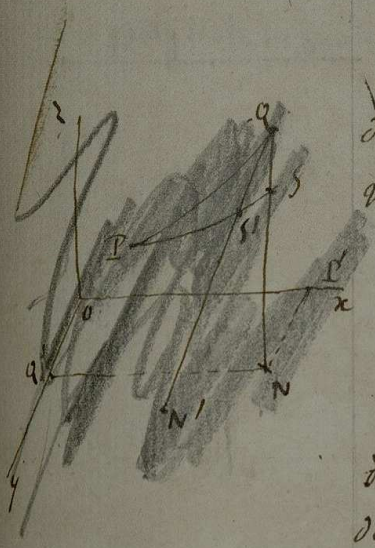
il y a un cas où les dérivées égales quand, n'indiquent plus l'ordre du contact c'est lorsque la tang$^{te}$ est parallèle à l'axe des y et en effet dans ce cas le triangle PQS n'est plus possible; il faut donc changer les axes, la courbe sera la même, et le triangle sera possible. —— on en peut donner un exemple.

$y = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad y = x^{\frac{1}{3}}$.

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $\quad y = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$y^{(n)} = K x^{-n}$ $\quad y^{(n')} = K'(x)^{-n'}$

donc ces Eq$^{ons}$ semblent indiquer un contact d'un ordre infini. mais si l'on change y en x, on trouvera qu'elles ont à l'origine un contact du 1$^{er}$ ordre.




Quand je suppose sur la même parallèle aux $\infty$ des $z$. $QS'N'$ est supposé parallèle à $zOy$.

Il faut savoir de quel ordre est l'infiniment petit $QS'$. il sera du même ordre que les projections sur $zO$ et $Oy$ d'après ce qu'on vient de voir pour un plan. on a pour $Q$ et $S$.

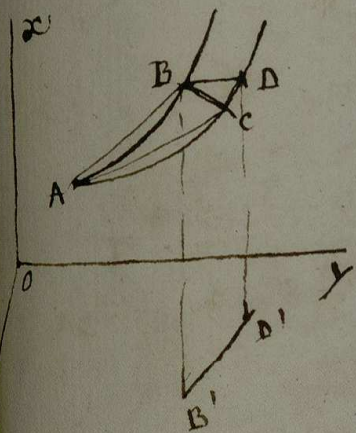
$$y = f(x+\Delta x) \qquad y = F(x+\Delta x)$$
$$z = f(x+\Delta x) \qquad z = F(x+\Delta x).$$

Il suffit donc de chercher l'ordre des infiniments petits de projections de $QS'N'$ sur $Oz$ et $Oy$ qui sont $QN$ et $NP$. et l'on aura celui de l'infiniment petit de $QN' - S'N'$ celui de $QN - SN = QS$. et de même pour les $y$. ainsi il faudra que en $D^t$ $y$ et $z$ sur les deux plans $zx$, et $zy$. ou ait les mêmes conditions que précédemment sur un plan ou que

$$f(x) = F(x) \qquad f(x) = F(x)$$
$$f'(x) = F'(x) \qquad f'(x) = F'(x)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^{(n+1)}(x) = F^{(n+1)}(x) \qquad f^{(n+1)}(x) = F^{(n+1)}(x).$$

pour que les deux courbes aient un contact de l'ordre $n+1$.

---




Soient $x, y, z$ les coord$^{es}$ de A. il faut comme dans un plan que BC soit un infiniment petit de l'ordre $(n+1)$ pour que les courbes aient un contact de l'ordre $n$. si on mène par le point B un plan parallèle à $zy$ la corde BD sera alors parallèle à $zOy$. on démontre que BC est un infiniment petit du même ordre que BD. car dans le triangle BCD DC se confond sensiblement avec la tang$^{te}$ en D donc BCD est rectangle en C et l'on a $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{\sin(CDB)}$ donc toujours excepté dans ce cas. BD est un infiniment petit du même ordre que BC. il faut pour dire que les courbes ont un contact de l'ordre $n$ écrire que BD est un infiniment petit de l'ordre $(n+1)$. on BD se projette sur $Oy$ suivant sa véritable grandeur, il suffit donc de voir de quels ordres sont les infiniments petits provenant des projections de $B'D'$ sur $Oy$ et $Oz$. (mais l'infiniment petit d'une projection est toujours de même ordre celui de la ligne projetée. à moins qu'elle ne soit perp$^{re}$ sur l'axe $Oy$), et dans ce cas $B'D'$ serait de même ordre que sa projection sur $Oz$.) il faut donc voir lequel ordre est tous les infiniment petits des projections sur les axes, et le moins élevé de ces infiniment petits déterminera le degré du contact.

Ecole polytechnique.

Cours d'analyse.

131

II

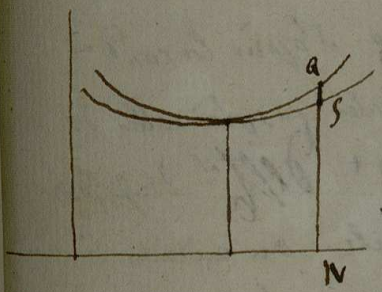
Lamarche.

5e Revue des applications.

on a trouvé généralement

$$(1)\quad f(x+\alpha dx) - F(x+\alpha dx) = \frac{\alpha^{n+1} dx^{n+1}}{1\cdot 2 \cdots n+1}\,(f^{n+1}(x) - F^{n+1}(x) \pm \varepsilon).$$

si l'on a $f^{(n+1)}(x) > F^{(n+1)}(x)$. on voit que le signe de cet infiniment petit dépend de $(\alpha dx)^{n+1}$ quand $n$ est impair on a $n+1$ pair — et $(\alpha dx)^{n+1}$ est toujours positif. donc quand la courbe a un contact d'un ordre impair les deux courbes sont situées constamment du même côté de la tangente car dans ce cas la $2^{de}$ est constamment positive.




si $n$ est pair $n+1$ est impair et la $2^{de}$ (1) change de signe avec $\alpha$. donc quand le contact est d'ordre pair. la $1^{re}$ courbe traverse la $2^{de}$ au point de contact.

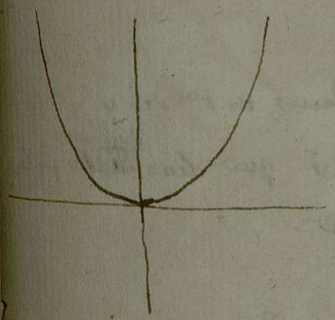
on peut d'après cela savoir si une droite $y = ax + b$ a avec la courbe $y = f(x)$ un contact de l'ordre 1, 2, 3 — on va.

Exemple soit la parabole $y = x^2$.

pour voir si $y = 0$ est tangente à la courbe à l'origine — on prend les dérivées de la parabole et la droite,

$$y = x^2 \cdots y = 0$$
$$y' = 2x \cdots y' = 0$$
$$y'' = 2 \cdots y'' = 0$$

substant dans les valeurs de $y$ $x = 0$ on a. on voit que l'on a jusqu'à $y'' - y''$ donc la courbe n'a à l'origine qu'un contact du 1er ordre. parce que elle est toute entière au dessus de l'axe des $x$.



soit $y = x^3$ on a — $\cdots y = 0$
$y' = 3x^2$ — — — $y' = 0$
$y'' = 6x$ — — $y'' = 0$
$y''' = 6$ — — — $y''' = 0$.

donc la courbe a à l'origine un contact du 2d ordre. la courbe traverse donc à ce point la tangente. on appelle ce point point d'inf$^{on}$

Du cercle osculateur. On appelle ainsi un cercle qui a — avec la courbe $y=f(x)$ un contact du 2d ordre au point $x,y$. Soient $\xi, \eta$ les coord. centre et $\rho$ le rayon de cercle. on a —

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2.$$

pour l'Eqn de ce cercle.

Cherchons à déterminer $\xi, \eta$ et $\rho$ d'après la cond^n ci-dessus. il faut que les dérivées soient égales jusqu'à celles de l'ordre 2 inclusivement. Ainsi il faut Diff^r deux fois par rapport à $x$ $y=f(x)$ et l'Eqn du cercle. on aurait 6 — Eqns qui se réduiraient à trois puisqu'on doit égaler $f'(x)$ à $F'(x)$. $f(x)$ à $F(x)$ et $f''(x)$ à $F''(x)$. Au moyen de ces trois Eqns on pourrait donc ~~trouver~~ trouver les valeurs de $\xi, \eta, \rho$. on peut donc de l'Eqn du cercle et l'on aura, —

$$(1).\ (x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2$$

$$(2)\ (x-\xi)+(y-\eta)y'=0$$

$$(3).\ 1+y'^2+(y-\eta)y''=0$$

Cherchant $\xi, \eta, \rho$ dans ces trois Eqns on aura leurs valeurs en fonc de $y', y''$ qu'on devra remplacer par les dérivées de $y=f(x)$ qui leur doivent être égales pour que la cond^n ci-dessus soit satisfaite.

On trouve

$$\frac{x-\xi}{y'}=\frac{y-\eta}{-1}=\pm\frac{\rho}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Au moyen de ces 3 Eqns on aura $\xi, \eta, \rho$ en fonc de $x$ seulement — quand on aura remplacé $y', y''$ et les dérivées tirées de $y=f(x)$. on a

$$\rho=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Ainsi toutes les fois que l'Eqon de la courbe sera de la forme $y = f(x)$, voilà le rayon du cercle osculateur au point $x, y$.

Si l'on cherche le cercle osculateur d'une courbe $y = f(x)$. $y$ et $x$ étant des variables dépendantes, on se sert de la méthode suivante pour trouver le contact de deux courbes

$$(1)\quad y = f(x)$$
$$(2)\quad y = F(x).$$

dont les variables dépendantes $x$, et $y$ sont liées par la relation

$$(3)\quad x^2 + y^2 = r^2$$

on sait d'après ce qu'on a vu que $f(x) = F(x)$ $f'(x) = F'(x)$ .... &c ..

$f^{(n)}x = F^{(n)}x$ pour qu'il y ait contact de l'ordre $n$. or il faut pour trouver ces dérivées différentier (1) et (3). on a, ...

$$(4)\begin{cases} dy = f'(x)dx, \quad d^2y = f'(x)dx + f''(x)dx^2 \quad d^3y = \text{———} \\ xdx + ydy = rdr, \quad dx^2 + dy^2 + xd^2x + yd^2y = dr^2 \quad \text{----} \end{cases}$$

si l'on D.ie de même (2) et (3). on a —

$$5\begin{cases} dy = F'(x)dx, \quad d^2y = F'(x)dx + F''(x)dx^2 \quad \text{---} \\ xdx + ydy = rdr, \quad dx^2 + dy^2 + xd^2x + yd^2y = dr^2 \end{cases}$$

or les dérivées étant égales jusqu'à celles de l'ordre $n$. il s'ensuit d'après les Eqons 4 et 5 que les diff.ls jusqu'à celles de l'ordre $n$ le sont aussi.

ainsi il suffit pour trouver le cercle osculateur d'une courbe

$$y = f(x).$$

de différencier l'équation du cercle,

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \rho^2$$

en regardant $x, y$ comme variables dépendantes et de subs.r dans la valeur de $\rho$ au lieu de $dx, dy$, leurs valeurs tirées de l'Eqon de la courbe. il vient, —

$$(x - \xi)dx + (y - \eta)dy = 0, \quad dx^2 + dy^2 + (y - \eta)d^2y + (x - \xi)d^2x = 0$$

on tire de la 1re

$$\frac{x-\xi}{\partial y} = \frac{y-y}{\partial x}$$

faisant la sommes des carrés ..... on a d'après un théorème connu d'algèbre

$$\frac{x-\xi}{\partial y} = \frac{y-y}{\partial x} = \pm \frac{\rho}{\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}} = -\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}$$

voilà quelles sont les 3 Eqons propres à déterminer $\xi$, $y$, et $\rho$ quand la courbe $y=f(x)$ contient des variables $x, y$ dépendantes

on a $$\rho = \pm \frac{(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}$$

si l'on suppose dans cette Eqon que $x$ est variable indépendante on a

$$\rho = \pm \frac{(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x\partial^2 y} = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

on peut obtenir la valeur du rayon $\rho$ en fonction de la normale au point $x, y$ car si $\nu$ désigne la longueur de cette normale on a trouvé $\nu = \pm y\sqrt{1+y'^2}$ .... $\nu^3 = y^3(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$

donc $$\rho = \pm \frac{\nu^3}{y^3 y''}$$

on peut appliquer cette méthode à la recherche du rayon de courbure aux Eqons du 2d degré réunies dans l'Eqon

$$y^2 = 2px + qx^2$$

on a en Dt ... $$yy' = p + qx.$$

Dt encore ... $$y'^2 + yy'' = q.$$ multipliant cette dernière Eqon par $y^2$. on a $$y^2y'^2 + y^3y'' = qy^2 = 2pqx + q^2x^2$$

donc $$y^3y'' = -p^2.$$ et par conséquent $\rho = \pm \frac{\nu^3}{p^2}$

dans la parabole

$\xi - x = p$.

$\nu = \sqrt{y^2+p^2}$

$\rho = \frac{(y^2+p^2)^{\frac{2}{3}}}{p^2}$

6e Leçon des applications.

il peut arriver que la courbe soit donnée par une Eqon $u=0$, fon de $x, y$, $x, y$ étant des variables dépendantes et qu'on ne donne pas l'Eqon qui lie ces variables, on peut trouver le cercle osculateur en un point donné.

on a trouvé pour le cercle que l'on veut rendre osculateur

$$\frac{x-\xi}{y'} = \frac{y-y}{-1} = \frac{\pm \rho}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1+y'^2}{y''}.$$

il s'agit donc de trouver les valeurs de $y', y''$ dans cette Eqon $u=0$, et de les substituer, on aura ainsi la valeur de $\rho, \xi, y$.

Dt $u=0$. on a ---

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \quad (1)$$

Dt de nouveau, on a

$$d_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + d_y\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = 0$$

x est pris pour variable indépte

qui donne

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y\right) = 0$$

faisant les réductions et Dt par $dx^2$, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}y' + \frac{\partial^2 u}{\partial y}y'' + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}y'^2 = 0.$$

remplaçant $y'$ par sa valeur tirée de (1) qui peut s'écrire

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + y'\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad y' = -\left\{\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right\}.$$

on a ---

$$y'' = -\frac{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3}.$$

on a donc d'après l'Eqon (2) en dist. ce nr. par $N$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{y'} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{-1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{N}{y''\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

remplaçant $y', -1, \sqrt{1+y'^2} + y''$ par les quantités qui leur sont proportionnelles, on aura les 3 Eqons cherchées

$$\frac{x-\xi}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{y-y}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\pm \rho}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} = \frac{(1+y'^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{N}$$

ce Dr. terme peut s'écrire

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{N}.$$

On peut trouver au moyen de ces Eqns le rayon et la position du cercle osculateur sans résoudre l'Eqn de la courbe.

$$\rho = \pm \frac{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

On peut trouver ainsi la courbe des centres des cercles osculateurs à une courbe donnée, il suffit pour cela d'obtenir $\xi, y$ en fonc de $x, y$ et d'éliminer $x$ et $y$ entre les Eqns en $\xi, y$ et celle de la courbe.

Appliquons cela à un exemple.

Soit l'Ellipse (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. que j'écris $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0$

Dt j'ai $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{b^2}$ ; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{b^2}$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

Mettant ces valeurs dans la valeur de $\rho$. on a

$$\rho = \pm a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

on a pour déterminer la courbe des centres de courbure d'Eqn (1) et les 2 Eqns

$$\frac{x - \xi}{\frac{x}{a^2}} = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$$

$$\frac{y - y}{\frac{y}{b^2}} = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right).$$

d'où

$$\frac{x - \xi}{x} = b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$$

et $$1 - \frac{\xi}{x} = b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{b^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\right) = b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{a^4}(b^2 - a^2) = 1 - \frac{x^2}{a^4}(a^2 - b^2). \quad \text{Si on fait } a^2 - b^2 = A$$

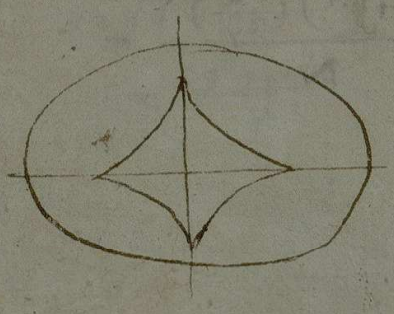
$$\text{---} \quad b^2 - a^2 = B$$

on a $\xi = \frac{x^3}{a^3} A$. } Eliminant entre ces 2 Eqns $x$ et $y$ de

de même $y = \frac{y^3}{b^3} B$ } l'Ellipse (1) on a

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Eqn des centres de courbure.



Lieq$^{on}$ que nous venons de donner pour le cercle osculateur est telle que les valeurs qui y satisfont doivent convenir à

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2 \\ &(2)\quad (x-\xi)+(y-\eta)y'=0 \\ &(3)\quad 1+y'^2+(y-\eta)y''=0 \end{aligned}\right\}$$

$\xi$ et $\eta$ variant en même temps que $x$. or si l'on dif$^{e}$ (2) par rapport à $\xi$ et $\eta$. on a, $(dx-d\xi)+(y-\eta)y''dx+y'(dy-d\eta)=0$. qui peut s'écrire $dx(1+(y-\eta)y''+y'^2)-d\xi-dy\,y'=0$

d'où $-1+y'\dfrac{dy}{d\xi}=0$ ou $1+\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dy}{d\xi}=0$.

Donc toute normale à la dev$^{e}$ courbe est tangente à la ligne de courbure, et reciproq$^{t}$.

On peut démontrer que la ligne de courbure augmente d'un rayon de courbure à l'autre de la même quantité que ces rayons.

Soit $s$ un arc de courbe $\perp$ à $\rho$ et $\sigma$ l'arc de la ligne de courbure correspondante. on sait que l'on a

$$ds=dx^2+dy^2 \text{ et } d\sigma^2=d\xi^2+d\eta^2$$

Diff$^{t}$ l'éq$^{on}$ (1) par rapport à $\xi$, $\eta$ et $s$. on a

$$(\xi-x)(dx-d\xi)+(y-\eta)(dy-d\eta)=s\,ds$$

or d'après l'éq$^{on}$ (2). cette dern$^{e}$ se réduit à

$$(\xi-x)d\xi+(\eta-y)d\eta=s\,ds.$$

on a de plus $d\xi+y'd\eta=0$. donc on peut établir les 3 éq$^{ons}$

$$\frac{d\xi}{y'}=\frac{d\eta}{-1}=\frac{\pm d\sigma}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{-s\,ds}{(x-\xi)y'-(y-\eta)}.$$

Donc $\dfrac{d\sigma}{s}=\dfrac{s\,ds}{s^2}$ d'où $d\sigma=ds$.

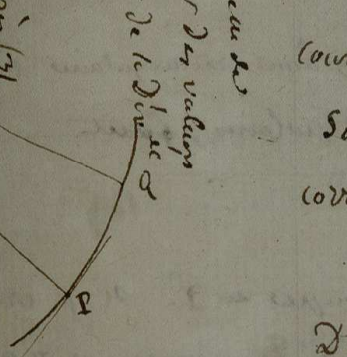
Donc en intég$^{t}$ à partir $x=x_0$ on a

Si l'on veut donc regarder l'un des $\xi$ ou $\eta$ comme exprimés en $x$ et $y$ supposés eux-mêmes fonctions d'une variable $t$, et $y$ remplacés par leurs valeurs correspondantes en $\xi$ et $\eta$. regardons (2) comme l'éq$^{on}$ de la dev$^{e}$ et différentions par rapport à $\xi$.

on a ainsi $dx(1+(y-\eta)y'')-d\xi-y'd\eta=0$

ou $d\xi+y'd\eta=0$ ce d'après (4)

C. Q. F. D.



$$\sigma - \sigma_0 = \rho - \rho_0.$$

C.Q.F.D.

On peut arriver à ce résultat autrement, en observant que

$$\frac{y'}{x-\xi} = \frac{-1}{y-y} \quad \# \text{ et par conséq}^t.$$

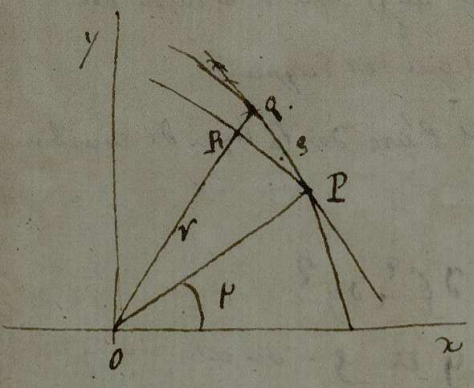
On parvient au 4e terme en multipliant chacun des 2 1ers termes par $(x-\xi)$, 2e par $(y-y$ et ajoutant. en vertu de l'Eqon de l'Eqon diff elle du cercle $(\xi-x)\,d\xi + (y-y)\,dy = \rho\,d\rho$

$$\frac{d\xi}{x-\xi} = \frac{dy}{y-y} = \pm\frac{d\sigma}{\rho} = \pm\frac{\rho\,d\rho}{\rho^2}.$$

d'après ce principe, on peut concevoir que PQ est engendrée par l'extrémité d'une courbe qui s'enroule sur la ligne de courbure il en résulte de même pour la ligne de courbure.

---

On peut obtenir ces rayons de courbure par les coordonnées polaires.




Les Eqons pour passer d'un système rectangulaire à un système polaire, $\mu$, et $r$ étant les coordonnées polaires, sont

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos p \\ y &= r\sin p \end{aligned}\right\}$$

du point o je décris un cercle qui coupe en P. si $\mu$ croît de $\delta p$. et OR de $\Delta r$. on aura, en supposant que RP et PQ sont des arcs sens$^t$ égaux à leurs cordes.

$$\left.\begin{aligned} PR &= r\Delta p \\ QR &= \Delta r \\ PQ &= \Delta s \end{aligned}\right| \quad \text{si } \tau \text{ désigne l'angle des 2 courbes en P. on a} \quad \frac{r\Delta p}{\cos\tau} = \frac{\Delta r}{\sin\tau} = \frac{\Delta s}{1}.$$

Subst$^t$ au lieu de $\Delta p, \Delta r, \Delta s$, les $\mathcal{D}$les ont

$$\frac{r\,dp}{\cos\tau} = \frac{dr}{\sin\tau} = \frac{ds}{1} = \pm\sqrt{dr^2 + r^2dp^2}.$$

et $\tan\tau = \dfrac{dr}{r\,dp}$.

on obtient ainsi l'angle des 2 courbes, et l'arc d'une courbe au moyen des coordonnées polaires.

Mais on peut obtenir $ds^2$ d'une autre manière, en observant que l'on peut remplacer $x = r\cos\varphi$ et $y = r\sin\varphi$ par

$$(x + y\sqrt{-1}) = re^{\mu\sqrt{-1}}.$$ à cause de la formule $e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z$

~~si l'on multiplie par~~ si l'on $D^{ie}$, on a

$$(2)\quad dx + dy\sqrt{-1} = e^{\mu\sqrt{-1}}(dr + r\,d\mu\sqrt{-1}).$$

de même $$dx - dy\sqrt{-1} = e^{-\mu\sqrt{-1}}(dr - r\,d\mu\sqrt{-1}).$$

Mt. on a $$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\mu^2.$$

valeur déja trouvée.

on sait que $$\rho = \frac{\pm(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

il suffit donc de trouver le $D^r$. en supposant que la courbe est rapportée à les coordonnées polaires. et pour cela je $D^{ie}$ (2) par rapport à $x, y, \beta^r$ j'ai

$$d^2x + d^2y\sqrt{-1} = e^{\mu\sqrt{-1}}(d^2r + dr\,d\mu\sqrt{-1}) + e^{\mu\sqrt{-1}}d\mu\sqrt{-1} \times$$
$$\times (dr + r\,d\mu\sqrt{-1}).$$

si l'on multiplie cette Exp$^{on}$ par

$$dx - dy\sqrt{-1} = e^{-\mu\sqrt{-1}}(dr - r\,d\mu\sqrt{-1}).$$

On obtiendra pour coefficient de $\sqrt{-1}$ la valeur du $D^r$ cherchée,

on peut écrire $$d^2x + d^2y\sqrt{-1} = e^{\mu\sqrt{-1}}(d^2r + 2dr\,d\mu\sqrt{-1} - r\,d\mu^2)$$

Mult$^t$ on a

$$(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\sqrt{-1} = (2dr^2d\mu - r\,d^2r\,d\mu + r^2d\mu^3)\sqrt{-1}.$$

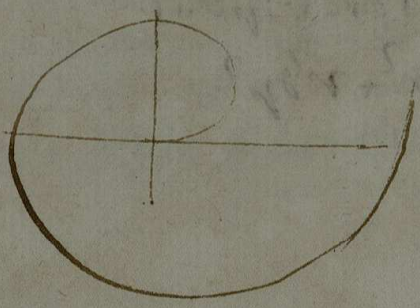
donc $$\rho = \frac{\pm(dr^2 + r^2d\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{2dr^2d\mu - r\,d^2r\,d\mu + r^2d\mu^3}.$$

On peut au lieu de ces $D^{res}$ mettre les dérivées on a

$$\rho = \frac{\pm(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - rr'' + r^2}$$

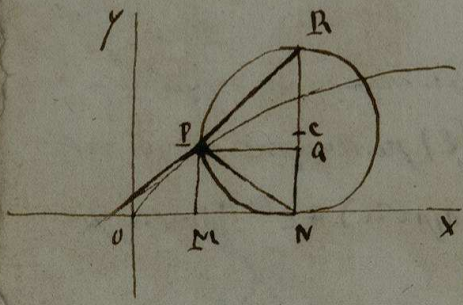
Ainsi au moyen de ces formules on peut connaître le rayon de courbure $\rho$ en un point, soit le système de coordonnées auquel une courbe est rapportée.

**Appn.** Si l'on a $r = ap^n$ $n$ étant entier et positif. on aura $r' = na p^{n-1}$ donc $\frac{r'}{r} = \frac{n}{p}$ et $\operatorname{tang} \gamma = \frac{dr}{r\,d\rho} = \frac{n}{\rho}$. on voit d'après l'Eqn de la courbe qu'elle est tang$^{te}$ à l'origine à l'axe des $x$ que le rayon vecteur va toujours en augmentant avec $\rho$ donc elle a la forme.



---

**Appn à la Sicloïde. et à la courbe $r = e^{a\rho}$**




On appelle sicloïde la courbe engendrée par le point I point fixe du cercle, tandisque le cercle roule sur une droite $0x$. pour trouver son Eqn je prends le point générateur P dans une position quelconque. arc $IN = ON$. $0x$ étant les axes coord.$^{es}$ et $0$ l'origine de la sicloïde. on a donc $PM = y$ et $0M = x$. ainsi on a $0M = x = ON - MN$. or $ON = \text{arc cos} \frac{r-y}{r}$ et $MN = Pq = \sqrt{y(2r-y)}$ l'Eqn de la sicloïde est donc

$$x = r \operatorname{arc\,cos} \frac{r-y}{r} - \sqrt{y(2r-y)}.$$

pour avoir le rayon de courbe je différentie par rapport à $x$ et $y$

j'ai $$dx = \frac{r\,dy}{\sqrt{1-\frac{(r-y)^2}{r^2}}} - \frac{(2r-2y)\,dy}{2\sqrt{y(2r-y)}}$$

d'où $$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{y(2r-y)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2r}{y}-1}}$$ donc

$$y' = \sqrt{\frac{2r}{y}-1}. \quad \text{et} \quad y'' = -\frac{r}{y^2}.$$

donc on aura pour $\rho$ dont la valeur générale est

$$\rho = \frac{\pm(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad ; \quad \rho = \frac{\pm\left(\frac{2r}{y}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{r}{y^2}} \quad \rho = 2\sqrt{2ry}.$$

or sur la figure — $\sqrt{2vg} = PN$. donc $\rho = 2PN$.
de plus PN est la direction de la normale car PR est la tangte.



8e. Leçon des applications.

## Du plan osculateur et du cercle de courbure aux courbes à double courbure.

~~On appelle plan osculateur à une surface $u=0$, $v=0$, le plan qui passe par la tangente et un point infiniment voisin du point de tangence. Si $x, y, z$ sont les coordonnées de ce point, $\xi, y, \zeta$, celles du plan~~

quand on veut que la courbe osculatrice à une courbe à double courbure soit plane on cherche la condon pour que la courbe résultante de l'inton d'un plan passant par le point donné et une surface $v_1=0$ ait un contact du 2d ordre avec la courbe donnée $u=0, v=0$. si la courbe $v_1=0$ varie, on aura diverses courbes osculatrices à la courbe donnée le lieu de toutes ces courbes, ou le plan qui les renferme se nomme plan osculateur

L'Eqon du plan qui passe par le point $x, y, z$ donné sera si $\xi, y, \zeta$ sont les coordonnées d'un point qqe du plan

$$(1)\quad (x-\xi)\cos\lambda + (y-y)\cos\mu + (z-\zeta)\cos\nu = 0.$$

La surface donnée est $v_1=0$.

il faut que cette courbe plane ait un contact du 3d ordre avec

$$\left.\begin{matrix} u=0 \\ v=0 \end{matrix}\right\}.$$

il faut donc que $\left.\begin{matrix} dx, dy, dz \\ d^2x, d^2y, d^2z \end{matrix}\right\}$ soient les mêmes dans les 2 Eqons

Dt. donc l'Eqon (1) on a

$$\cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy + \cos\nu\, dz = 0. \quad \cos\lambda\, d^2x + \cos\mu\, d^2y + \cos\nu\, d^2z = 0$$

y subst. les valeurs de $dx, dy, dz$, $d^2x, d^2y, d^2z$ tirées de $u=0$ $v=0$ aura deux Eqons qui pourront déterminer les quantités inconnues, on trouve

$$\frac{\cos\lambda}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{\cos\mu}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{\cos\nu}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

subst ces valeurs dans (1) on aura l'Eqon du plan osculateur

on peut prouver que le plan osculateur passe par la tangente en $x, y, z$ et un point $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ infiniment voisin. pour exprimer que le plan passe par la droite qui joint le point de tangence et l'autre point il faut remplacer par $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ qui sont les cosinus des angles qu'elle fait les axes, $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ et

(l) $\cos\lambda\,\Delta x + \cos\mu\,\Delta y + \cos\nu\,\Delta z = 0$

exprime cette condon. or l'on n'a plus exprimé que le point était infl voisin on peut faire le Dt de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ d'après la théorie de Mallaurin on a

$$\Delta x = \alpha\,dx + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}(d^2x \pm \varepsilon')$$

$$\Delta y = \alpha\,dy + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}(d^2y \pm \varepsilon'')$$

$$\Delta z = \alpha\,dz + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}(d^2z \pm \varepsilon'')$$

remplaçant on a par l'éqon (l) ci-dessus

$$\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\left\{\cos\lambda(d^2x \pm \varepsilon') + \cos\mu(d^2y \pm \varepsilon') + \cos\nu(d^2z \pm \varepsilon'')\right. = 0$$

donc à la limite, c, à, d quand le point est très voisin on a

(n) $\cos\lambda\,dx + \cos\mu\,dy + \cos\nu\,dz = 0$

(m). $\cos\lambda\,d^2x + \cos\mu\,d^2y + \cos\nu\,d^2z = 0.$

qui sont les Eqons ci-dessus. donc <u>Le plan osculateur</u> passe par la tangente et un point infiniment voisin.

<u>Du cercle osculateur</u>. on appelle ainsi l'intersection du plan osculateur et d'une sphère, intersection qui doit avoir un contact du 2d ordre avec

$$\left.\begin{matrix} u=0 \\ v=0 \end{matrix}\right\}.$$

La sphère a pour Eqon puisqu'elle a son centre sur le plan

$$(x-\xi)^2+(y-y)^2+(z-\zeta)^2=\rho^2$$

il faut Déterminer $\xi$ et pour cela il faut D.r ~~cette Eq.on~~ on a —

$$(x-\xi)\partial x + (y-y)\partial y + (z-\xi)\partial z = 0$$

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 + \partial^2 x(x-\xi) + \partial^2 y(y-y) + \partial^2 z(z-\xi) = 0.$$

si l'on prend $\partial s^2$ s'étant un arc de la courbure donné — $u=0$ $v=0$ arc compté à partir du point $x, y, z$. on a —

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2.$$

et l'on a alors

$$\left.\begin{array}{l}(x-\xi)\partial x + (y-y)\partial y + (z-\xi)\partial z = 0 \\ \partial s^2 + (x-\xi)\partial^2 x + (y-y)\partial^2 y + (z-\xi)\partial^2 z = 0\end{array}\right\}.$$

Dim.t l'Eq.on $\partial s^2$ on a —

$$(3)\quad 0 = \partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z.$$

au lieu d'Eliminer entre ces Eq.ons pour trouver $\xi, y, \zeta, \rho$ — on peut faire l'obs.on suivante (on considère $\partial x, \partial y, \partial z$ comme $\partial^2 x, \partial^2 y, \partial^2 z$ tirées des Eq.ons des courbes).

d'après l'Eq.on (3). on voit que l'on a l'Eq.on d'un plan perp.re à une droite dont les cosinus des angles avec les axes sont $\partial^2 x, \partial^2 y, \partial^2 z$. par l'Eq.on (m) ci-dessus. on voit que cette 2.de droite est perp.re à celle qui a pour cosinus des angles avec les axes $\cos\lambda$ $\cos\mu$, $\cos\nu$ droite qui d'après l'Eq.on du plan osculateur est perp.re à ce plan. donc la droite qui a pour cosinus $\partial^2 x$ $\partial^2 y$ $\partial^2 z$ est dans le plan osculateur de plus d'après (3) elle est perp.re à la tang.te. donc elle représente le rayon de courbure ses Eq.ons sont donc

$$\frac{x-\xi}{\partial^2 x} = \frac{y-y}{\partial^2 y} = \frac{z-\xi}{\partial^2 z}.$$

on peut en déduire le rayon de courbure, car en m.t la 1.re f.on par $\partial^2 x$, la 2.de par $\partial^2 y$ ... on aura —

$$\frac{x-\xi}{\partial^2 x} = -\frac{\partial s^2}{(\partial^2 x)^2 + (\partial^2 y)^2 + (\partial^2 z)^2}$$

faisant la somme des carrés des fractions on a

$$\frac{x-\xi}{\partial^2 x} = \frac{y-y}{\partial^2 y} = \frac{z-\zeta}{\partial^2 z} = \frac{-\partial^2 s}{(\partial^2 x)^2+(\partial^2 y)^2+(\partial^2 z)^2} = \frac{-\rho}{\sqrt{(\partial^2 x)^2+(\partial^2 y)^2+(\partial^2 z)^2}}$$

ou tiré de là

$$\rho = \frac{\partial s^2}{\sqrt{(\partial^2 x)^2+(\partial^2 y)^2+(\partial^2 z)^2}}$$

ou bien

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2}}$$

Si l'on voulait prendre $s$ pour variable indépendante on aurait à partir de

$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$. que l'on peut écrire $1 = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2$

en D.c.d. nouveau

$$0 = \frac{\partial x}{\partial s}\partial\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s}\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s}\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}.$$

on aurait de même relativement à $(m)$

$$\cos\lambda\,\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \cos\mu\,\partial\frac{\partial y}{\partial s} + \cos\nu\,\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Par conséquent les coordonnées du rayon de courbure seront

$$\frac{x-\xi}{\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}} = \frac{y-y}{\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}} = \frac{z-\zeta}{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}}.$$

et par suite on aura

$$\rho = \frac{\partial s}{\sqrt{\left(\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}}$$

ou

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\partial\cdot\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\partial s}\right)^2+\cdots\cdots}}$$

Exp$^{on}$ du rayon de courbure quand $s$ cesse d'être variable indépendante.

141

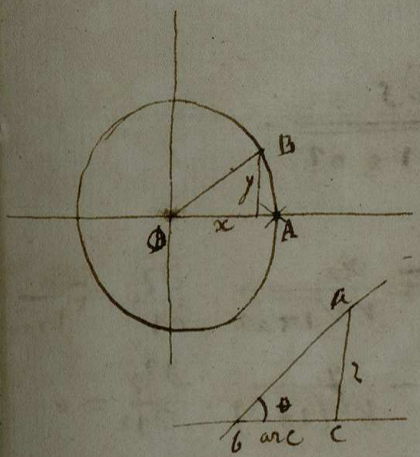
École polytechnique

16

Cours d'analyse.

Lamaestre

Application des rayons de courbures aux courbes à double courbure sur l'hélice.




pour concevoir la génération de l'hélice il faut se représenter un plan s'enroulant sur un cylindre, une droite tracée dans ce plan engendrera l'hélice. soit OA la trace d'un cylindre droit sur le plan horizontal. je suppose l'origine de l'hélice au point A, l'ordonnée z de cette courbe sera toujours avec l'arc AB correspondant dans le rapport de tang θ à 1. en désignant par θ l'angle abc que la droite génératrice fait sur le plan avec la droite bc qui s'enroule sur le cercle OA pendant que le plan s'enroule sur le cylindre.

Les Eq^ons de l'hélice sont donc

$$\left.\begin{array}{l} z = ra \text{ arc tang } \frac{y}{x} \\ x^2+y^2=r^2 \end{array}\right\} \quad \text{tang } \theta = a.$$

proposons-nous de trouver le rayon et le plan osculateur au point x, y, z, en prenant l'arc s pour variable indépendante.

on sait que

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2}}$$

il faut donc trouver $\frac{\partial^2 x}{\partial s}$ ... &c pour cela différentions ces Eq^ons on a

$$\left\{\begin{array}{l} x\partial x + y\partial y = 0 \; ; \quad \partial z = ar\partial . \text{arc tang}\left(\frac{y}{x}\right) = ar\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \text{ donc} \\ \partial z = \frac{a}{r}(x\partial y - y\partial x) \end{array}\right.$$

$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2.$

on obtient donc $\frac{\partial x}{y} = \frac{\partial y}{-x}.$

multipliant les 2 termes de la 1^re t^on par x, ceux de la 2^de par y, on a en faisant la somme

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{-x} = \frac{x\partial y - y\partial x}{-r^2}$$

ayant égard à l'Eq$^{on}$ $dz = \dots$ on obtient

$$\frac{dx}{y} = -\frac{r}{a}\frac{dz}{r^2} = -\frac{dz}{ar} = \frac{dz}{-ar} = \pm\frac{ds}{r\sqrt{1+a^2}}.$$

donc on obtient les 2 Eq$^{ons}$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{x\,dy - y\,dx}{-r^2} = \frac{\pm ds}{r\sqrt{1+a^2}}.$$

on obtiendra donc

$$\frac{dx}{ds} = \pm\frac{y}{r\sqrt{1+a^2}} \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = \mp\frac{x}{r\sqrt{1+a^2}} \quad \frac{dz}{ds} = \mp\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \mp\frac{x}{r^2(1+a^2)} \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{y}{r^2(1+a^2)} \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

remplaçant ces Exp$^{ons}$ dans la valeur de $\rho$. vient

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{r^4(1+a^2)^2}}} = r(1+a^2) = r\,\text{séc}^2\theta.$$

le rayon de courbure est donc constant dans l'hélice;

on peut voir d'après l'Eq$^{on}$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \sin\theta.$$

que la courbe fait avec la base toujours le même angle, c'est-à-dire que toutes les tangentes à l'hélice font le même angle avec l'axe des $z$.

Substituant aulieu de $dx, dy, dz$ — leurs valeurs $\frac{y}{r}, -\frac{x}{r}, -a$.

dans les Eq$^{ons}$ qui déterminent $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$, dans l'Eq$^{on}$ du plan Osculateur on a

$$\left.\begin{aligned} y\cos\lambda - x\cos\mu - ar\cos\nu &= 0 \\ x\cos\lambda + y\cos\mu &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

d'où $\quad \frac{\cos\lambda}{y} = \frac{\cos\mu}{-x} = \frac{\cos\nu}{-\frac{r}{a}}$ ou $\frac{\cos\lambda}{ay} = \frac{\cos\mu}{-ax} = \frac{\cos\nu}{r} = \pm\frac{1}{r\sqrt{1+a^2}}$

d'où $\cos\nu = \cos\theta$. donc la perp$^{re}$ au cercle osculateur fait le même angle que la droite génératrice. L'Eq$^{on}$ du plan osculateur est

$$(x-\xi)\,y - x(y-\eta) + (z-\zeta)\frac{r}{a} = 0.$$

si on le coupe par un plan $z = \zeta$ parallèle à $xy$, et par le point donné, on aura pour intersection une droite qui passe par l'origine et par $\xi$ et $\eta$; si donc on mène par le point une perpre à l'axe de l'hélice et un plan par cette perp$^{re}$ et la tangente, on aura le plan osculateur en ce point.

on donne un point $x, y, z$ sur une surface $u = 0$. on mène une suite de plans par la tangente qui passe par ce point, il en résulte des sections planes dans la surface. l'on propose de démontrer que les rayons de courbure de ces sections sont proportionnels aux cosinus des angles que les plans dans lesquels leurs courbes sont situées font avec le plan normal, ou bien que les rayons de courbure sont proportionnels aux cosinus des angles qu'ils font avec la normale à la surface en $x, y, z$.

Dans l'expression du cosinus de l'angle du rayon de courbure et de la normale, cosinus que j'appelle cos. $\delta$. il entrera les cosinus des angles que ces deux droites font avec les axes, il faut chercher quels seront ces cos.

D'abord ceux de la normale sont propres à $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ et ont pour véritable valeur en faisant $R = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x} \; ; \; \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y} \; ; \; \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Dans les valeurs de ceux du rayon il faudra remplacer $dx, dy \ldots d^n$ par les valeurs tirées de la D$^{on}$ de $u = 0$, il faut donc la faire, on obtient.

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0.$$

D$^t$ de nouveau — l'on a —

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dz\,dx + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dy\,dz \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y + \frac{\partial u}{\partial z}d^2z \end{aligned}\right\} = 0.$$

Si l'on suppose que l'on a $D^{ié}$ par rapport à l'arc de courbe $s$. on aura en désignant par $Q$ les six 1ers termes

$$Q\,ds^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\partial^2 z + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \cdots$$

or les cos des angles que le rayon de courbure fait avec les axes sont généralement.

$$\frac{\partial^2 x}{\sqrt{(\partial^2 x)^2+(\partial^2 y)^2+(\partial^2 z)^2}}\ ;\ \frac{\partial^2 y}{\sqrt{(\partial^2 x)^2+(\partial^2 y)^2+(\partial^2 z)}}\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\sqrt{(\partial^2 x)^2+(\partial^2 y)^2+(\partial^2 z)^2}}$$

par conséquent

$$\cos\delta = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\partial^2 x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial^2 y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial^2 z}{R\sqrt{(\partial^2 x)^2+(\partial^2 y)^2+(\partial^2 z)^2}}.$$

Mais d'après l'Eqon (2) qu'on peut écrire ainsi

$$-Q\,ds^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\partial^2 x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial^2 y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial^2 z.$$

On peut mettre $\cos\delta$ sous la forme

$$\cos\delta = \frac{-Q\,ds^2}{R\sqrt{(\partial^2 x)^2+(\partial^2 y)^2+(\partial^2 z)^2}}$$

Si l'on se rappelle l'Expon du rayon de courbure

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{(\partial^2 x)^2+(\partial^2 y)^2+(\partial^2 z)^2}}$$

On aura $\cos\delta = \frac{-Q\rho}{R}$. d'où

$$\frac{\cos\delta}{\rho} = \frac{-Q}{R}.$$

rapport cherché donc &a

Q est f^on des angles que fait la tangente avec les axes. Car si l'on désigne par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, les cosinus de ces angles. on sait que

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial x)^2+(\partial y)^2+(\partial z)^2}} \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\sqrt{\phantom{x}}} \quad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\sqrt{\phantom{x}}}$$

donc $\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s}$ ; $\cos\beta = \frac{\partial y}{\partial s}$ ; $\cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial s}$. et par conséq^t en subst^t dans la valeur de Q. on a

$$Q = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta + \text{------}$$

donc Q est f^on des angles de la tang^te avec les axes.

On appelle section normale à une surface toute section faite par un plan qui passe par la normale, il y en a donc une infinité. Mais ici ce plan ~~sécant~~ sera déterminé parcequ'il doit passer par la normale et la tangente. $\cos\delta = 1$ dans ce cas, et l'on a

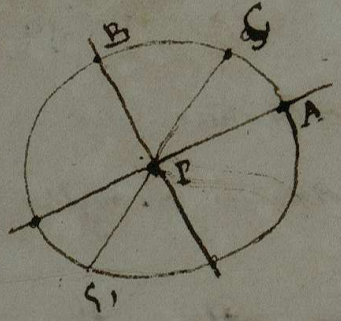
$$\frac{\pm 1}{\rho} = -\frac{Q}{R}.$$

d'où

$$\overset{(K)}{\mp}\frac{R}{\rho} = Q = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \text{------} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma +$$

$\rho$ ~~n'aura~~ ne changera pas de valeur tant que la tangente restera la même, et en effet dans ce cas le plan sécant est tout-à-fait déterminé par la cond^on de passer par la normale et la tangente. Mais si nous concevons que l'on donne différentes positions à la tangente passant toujours par $x, y, z$, qu'on porte sur chacune de ces tangentes des distances égales à $PS = r = \sqrt{\rho}$ à partir du même point $p$, on aura en désignant par $a, b, c$ les proj^ons de ces distances $PS$, $PS'$, --- sur les axes

? on peut donc connaissant la tang^te en un point, trouver au moyen de cette Eq^on le rayon de courbure correspondant à la section normale qui serait faite dans la surface par un plan normal passant par cette tang^te. et par conséq^t trouver le plus grand et le plus petit rayon de courbure de ces sections normales. on peut démontrer que les plans normaux correspondants aux ~~rayons~~ de courbure max et min. sont perp^res pour cela nous allons faire voir, qu'ils passant par 2 tangentes qui sont perp^res, ce qui suffira pour le démontrer. pour cela nous allons faire dans cette Eq^on $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{\rho}}$.




$a = r\cos\lambda$ ; $b = r\cos\mu$ ; $c = r\cos\nu$.

et portant ces valeurs dans la valeur ci-dessus, il vient

$$(3)\quad \mp R = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}a^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}b^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}c^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}ab + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}ac + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}bc.$$

On peut concevoir que PS et PS' varient de grandeur d'après le rayon de courbure qui leur correspond. Si donc, on suppose l'origine transportée en P. a, b, c seront les coord^es variables des points S, S' ... Or ils se trouvent assujétis à la cond^on représentée par l'Eq^on (2). donc (3) est le lieu de tous ces points. d'après l'Eq^on on voit que tous ces points qui sont situés à partir de P de distances r égales à la racine du rayon de courbure correspondants, sont situés sur la surface, elle a depuis toujours été reconnue pour être un Ellipsoïde ou un hyperboloïde. toutes les tangentes à la surface au point x, y, z se trouvent sur le plan tangent dont l'Eq^on est

$$(4)\quad \frac{du}{dx}a + \frac{du}{dy}b + \frac{du}{dz}c = 0.$$

Si (4) peut changer de signe, il passera par l'origine P. donc les points S, S' ... qui font $r = 0$ correspondent aux signes qui le trouveront sur la courbe résultante de l'int^on de la surface (3) par la surface (4). ils se trouveront donc sur un Ellipse ou bien sur une ou plusieurs hyperboles. comme nous allons le voir.

Si R dans l'Eq^on (3) reste de même signe, on aura l'Eq^on d'un Ellipsoïde car si je prends l'Eq^on $\alpha = mc$ passant par l'origine et cherchant les points où elle coupe cette surface $Mc^2 = \mp R$. donc $c = \pm\sqrt{\frac{\mp R}{M}}$ adoptant le signe + on a toujours c réel car M ne peut changer de signe car R. donc c'est une surface terminée enfermant un centre, donc c'est un Ellipsoïde.

Si R peut changer de signe on aura pour c des valeurs réelles et des valeurs imaginaires, la surface sera donc une hyp^de ch comme l'on peut prendre le signe + et − il y aura

cela posé on peut faire voir ce que nous voulons démontrer que les plans normaux correspondants aux rayons de courbure max. et min. sont perpendiculaires. En effet si PA et PB sont les plus grands et plus petites lignes qu'on puisse mener dans l'Ellipse, et comme on a $PA = \sqrt{3}$ il s'ensuit que $\frac{PA}{PB} = \sqrt{3}$ c'est à dire les 2 tangentes que l'on peut mener aux extrémités des axes font

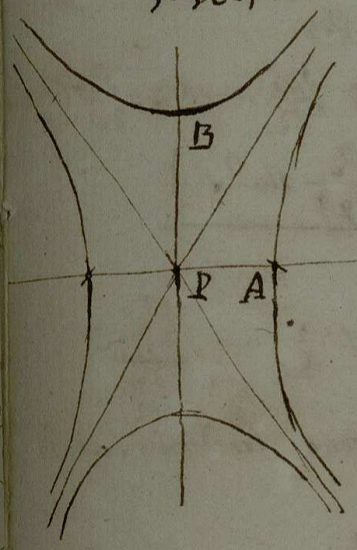
fig (1)

deux hyperboloïdes ~~réunis~~ réunies dans l'Eqn (3). hyp$^{ses}$ dont nous déterminerons la position, en observant que faire R=0 c'est dire que le 2$^{d}$ membre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}a^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}b^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}c^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}ab + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}ac + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}bc = 0$$

est l'Eqn du cône asymptote. on a donc le même cône asymptote pour les 2 hyperboloïdes. ils sont donc de la forme figurée à côté.

Fig (1).




On peut au moyen de cette courbe tracée sur le plan tangent déterminer le rayon de courbure d'une section faite par un plan normal qqc. il suffit de chercher la valeur de r correspondante à la tangente par laquelle passe le plan normal et puisque r=ρ. on aura immédt la valeur ρ.

~~Max. et min. dans Rc.~~

~~il faut aussi savoir si c'est ce que le 2$^{d}$ membre de (5) devient nulle en suivant~~

Dans le cas des 2 hyperboloïdes on voit que les plans des rayons de courbure min. sont perpes$^{res}$ et que l'on a ici que les plans des rayons de courbure maxima sont aussi perpes$^{res}$ Du rayon de courbure minimum dans le cas du max. est évidt infini. Mais dans la suite nous aurons le plan ab. nous pourrons exprimer le rayon de courbure d'une section normale qqc. soit ~~ab~~ c. ce qui donne les 3 cons$^{tes}$ suivantes des rayons de courbures minimum PA et PB.

On détermine ainsi le plus grand et le plus petit rayon de courbure des sections normales, qu'on appelle sections normales principales. pour cela je change de plans coord$^{nes}$ de manière que le plan tangent soit le plan ab. alors l'Eqn du plan tang$^{t}$ (4) doit avoir c=0 ce qui réduit l'Eqn de la courbe d'int$^{on}$ de (3) par (4)

$$c=0 \qquad \frac{du}{dx}=0 \qquad \frac{du}{dy}=0.$$

$$\mp R = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}a^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}b^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}ab$$

Il y a un 3$^{e}$ cas où le 2$^{d}$ membre de (5) conserve toujours le même signe sans jamais devenir nul dans ce cas, on peut conclure avant de faire aucun calcul que l'on a

$$\mp\frac{R}{\rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta$$

c'est-à-dire qu'on ait pris le plan tangent pour plan des xy.

Si l'on rapporte des plans que l'on prend pour axes des x et des y la surface aux axes principaux de cette section il faudra que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$.

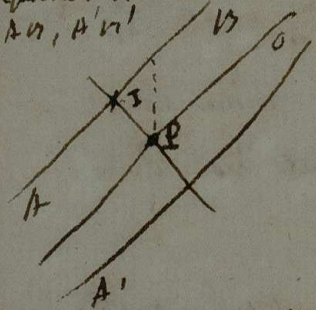
et dans cette hypothèse

$$(5) \quad \mp R = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}a^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}b^2$$

Il faut 2e membre nul il faudra que les racines du 2e membre égalé à 0 soient égales ; ce qui donnera pour la forme

$$(\alpha a + \alpha' b)^2 = \pm \frac{R^2}{\nu}.$$

qui est l'Eqn de 2 droites parallèles AA', A'A'




Donc ici encore KI et KO sont les rayons de courbure min. et max. Les tangentes et les normales sont encore normales.

Mais dans ce cas on ne saura pas le rayon de courbure quand on aura une Ellipse, et alors exprime $\rho$ en fonction de $\rho_1$ et $\rho_2$

Ex: rechercher la surface dont les deux rayons de courbure sont égaux et une Ellipse. —

exprime l'Eqn de l'Ellipse ou des deux hyperboles — résultante de l'élimination de l'Eqn (3). par l'Eqn (4).

Dans ces mêmes hypothèses $R = \pm \frac{du}{dz}$. et $q = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\alpha$

donc $$\frac{1}{\rho} = \pm\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right) \Big/ \frac{du}{dz}.$$

désignant par $\frac{1}{\rho_1}$ l'Exp$^{on}$ $\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{du}{dz}}$ et par $\frac{1}{\rho_2}$ … $\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\frac{du}{dz}}$

on voit d'après l'Eqn (5) que $\rho_1$ $\rho_2$ sont les demi-axes de l'Ellipse ou de l'Hyperbole — alors

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{\rho_2}\sin^2\alpha.$$

$$\frac{1}{\rho} = \pm\left(\frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha - \frac{1}{\rho_2}\sin^2\alpha\right)$$

pour l'hyperbole.

On a ainsi le rayon de courbure des sections — Normales principales à la courbe $u = v$ par le point $x, y, z$.

---

Quand l'Eqn de la surface est donnée sous la forme —

$$z = F(x,y).$$

on peut employer cette formule, en remplaçant $\frac{du}{dz}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ … par des valeurs convenables.

Dt cette Eqn sous

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

où on peut écrire ainsi l'Eqn de la surface $z - F(x,y) = u = v$. d'où —

$du = dz - p\,dx - q\,dy$. donc $\frac{du}{dx} = -p$. $\frac{du}{dy} = -q$. $\frac{du}{dz} = 1$.

Dt de nouveau l'une —

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

et ici $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -r$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -s$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -t$.

Enfin. dans $\frac{1}{\rho}$. on obtient une valeur de $\rho$ qui sera fonction de l'Eqn de la surface.

Appⁿ des principes précédents à l'Ellipsoïde.

soit $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$. Nous aurons $\partial t$ — ou —

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{x}{a^2}\;;\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{y}{b^2}\;;\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{z}{c^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{1}{b^2}\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}$$

on obtiendra —

$$R=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\cdot \quad \text{et on a} \quad q=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\cdot$$

donc

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

tel est le rayon de courbure au point $x, y, z$, $\alpha, \beta, \gamma$ étant les angles de la tang^te avec les trois axes.

Si on veut avoir ce rayon de courbure à l'extrémité du petit axe. l'axe des $z$ passera alors $x=0$ $y=0$ $z=c$. et le plan tangent devient horizontal il faut donc se servir de l'éq^n ou trouvé ci-dessus

$$\frac{1}{\rho}=c\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right).$$

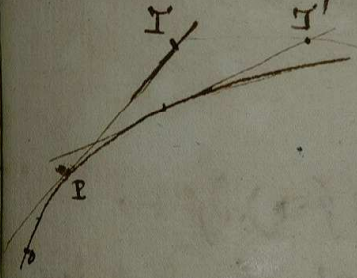
On aura le rayon de courbure Max et Min. en faisant $\alpha=0$ et $\alpha=1^d$. qui donnent lieu à —

$$\rho=\frac{a^2}{c}\qquad \rho=\frac{b^2}{c}\cdot$$

---

## Des développantes et des développées

---




à partir d'un point o fixé sur la courbe je prends un arc — $oP=s$. en P je mène une tangente à la courbe je prends — un point I sur cette tangente je suppose que cette tangente roule sur la courbe, de sorte que PI diminue de la même quantité que l'arc oP augmente. la courbe décrite par les points I I' se nomme la Développante.

si $\Pi T = r$. on aura d'après l'hypothèse $\Delta r = -\Delta s$.
et par suite $dr = -ds$.

Soient $x, y, z$ les coord$^{es}$ du I. appt à la courbe donnée, et $\xi, \eta, \zeta$ celles du point générateur T.
j'aurai

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + r\cos\lambda \\ \eta &= y + r\cos\mu \\ \zeta &= z + r\cos\nu \end{aligned}\right|$$

$\lambda, \mu, \nu$ étant les angles que $\Pi T$ fait avec les axes mais on sait $\cos\lambda = \frac{dx}{ds}$, $\cos\mu = \frac{dy}{ds}$, $\cos\nu = \frac{dz}{ds}$. donc

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + r\frac{dx}{ds} \\ \eta &= y + r\frac{dy}{ds} \\ \zeta &= z + r\frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\}.$$

on pourrait en tirer $ds$ trouver l'éq$^{on}$ de cette courbe. nous nous contenterons de faire remarquer quelques propriétés que l'on déduit de $dt$, ces éq$^{ons}$ donnent

$$d\xi = r\frac{d^2x}{ds^2}ds\,; \quad d\eta = r\frac{d^2y}{ds^2}\,; \quad d\zeta = r\frac{d^2z}{ds^2}\,;$$

des éq$^{ons}$ ci-dessus on tire

$$\left(\xi - x = r\frac{dx}{ds}\right.\,; \quad \eta - y = r\frac{dy}{ds}\,; \quad \zeta - z = r\frac{dz}{ds}$$

si l'on multiplie ces éq$^{ons}$ et qu'on remarque que $s$ étant variable indépendante l'on a

$$0 = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z.$$

il vient

$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,d\zeta = 0.$$

éq$^{on}$ qui exprime que T pied perp$^{re}$ à la droite dont les cosinus sont proport$^{ls}$ à $d\xi, dy, d\zeta$. et qui est tangte à la développée. donc la tangente à la dévelop$^{te}$ est normale à la développante.

## Des contacts des surfaces.

Deux surfaces ont un contact du $n^{e}$ ordre quand coupées par une $3^{e}$. surface les courbes d'intersection ont un contact

ainsi pour qu'elles aient un contact du $n^{e}$ ordre il faut qu'elles aient le même plan tangent. il faut donc que les normales au point commun soient le prolong$^{t}$ l'une de l'autre ou que $u=0$ $v=0$ étant les surfaces

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz} \;\Big|\; \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$$

soient 6 Exp$^{ons}$ proportionnelles 2 à 2.

Quelquefois nous les Eq$^{ons}$ des surfaces nous les donnent

$$z = f(x,y).$$
$$z = F(x,y).$$

Dt. nous — $\left.\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy \\ dz &= P\,dx + Q\,dy \end{aligned}\right\}$.

on doit avoir $\frac{-p}{P} = \frac{-q}{Q} = \frac{1}{1}$ ou $p = P$ ; $q = Q$.

voilà les conditions pour qu'elles aient un contact du $1^{er}$ ordre.

Cond$^{ons}$ pour que Deux surfaces $u=0$ $v=0$ aient un contact du $2^{e}$. ord re.

il faut évid$^{t}$ que $\begin{matrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{matrix}$

soient les mêmes.

Quand les Eq$^{ons}$ sont données sous la forme ci-dessus

$$z = f(x,y).$$
$$z = F(x,y).$$

il faut d'abord que $p = P$
$q = Q$.

Diff$^{t}$ de nouveau — les valeurs de $dz$ trouvées

$$\left.\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy \\ dz &= P\,dx + Q\,dy \end{aligned}\right\}.$$

le regardant $z, x, y$ comme variables dépendantes, vient

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y.$$
$$d^2z = R\,dx^2 + 2S\,dx\,dy + T\,dy^2 + P\,d^2x + Q\,d^2y.$$

or $p = P$ $q = Q$ d'après la 2ème condition ; il faut donc que

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = R\,dx^2 + 2S\,dx\,dy + T\,dy^2$$

ce qui donne

$$r = R\ ;\ t = T\ ;\ s = S\ ;\ p = P\ ;\ q = Q.$$

Conditions pour qu'elles aient un contact du 2ème ordre.

Ecole polytechnique.

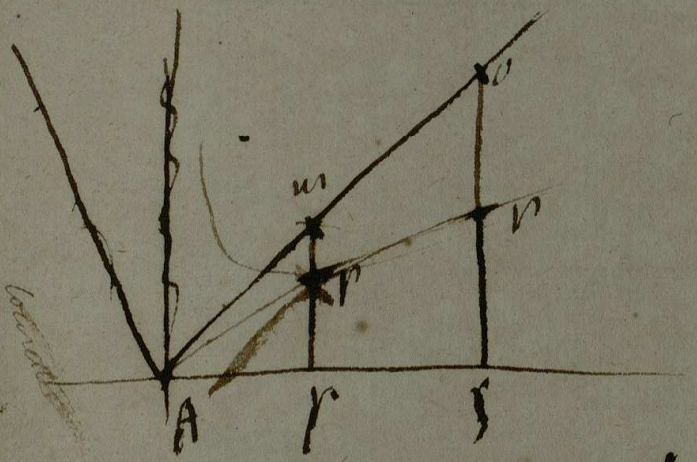
Lamarle

Cours de mécanique.

149

N° 1

$yy' = \frac{x'}{x}$

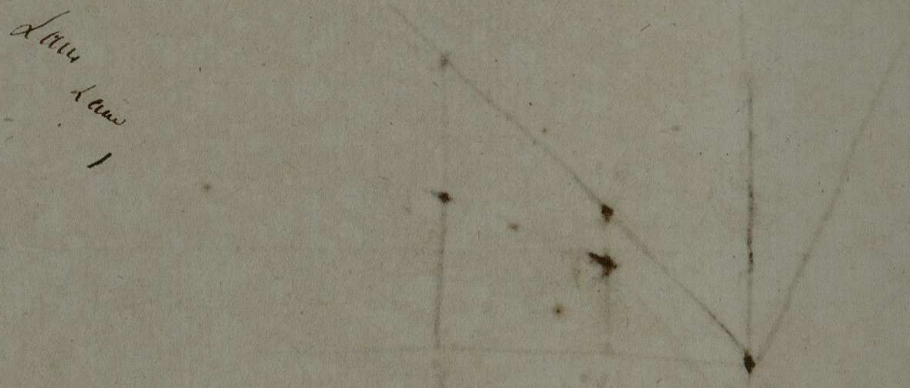



$y \cdot mr = y' \cdot os$

$y = y' \cdot a$



$y = ax$



1ère Leçon de Mécanique.

Le 3 Mai.

Nous parlerons d'abord de la Statique où l'on examinera quelles sont les Eqns d'Equilibre d'un corps qu'on suppose sollicité par plusieurs forces.

On appelle masse d'un corps la quantité de matière qui constitue le corps. Si l'on suppose que cette masse se concentre de manière à devenir égale à un point matériel, on aura le point mathématique que nous considérons dans toute la Statique. Les causes qui font mouvoir un point se nomment forces, les forces sont donc des causes qui font mouvement. On mesure l'intensité des forces par les pressions qui sont communiquées par le point au plan perp^re à la direction des forces.

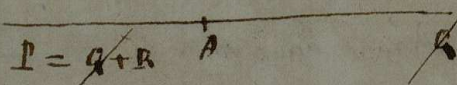
Cela posé si P est une force capable de produire une pression p, les pressions 2p, 3p .... résulteront des forces doubles et triples de P. ainsi P, P', P'', ... produisant des pressions p, p', p''.... une pression égale à p+p'+p''... doit résulter des forces P+P'+P''.... En général quand des forces agissent sur un point, il existe une force capable de leur faire Equilibre, c-à-d capable de produire le même effet qu'elles. Cette force unique est ce qu'on nomme résultante par rapport aux autres qu'on nomme composantes.

Si les forces sont dirigées dans le même sens, elles produiront un effet qui sera égal à celui que produirait R

$$R = P + P' + P'' \ldots$$

Si deux forces sont dirigées sur une même droite mais dans des directions contraires du point A d'application on fait voir que la résultante est égale à la résultante dirigée dans le sens de la plus grande.

d'abord il est clair que si un point A est sollicité par 2 forces égales qui sont en ligne droite le point reste en repos, car il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve d'un côté plutôt que d'un autre. si les 2 forces sont P et Q et que $P > Q$ je décompose P et je fais $P = Q + R$. alors Q se détruit avec Q et il reste $R = P - Q$ qui agit dans le sens de la plus grande force donc &c.



$P = Q + R$ A Q

il est aisé de passer de ce cas à celui où il y a plusieurs forces d'un côté et d'autre de A. car si $r$ et $r'$ sont les composantes de manière que

$P, P', P''$ A $Q, Q', Q''$

$$r = P + P' + P'' \ldots$$

$$r' = Q + Q' + Q'' \ldots$$

$$R = r - r' = P + P' + P'' \ldots - Q - Q' - Q'' \ldots$$

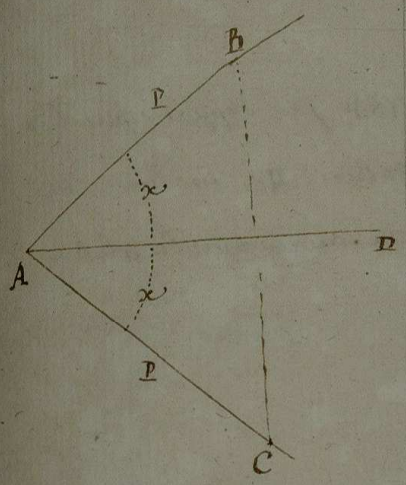
sera la résultante cherchée. comme l'on pourrait avoir $r' - r$ si $r' > r$. on aura généralt.

$$\pm R = P + P' + P'' \ldots - Q - Q' - Q'' \ldots$$

et la résultante sera toujours dirigée dans le sens de la composante $r, r'$ la plus grande.



nous allons nous occuper des forces qui agissent sur un point A, mais sous une direction qqe.




Considérons d'abord deux forces égales P qui agissent sous un angle $2x$ sur un point matériel A.

Généralement on représente les intensités des forces par des droites AB, AC prises sur leurs directions. ici ces forces étant égales on aura $AB = AC$. la direction de la résultante est évid^t la droite qui divise l'angle $2x$ en deux parties égales, car il n'y a pas de raison pour que la résultante AD s'approche plutôt d'un côté que de l'autre des directions AB, AC des forces P. il s'agit donc de trouver l'intensité de R pour qu'elle produise en A le même effet que les 2 forces P. or on peut dire R dépend de P et $x$ donc

$$R = f(P, x).$$

cette relation doit se trouver vérifiée qq^e soit ~~les hypothèses qu'on fasse sur~~ l'unité de force, c.à.d que P et R croîtront dans le même rapport, on aura, donc

$$\alpha R = f(\alpha P, x).$$

$\alpha$ étant qq^e on peut faire $\alpha = \frac{1}{P}$. on obtient

$$\frac{R}{P} = f(1, x).$$

On voit d'après la figure que si $x = 0$ c.à.d. si les deux forces P coïncident, on a $R = 2P$. donc on a $f(1, 0) = 2$. on peut donc écrire

$$R = 2P\,\varphi(x).$$

$\varphi(x)$ étant une f^on de $x$ telle que lorsque $x = 0$ $\varphi(0) = 1$.

une 2^de remarque qui se tire de la figure c'est que lorsque $x = 200°$ alors on aura

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

ou cette Eq^on passe que l'unité d'angle en change pas avec l'unité de force, et que P et R croiss^t dans le même rapport, $x$ ne m'varie pas

J'arrête à trouver la forme de $\varphi(x)$. je suppose que l'on ait décomposé les forces P en 4 autres Q. inclinées sur AB et AC d'une même quantité y. on aura entr'elles la relation

$$P = 2Q\,\varphi(y).$$

de cette Eqn on tire —

$$R = 4Q\,\varphi(x)\,\varphi(y).$$

on peut trouver une autre expn de R, en considérant que les 4 forces Q sont également inclinées deux-à-deux sur la résultante si R' est la résultante partielle des forces Q qui font avec AD un angle $x-y$. on aura —

$$R' = 2Q\,\varphi(x-y).$$

et si R'' est la résultante partielle des forces Q qui font avec AD un angle $x+y$. on a —

$$R'' = 2Q\,\varphi(x+y).$$

donc

$$R = R' + R'' = 2Q\{\varphi(x+y) + \varphi(x-y).$$

par conséquent on obtient l'Eqn suivante en égalant les valeurs de R. ——

$$2\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y).$$

Cette Eqn d'après sa forme est satisfaite par $\varphi(x) = \cos x$. Il s'agit de démontrer généralement que $\varphi(x) = \cos x$.

après avoir obtenu une Eqn en x on fait $y=0$ ce qui donne $\varphi(0)=1$. Eqn avait obtenu précédt. De cette Eqn appte à y.

$$2\varphi(x)\,\varphi'(y) = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y).$$

et $y=0$ donne $\varphi'(0)=0$ qui n'apprend encore rien

Diffte de nouveau, on a —

$$2\varphi(x)\,\varphi''(y) = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y).$$

si $y=0$ l'on a ——

$$(1)\quad 2\varphi(x)\varphi''(a) = \chi\varphi''(x)$$

qui peut servir à déterminer la forme de $\varphi(x)$. $\{\varphi''(0)$ est une inconnue dont il faudra chercher la valeur plus tard $\}$.

On a $\dfrac{\partial.\varphi'(x)}{\partial x} = \varphi''(0)\varphi(x)$ d'après l'Eq$^{on}$ (1)

or $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x)$.

Multipliant ces 2 Eq$^{ons}$ on a

$$\varphi'(x)\partial.\varphi'(x) = \varphi''(0)\varphi(x)\partial.\varphi(x).$$

Multip$^{t}$ par 2. on obtient

$$2\varphi'(x)\partial.\varphi'(x) = 2\varphi''(0)\varphi(x)\partial.\varphi(x).$$

Intégrant cette Eq$^{on}$ il vient

$$(2)\quad (\varphi'(x))^2 = \varphi''(0)\,(\varphi(x))^2 + C.$$

On peut déterminer C en supposant que $x=0$, on a alors puisque $\varphi'(0)=0$; et $\varphi(0)=1$. $C = -\varphi''(0)$. Si je fais $x=\frac{\pi}{2}$. on a $\left(\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \varphi''(0)\times -1$. ce qui montre que $\varphi''(0)$ est une quantité nécessairement négative je fais $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$ et j'aurai $C = -\varphi''(0) = a^2$.

or (2) peut s'écrire

$$(\varphi'(x))^2 = \varphi''(0)\{(\varphi(x))^2 - 1\}.$$

Donc $(\varphi'(x))^2 = a^2(1-(\varphi(x))^2)$ et par conséquent

$$\varphi'(x) = \pm a\sqrt{1-(\varphi(x))^2}$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \pm a\sqrt{1-(\varphi(x))^2}.$$

ou bien $\mp\, a\,dx = -\dfrac{d.\varphi(x)}{\sqrt{1-(\varphi(x))^2}}$

intégt. on a

$$\mp\, ax = \arccos \varphi(x) + C.$$

C est nul attendu que si $x=0$ on a $C=0$. puisque $\arccos(\varphi(0)) = \arccos(1) = 0$

$$ax = \arccos \varphi(x). \text{ ou}$$

$$\varphi(x) = \cos ax.$$

il reste donc à démontrer généralement que la fonction $\varphi(x)$ est un cosinus. reste à trouver la valeur de la constante $a$ ou $\varphi(x)$ doit satisfaire à $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ou $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos a\frac{\pi}{2}$. d'après la 2de Eqon il faut donc que $\cos a\frac{\pi}{2}=0$. — et par conséquent il faut que $a = \pm(2k+1)$.

Ainsi $\varphi(x) = \cos(2k+1)x$.

$k$ étant un nombre entier positif. je supprime $\pm$ parceque $\cos -a = \cos a$. ou je dis que $k$ doit être nul ou bien $a=1$. en effet, il me faut plus choisir a que parmi les nombres impairs supposons que l'on ait $a=3$. on a d'après l'Eqon ci-dessus — $\varphi(x) = \cos 3x$.

si l'on fait $x=\frac{1}{3}$ on a $\varphi(x) = \cos 1 = 0$ donc alors $R=0$ dans l'Eqon $R = 2P\varphi(x)$. or $x=\frac{1}{3}$ indique que les forces font un angle de $\frac{2}{3}$ de Droit et le résultat qui résultante dans ce cas est nulle, ce qui est impossible, il en serait de même, si l'on faisait $a = 5, 7, \ldots 2k+1$. car en faisant $x = \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \ldots \frac{1}{2k+1}$

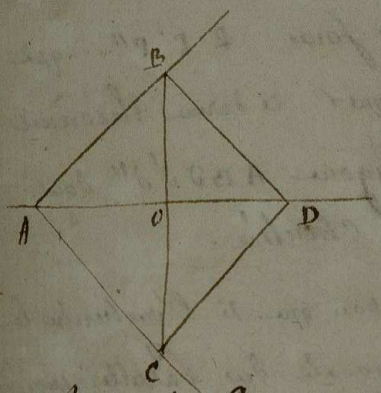
il en résulterait une absurdité, il n'y a donc que

$a = 1$ qui peut satisfaire à la question, on a donc

$$R = 2P\cos x.$$

Construisant cette Eqn on trouve en joignant B et C que

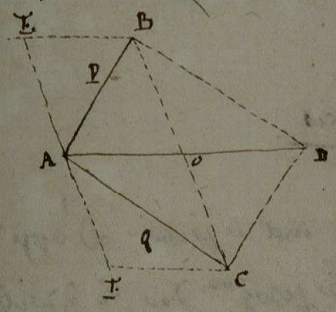
$AO = P\cos x$. donc la diagonale AD du losange ABCD formé sur les grandeurs des deux forces exprime la résultante de ces forces.



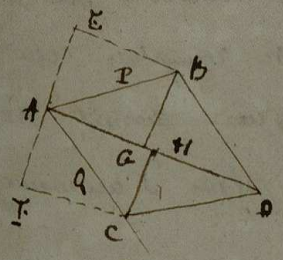

## 2e Leçon. le 6 mai 1823.

On peut d'après ce théorème trouver la résultante de deux forces inégales qui se composent à angles droit.

Soient AB, et AC les intensités des forces P et Q, je mène BD, CD parallèles à leurs directions et je dis AD représente en grandeur et en D^on la résultante de P et Q. je mène EF parallèle à BC, BE et CF parallèles à AD et AOBE, AOFC, sont des losanges. Ainsi P est décomposé en grandeur et en D^on par AO, et AE. de même Q selon AO et AF mais AE et AF se détruisent donc il reste pour la résultante des forces P et Q. la force $2AO = AD$. donc X^on




La résultante de deux forces q^elles P et Q peuvent être remplacées par la résultante de ces forces qu'on démontre être égale à la diagonale du parallélogramme construit sur AB et BC qui représentent ces forces.



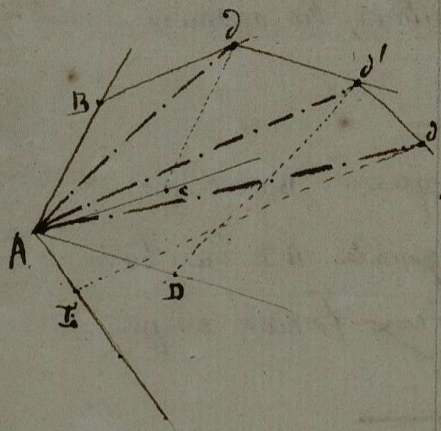

Menons par B et C des perp^res à la diagonale AD; par A une parallèle à BC, par B et C des parallèles à AD, on formera des rectangles AEBG, AFCH; d'après le théorème précédent la force P sera représentée par AE et AG. et Q par AF et AH. or AE et AF se détruisent il reste les 2 forces AG AH, qui sont égales à AD donc X^on

or dans ABD on a

$$R = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos ABD.$$

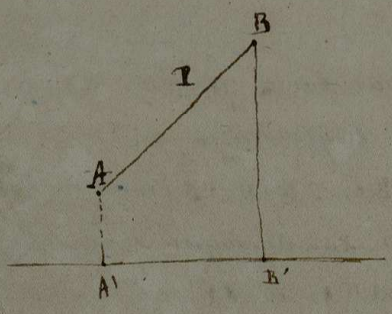
or ABD est le supp^t de BAC qu'on écrit $\widehat{P,Q}$. donc

$$R = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\left(\widehat{P,Q}\right).$$




Pour avoir la résultante de plusieurs forces P P' P''... qui concourent à un même point il faut appliquer ce dernier théorème plusieurs fois de suite. on a ainsi un polygone A B d d' d'' dont le dernier côté A d'' est la résultante cherchée.

on voit d'après cette construction que si l'on cherche la résultante de 3 forces, on aura la diagonale du Parallélépipède construit sur ces trois droites.




## Propriétés relatives aux projections des forces.

On peut projeter une force AB dont le point D'app$^{on}$ est en A, et sur une droite et sur un plan. la proj$^{on}$ de la droite AB sur cette droite ou sur ce plan se nomme proj$^{on}$ de la force P.

Ainsi étant donné une force AB dans l'espace, AB étant rapporté à trois axes rectang$^{res}$ on peut concevoir par B trois droites parallèles aux axes et l'on pourra remplacer cette force par les 3 côtés du parallélépipède qui aurait AB pour D$^{le}$ et les trois plans coordonnés pour plans d'une même angle trièdre de ce parallélép$^{de}$

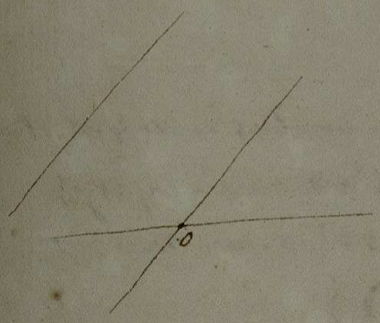
Si l'on a plusieurs droites passant par un même point A dans l'espace, on peut concevoir que l'on prend la résultante de ces droites et qu'on projette cette résultante, ou bien qu'on forme la résultante des projections de ces forces ces 2 résultantes sont les mêmes, car on a un polygone gauche dans l'espace formé par les extrémités B d, d' d''... et un polygone sur le plan de projection qui est la proj$^{on}$

on aura absolument les mêmes résultats si l'on conçoit ces droites projetées sur un axe fixe.

et l'on dit généralement que la résultante des proj^ons sur un plan ou sur un axe fixe, est égale à la proj^on de la résultante de ces mêmes forces dans l'espace.

## Manière dont on écrit ce théorème en analyse.

pour que l'effet d'une force soit bien connu, il faut connaître son point d'app^on l'intensité de cette force sa direction, et le sens dans lequel elle agit. on appelle axe une droite qui passe par un point A fixe et qui s'étend indéf^t dans les deux. nous nommerons demi-axes les parties de ces axes comptées à partir du point A. dans l'espace, on mène pour connaître l'angle de deux droites AB et AC deux parallèles par un même point O. ces deux droites forment 2 angles. l'un aigu l'autre obtus. l'angle sera tout-à-fait déterminé si l'on dit que par le point O on mène deux demi-axes parallèles.



pour déterminer la position d'une droite AB dans l'espace je désigne par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles qu'elle fait avec les demi-axes positifs des $x, y, z$. que je suppose rectang^ves en O.

$$P\cos\alpha, \quad P\cos\beta, \quad P\cos\gamma$$

seront les proj^ons de cette droite sur ces trois axes.

si les angles sont obtus on a alors

$$P\cos(\pi-\alpha), \quad P\cos(\pi-\beta), \quad P\cos(\pi-\gamma).$$

pour les proj^ons de la droite sur les demi axes, proj^ons qu'on écrire

$$-P\cos\alpha, \quad -P\cos\beta, \quad -P\cos\gamma;$$

projections qu'on doit porter sur les demi axes négatifs

la proj^on d'une force sur un axe est égale sa grandeur P multipliée par le cosinus qu'elle fait le demi axe positif. il faut donc par le point d'app^on de la force mener une parallèle a l'axe sur le quel on veut la projeter, voir dans quel sens elle est dirigée, et prendre le produit de sa grandeur P par le cosinus qu'elle fait dans le sens de sa direction avec la parallèle auxiliaire.

Si $a, b, c$... sont les angles que la résultante de plusieurs forces — $P, P', P''$... ~~fait~~ avec les axes. $\alpha, \beta, \gamma$, $\alpha', \beta', \gamma'$ étant ceux de ces forces on aura —

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' \text{ ---- } = R\cos a.$$

$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' \text{ ——— } = R\cos b.$$

$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' \text{ ——— } = R\cos c.$$

3e Leçon du 10 mai

Ces Eqons servent à déterminer la valeur de la résultante et sa position, je suppose que l'on n'ait que deux forces $P$ et $P'$;

$$R\cos a = P\cos\alpha + P'\cos\alpha'$$

$$R\cos b = P\cos\beta + P'\cos\beta'$$

$$R\cos c = P\cos\gamma + P'\cos\gamma'$$

faisant la somme des quarrés de chacun des membres de ces Eqons, il vient

$$R^2 = P^2 + P'^2 + 2PP'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma').$$

or on connait la valeur du coeff^t de $2PP'$, on aura donc —

$$R^2 = P^2 + P'^2 + 2PP'\cos(\widehat{P, P'})$$

Si l'on avait

$$R\cos a = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{ ———}$$

$$R\cos b = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{ ———}$$

$$R\cos c = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{ ———}$$

en faisant la somme des carrés on aurait

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \text{ ----- } + 2PP'\cos(\widehat{P, P'}) + 2PP''\cos(\widehat{P, P''}) + \text{ ----}$$

$$+ 2P'P''\cos(\widehat{P', P''}).$$

On est convenu d'écrire ainsi — les Eqons —

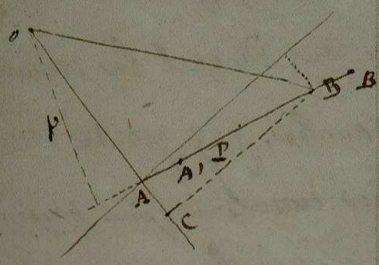
$$R\cos a = X \quad \text{d'où} \quad \cos a = \frac{X}{R}$$

$$R\cos b = Y \quad \text{———} \quad \cos b = \frac{Y}{R}$$

$$R\cos c = Z. \quad \text{———} \quad \cos c = \frac{Z}{R}$$

d'où $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ~~et~~ ———

## Propriétés des résultantes considérées sous le rapport des moments.



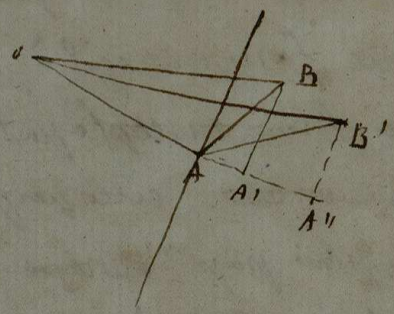

Si l'on a une droite qui part de A et qui est dirigée dans le sens AB qu'une force P soit appliquée en A, si d'un point o on abaisse une perp^re sur la d^on AB de cette force $p \times AB$ qui représente le double de la surface du triangle oAB est ce qu'on appelle le moment de la force P représentée par AB. o est le centre des moments. Si la droite prend la position A'B' on a le même moment, donc en transportant une force en un point qq^e de sa direction, on aura toujours le même moment. le double de la surface du triangle oAB pouvant s'exprimer par $OA \times BC$ on dit que le moment d'une force est égal à OA qu'on appelle rayon vecteur de cette force multiplié par la perp^re abaissée de B sur ce rayon vecteur. cette perp^re BC n'est que la proj^on de AB sur un plan perp^re au rayon vecteur. ainsi un moment est donc égal au produit du rayon vecteur par la proj^on de la force sur un plan perp^re à ce rayon vecteur.

Le plan oAB qui passe par la droite AB et le centre des moments se nomme <u>plan du moment</u>.

je suppose que A et o soient deux points fixes sur le plan, et que la force P tende à imprimer au plan un mouvement de rotation autour du point o. si on élève en o un axe fixe perp^re à ce plan du moment, on aura deux demi-axes l'un inférieur l'autre supérieur au plan. Deux spectateurs appuyés contre cet axe et diamétralement opposés verraient tourner pendant

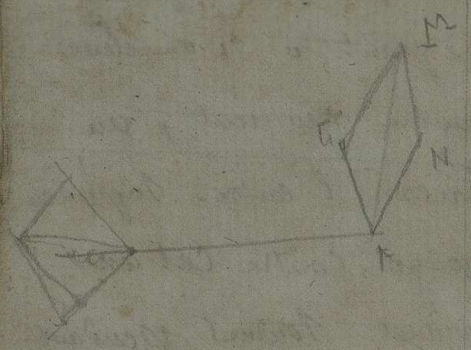
la même rotation le plan de deux cotés différents. on choisira toujours le demi-axe autour duquel le mouvement paraît s'effectuer de droite à gauche, j'y porte une longueur représentée par le même nombre qui exprime le moment de la force et j'ai ainsi le moment linéaire de la force.

propriétés des moments linéaires.




Les moments linéaires sont proportionnels aux projections des forces qui passent par un même point A. Car ses moments sont les nombres exprimés par $OA \times A'B$ et $OA \times A''B'$ donc &c... si l'on conçoit que le plan OAB' tourne autour de OA. l'angle de ces plans sera exprimé par l'angles que feront les proj^ons de AB et AB' sur un plan perp^re à OA et sera par conséquent égal à l'angle des moments linéaires qui mesureront au point O l'angle de ces deux plans. on conclut donc de là

" que l'angle des moments linéaires de deux forces est égal à l'angle des proj^ons de ces forces, et que les moments linéaires sont proportionnels aux proj^ons de ces forces ".




Cela posé : Concevons qu'en A on ait les proj^ons AL et AN de deux forces, la résultante AM de ces deux forces est la proj^on de la résultante des deux forces dans l'espace, on peut prouver que pour avoir le moment linéaire de cette résultante, il suffit de construire la diagonale du parallégramme qui aurait pour cotés les moments linéaires OF et OG de ces deux forces.

Alors les moments linéaires faisant le même angle que les projections étant de plus proportionnelles, on aura une figure OEGK semblable à ALMN. Si donc OE et OG sont les moments linéaires des forces dont les projections sont AL, AN, OK sera le moment linéaire de la résultante de ces forces.

4e Lecon du 5

Nous venons de voir que la résultante de plusieurs moments linéaires était égale au moment linéaire de la résultante de plusieurs forces. Soient donc plusieurs forces P P' P'' .... p, p', p''... les perpendiculaires correspondantes. Pp, P'p', P''p'' seront les moments correspondants à ces forces. Si l'on porte les valeurs numériques de ces moments sur des droites perpendiculaires au plan qui passent par les extrémités des moments et les directions des forces. on aura donc pour ces moments linéaires les mêmes Eqns que l'on a obtenues pour les forces. Soit R la résultante des forces P, P', P''... et r la perpendiculaire abaissée sur sa direction RV sera le moment. Si l'on désigne les angles de la résultante avec les moments linéaires avec les 3 axes coord.és et λ, λ', λ'' μ μ' μ'', ν, ν', ν'' les angles de ces Moments linéaires avec les trois axes, on aura

$$R r \cos l = P p \cos\lambda + P' p' \cos\lambda' + P'' p'' \cos\lambda''$$

$$R r \cos m = P p \cos\mu + P' p' \cos\mu' + P'' p'' \cos\mu''$$

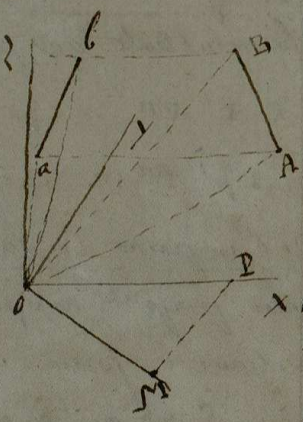
$$R r \cos n = P p \cos\nu + P' p' \cos\nu' + P'' p'' \cos\nu''$$

formules analogues à celles que nous trouvées pour les résultantes des plusieurs forces.

Etant donné le point d'application d'une force P au moyen de ses coordonnées x, y, z, son intensité et α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes, on peut déterminer le moment

linéaire en grandeur et en Direction et par conséquent les projections de ce moment. (l'origine des coord$^{es}$ étant prise pour centre des moments)

Pour trouver les valeurs demandées, je poserai le principe suivant : une force AB ayant son point d'application A dans l'espace, rapporté à trois axes rectang$^{rs}$ la projection de son moment linéaire sur l'axe des x sera égale en grandeur et en signe au moment absolu de la projection de la force sur xoz perp$^{re}$ à l'axe des x.

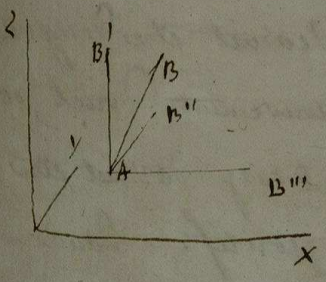



on voit d'abord, qu'il s'agit en o que je prends pour centre des moments une perp$^{re}$ om au plan oAB du moment; l'angle que les deux plans oAB, zoy font entre eux est mesuré par l'angle xom. donc la projection du moment absolu sur le plan des zy est égale au moment de la force AB par le cosinus des deux droites mo, ox. de plus, on doit porter sur om le moment linéaire de AB. donc la projection de ce moment linéaire sur l'axe des x est égale à la proj$^{on}$ du moment absolu sur le plan des zy. du moins en grandeur, il faut montrer qu'elles le sont en signe. Supposons pour cela que la force AB fasse avec l'axe om sur lequel on a porté son moment linéaire un angle aigu, c'est supposer que le mouvement de la force autour de cet axe est direct. ox faisant aussi un angle aigu avec le plan du moment de la force, le mouvement de AB autour de l'axe des x sera aussi direct. on voit aussi que la projection de AB

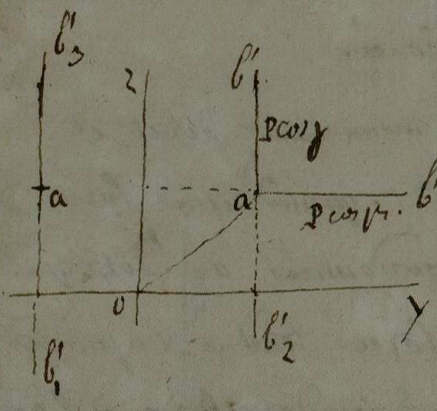
tournera autour de l'axe des x dans le même temps AB, donc ab, or tendant à imprimer à tourner de droite à gauche, elles tous donc de même signe. on ferait les mêmes raisonnements si on supposait que la force AB a un mouvement rétrograde autour de son axes: on a donc démontré le principe énoncé.

Voici ce qu'on entend par mouvement direct et rétrograde que nous venons d'employer: quand une force AB est rapportée à trois plans coordonnés on dit que le mouvement est direct, quand la force tend à imprimer un mouvement de l'axe ox à l'axe oy de celui-ci à l'axe oz et mouvt rétrograde quand il se fait de oz à oy de oy à ox. du reste ce qui se nomme mouvement direct par rapport à un système de demi-axes, est mouvement rétrograde par rapport au système de demi-axes opposés. nous adopterons donc pour mouvement direct celui qui se fait de droite à gauche autour des demi-axes positifs.

passons à la solution de la question proposée.




La force P a pour projections sur les trois axes P cos z, P cos x, P cos y. et si AB représente cette force AB' AB'' AB''' les forces dans les quelles elle se décompose, on voit d'après le 1er théorème que la projection




du moment linéaire $P p \cos\lambda$ sur l'axe des x, elle égale en grandeur et en signe au moment des projections des composantes de AB sur le plan des zy. or en projettant ces trois composantes, l'une se réduit à un point A et les deux autres se projettant dans leur vrai grandeur soient donc ab', ab'' les projections de ces composantes c.à.d ces composantes elles mêmes sur le plan des zoy. $b''ab' = P\cos\gamma$. $ab'' = P\cos\rho$. les moments de ces composantes sont $Py\cos\gamma$, $Pz\cos\rho$. donc

$$P p \cos\lambda = \pm P y \cos\gamma \pm P z \cos\rho.$$

il s'agit à présent de savoir quels signes il faut donner aux termes de cette Eq on pour qu'elle soit algébrique.

on est convenu d'affecter du signe + le moment $Pp$ quand le mouvement est direct, et du signe − quand il est rétrograde. D'après cela supposons que ab' tend à produire un mouvement direct c.à.d de y à z — et que γ soit positif, ou bien que le mouvement soit direct soit inverse les cos γ sont de même signe. ici donc $P\cos\gamma$ est positif, donc $Py\cos\gamma$ l'est aussi. si γ était négatif, la force ab' devrait être dirigée en sens inverse pour produire un mouvement direct, elle devrait être suivant $ab'_1$ donc $P\cos\gamma$ devrait être négatif et par conséquent $Py\cos\gamma$ positif. donc toutes les fois que le mouvement est direct $Py\cos\gamma$ est

positif. Supposons le mouvement rétrograde, et $y$ positif $ab'$ doit être dirigée en sens inverse suivant $ab'_2$ donc $Py\cos\gamma$ est ~~négatif~~ de signe contraire et parconséquent le moment $Py\cos\gamma$ est positif car du moment que le mouvement est rétrograde $P\cos\gamma$ est négatif. de même si $y$ est négatif, la force au lieu d'être dirigée suivant $ab'_3$ donc le produit devrait être négatif, mais il doit être porté en sens inverse puisque le mouvement est rétrograde, donc $Py\cos\gamma$ est encore positif. Ainsi l'on peut dire que ce 1er terme est essentiellement positif.

Pour connaître celui du 2d membre on verra que le mouvement devant être direct il faut que $ab''$ soit tournée en sens inverse parconséquent qu'on ait $-Pz\cos\beta$. et que le mouvement étant rétrograde on doit avoir $+P\cos\beta$ donc $-Pz\cos\beta$ est le signe général de ce terme et l'on a pour la projection du moment de la force sur l'axe de $x$

$$Pp\cos\lambda = Py\cos\gamma - Pz\cos\beta.$$

on établirait de même pour les suivantes

$$Pp\cos\mu = P(z\cos\alpha - x\cos\gamma)$$

$$Pp\cos\nu = P(x\cos\beta - y\cos\alpha).$$

il est facile de retenir ces formules car les moments qui ont le signe + sont ceux dont les forces sont parallèles à l'axe qu'on rencontre le 1er dans le mouvement direct.

5e. Leçon.

On peut au moyen des trois formules précédentes connaître la perp^re abaissée du centre du moment d'une force sur la Direction de cette force, il suffit de supprimer P dans les 3 dernières qui deviennent

$$p\cos\lambda = y\cos\gamma - z\cos\beta.$$

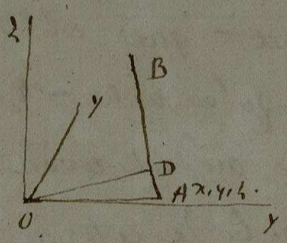
$$(1)\quad p\cos\mu = z\cos\alpha - x\cos\gamma$$

$$p\cos\nu = x\cos\beta - y\cos\alpha.$$

faisant la somme des carrés, on a

$$p^2 = (y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2.$$

ajoutant aux deux membres $(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$ le 2^d membre se réduit à $x^2+y^2+z^2$, donc




$$p^2 = x^2+y^2+z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2.$$

on aurait pu trouver cette perp^re en considérant le triangle OAD, $\overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 - AD^2 = (x^2+y^2+z^2) - \overline{AD}^2$.

or AD est la projection de OA sur AB donc $AD = OA\cos BAD$.

le cosinus de OAB est comme quand les cosinus de BA, OA, le sont.

or $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{y}{\sqrt{\phantom{x}}}$, $\dfrac{z}{\sqrt{\phantom{x}}}$ sont les cosinus des angles de OA avec les axes, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont ceux de la direction de la force donc

$$\cos BAD = \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

par conséquent

$$\overline{AD}^2 = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2.$$

donc

$$\overline{OD}^2 = p^2 = x^2+y^2+z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2.$$

on peut aussi retrouver les Eq^ons (1) ci-dessus, en considérant que

l'axe du moment linéaire de la force AB est perp^re au plan du moment, que par conséquent il est perp^re à toutes les droites qui passent par son pied dans le plan; il est donc à OA et à AB. on a ainsi les deux Eq^ons

$$\left.\begin{aligned} x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0 \\ \cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = 0 \end{aligned}\right\}$$

Si l'on élimine entre ces 3 Eq^ons successivement $\cos\nu$, $\cos\mu$, $\cos\lambda$, on a les 3 Eq^ons

$$\frac{\cos\lambda}{y\cos\nu - z\cos\mu} = \frac{\cos\mu}{z\cos\lambda - x\cos\nu} = \frac{\cos\nu}{x\cos\mu - y\cos\lambda} = \pm 1.$$

Egalant chacune de ces fractions à $\pm 1$ on reproduira les Eq^ons (1). ou des Eq^ons de signe contraire, ce qui donne les Eq^ons des projections des moments quand on suppose les demi axes positifs et quand on les suppose négatifs.

Au moyen de ces 3 Eq^ons on trouverait de même la valeur de p il suffirait de multiplier chacune des fractions par p de les élever au carré de faire la somme des numérateurs et des dénominateurs.

---

6ème Leçon
5 nov.

## De l'équilibre d'un point matériel dans l'espace.

Soient A ce point auquel sont appliquées plusieurs forces P, P' P''... qui font des angles $\lambda, \nu, \mu$, $\lambda', \nu', \mu'$, $\lambda'', \nu'', \mu''$, ..... avec les axes coordonnés. X, Y, Z représentant les projections de ces forces sur les trois axes, on a

$$X = P\cos\lambda + P'\cos\lambda' + P''\cos\lambda'' + \text{---}$$

$$Y = P\cos\mu + P'\cos\mu' + P''\cos\mu'' + \text{---}$$

$$Z = P\cos\nu + P'\cos\nu' + P''\cos\nu'' + \text{---}$$

a, b, c désignent les angles que la résultante R des forces appliquées en A fait avec les axes, on a

$$\left.\begin{aligned} X &= R\cos a \\ Y &= R\cos b \\ Z &= R\cos c \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où} \quad R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

pour que le point A soit en équilibre, il faut que la résultante R soit nulle ce qui exige que l'on ait

$$X = 0 \; ; \quad Y = 0 \; ; \quad Z = 0 \; ;$$

Étant donné le point A par ses coordonnées, et l'intensité des forces et leurs directions on peut calculer la résultante et la direction au moyen des moments, on sait que l'on a

$$P p\cos\lambda + P' p'\cos\lambda' + P'' p''\cos\lambda'' + \cdots = R r\cos l.$$

remplaçant $p\cos\lambda$, $p'\cos\lambda'$ ... par leurs valeurs on a

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y\cos\gamma' - z\cos\beta') + \cdots = R(y\cos c - z\cos b).$$

$$P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z\cos\alpha' - x\cos\gamma') + \cdots = R(z\cos a - x\cos c)$$

$$P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x\cos\beta' - y\cos\alpha') + \cdots = R(x\cos b - y\cos a)$$

Éq^ons qui nous font voir que le point d'application pourvu qu'il soit sur la droite suivant laquelle la force est dirigée. on peut donc au moyen de ces trois éq^ons trouver R et les angles de la direction de la force avec les axes puisque ces 3 éq^ons ont lieu q.q^e soit x, y, z, il faut que les coefficients de y dans la 1^ère éq^on soient les mêmes, que ceux de x, z dans les autres soient aussi les mêmes, ce qui donne lieu aux trois éq^ons

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' = P\cos a$$

$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + \cdots = P\cos b$$

$$P\cos\gamma + \cdots = P\cos c.$$

Equilibre d'un point matériel A situé sur une surface courbe $u = f(x, y, z) = 0$ étant Eq^on. On suppose le point A sollicité au mouvement par plusieurs forces. il n'est pas nécessaire dans ce cas que la résultante R de ces forces s'évanouisse, il suffit qu'elle soit normale à la surface.

Or les cosinus des angles que la normale fait avec les axes sont proportionnels à,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial z} .$$

La résultante doit être dirigée suivant cette normale, et si nous supposons d'abord le point A inhérent à la surface R peut être situé d'un côté ou de l'autre de la surface sur la normale à cette surface en A. Or les cosinus des angles de la normale sont proportionnels à —

$$X \; , \; Y \; , \; Z$$

pour que cette résultante soit dirigée soit dirigée suivant la normale, il faut que —

$$\frac{X}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial u}{\partial z}} \text{ d'où } \ldots\ldots = \pm \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}$$

en égalant la d^re avec chacune des autres fractions, on voit que les cosinus sont égaux au signe près, et qu'il faut donner le signe + ou le signe − aux trois Eq^ons en même temps.

On voit donc que deux Eq^ons suffisent pour Déterminer l'Equilibre d'un point matériel sur une surface.

Appⁿ Supposons qu'on veuille trouver les conditions pour qu'un point A reste en équilibre sur une sphère

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-\rho^2=0.$$

d'après les Eqns ci-dessus il faut chercher $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ — Or, —

$$\frac{du}{dx}=2(x-x_0) \quad , \frac{du}{dy}=2(y-y_0) \quad , \frac{du}{dz}=2(z-z_0).$$

Les Eqns de condⁿ pour l'équilibre trouvé donc —

$$\frac{X}{x-x_0}=\frac{Y}{y-y_0}=\frac{Z}{z-z_0}.$$

qui expriment que la résultante est dirigée suivant le rayon dans le sens de la concavité ou de la convexité. On voit donc qu'il suffit d'assujettir un point à rester à l'extrémité d'une droite inflexible dont l'autre extrémité est fixe, ce point en tournant décrira une sphère. Si le point avait besoin d'être invariablement à la surface il n'était que posé à la surface, il faudrait ajouter une nouvelle condition à celles déjà trouvées pour l'équilibre. il faudrait que la force soit sur la direction du rayon et qu'elle presse la force contre la surface, il faudra donc que chacune des fractions trouvées ci-dessus soient négatives ou que les cosinus soient

$$\frac{x_0-x}{\sqrt{\quad}} \quad \frac{y_0-y}{\sqrt{\quad}} \quad \frac{z_0-z}{\sqrt{\quad}}.$$

On a supposé que la surface courbe opposait une résistance indéfinie, cela n'a pas lieu dans la nature, il faut que la résultante des forces appliquées en A ne surpasse pas la résistance que peut éprouver la surface en ce point.

## Equilibre d'un point matériel sur une courbe

On peut le donner cette courbe par deux surfaces dont elle sera l'intersection, pour que le point soit en équilibre sur cette courbe, il faut que la direction soit normale à cette courbe, car, il doit rester en équilibre sur chacune des surfaces, la force appliquée en ce point doit donc pouvoir se décomposer en deux forces normales à chacune de ces surfaces en ce point, elle est donc située dans le plan normal à ces surfaces, et par suite sur la normale à la courbe d'intersection qui est la courbe donnée, la direction de la résultante est donc perp^re à la tang^te à la courbe en ce point donné.

Soit $u=0$, $v=0$, la courbe donnée.

$dx$, $dy$, $dz$ sont prop^nes aux cosinus de la tang^te

$X$, $Y$, $Z$ sont prop^nes aux cosinus de la force

Il faut que les cosinus de ces deux droites soit supplémentaires puisqu'elles font un angle droit, donc

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

telle est l'Eq^on de condition pour l'équilibre d'un point matériel sur une surface courbe.

Exp^le Soit un cercle situé sur le plan des $xy$, l'Eq^on sera

$$z = 0 \qquad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 = 0.$$

D^t ... $dz = 0$ ; $(x-x_0)\,dx + (y-y_0)\,dy = 0$.

Donc la cond^on sera

$$\pm \frac{X}{x-x_0} = \frac{Y}{y-y_0}.$$

qui exprime que la force est dirigée suivant le rayon du cercle ou suivant une droite qui se projette suivant ce rayon. ——

Moment Linéaire Principal, quand l'origine n'est pas prise pour centre des moments.

Leçon du 20 mai 1823.

Soient

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P$, | $P'$, | $P''$, | des forces données |
| $\alpha$ | $\alpha'$ | $\alpha''$ | les angles qu'elles font avec les axes coordonnés. |
| $\beta$ | $\beta'$ | $\beta''$ | |
| $\gamma$ | $\gamma'$ | $\gamma''$ | |
| $x$ | $x'$ | $x''$ | les coord.ées de leurs points d'app.on |
| $y$ | $y'$ | $y''$ | |
| $z$ | $z'$ | $z''$ | |

si $X$ $Y$, $Z$ sont les projection de la résultante sur les axes, on a

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{———} = X$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{———} = Y$$
$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{———} = Z.$$

si l'on prend l'origine pour centre des moments, il sera facile de construire tous les moments linéaires correspondants aux forces ils passeront tous par l'origine, on pourra donc trouver le moment résultant que je nommerai moment linéaire principal; soient $M$, $N$, $L$ les projections de ce moment L. P. sur les axes, et le moment Linéaire Principal.

on peut dire d'après ce qu'on a vu que ——

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \text{---} = L$$
$$P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') + \text{———} = M$$
$$P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\alpha' - y'\cos\beta') + \text{———} = N.$$

On peut connaître $X, Y, Z$ au moyen des Eqns ci-dessus, ou bien en transportant toutes ces forces parallèlement à elles-même en un point de l'espace, cherchant le résultante de ces forces que l'on nommera force principale elle sera telle que ses projections sur les trois axes seront $X, Y, Z$. donc

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

De même nous $K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$.

On peut ainsi connaître la force principale de plusieurs forces appliquées dans l'espace à un système invariable, il faut connaître les projections, qui sont connues dès que l'on donne l'intensité des forces leurs points d'appn et leurs directions. On obtient le moment linéaire principal, connaissant les projections $L, M, N$, qu'on obtient au moyen des Eqns ci-dessus. il suffit pour avoir ces Eqns de connaître la direction des forces, les coord^es de leurs points d'appn et leurs intensités, et les coordonnées du Centre des moments de ces forces.

Dans les formules trouvées, on a pris l'origine pour centre des moments, voyons comment il faudrait les modifier pour prendre pour centre des moments un point dont les coordonnées seraient $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_1 z_1$ étant les coord. du point d'appn de la force $P$. par rapport à la nouvelle origine ou voit que

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= x - x_0 \\ y_1 &= y - y_0 \\ z_1 &= z - z_0 \end{aligned}$$

en supposant que le centre des moments fut à l'origine $x_0 y_0 z_0$. Les moments linéaires de la force P sur l'axe des x, des y et z seraient

$$P(y_1 \cos\gamma - z_1 \cos\beta)$$
$$P(z_1 \cos\alpha - x_1 \cos\gamma)$$
$$P(x_1 \cos\beta - y_1 \cos\alpha).$$

d'après les équ (1). ces valeurs deviennent

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta) - P y_0 \cos\gamma + P z_0 \cos\beta$$
$$P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) - P z_0 \cos\alpha + P x_0 \cos\gamma$$
$$P(x\cos\beta - y\cos\alpha) - P x_0 \cos\beta + P y_0 \cos\alpha.$$

on trouverait de même pour P' ——

$$P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') - P' y_0 \cos\gamma' + P' z_0 \cos\beta'$$
$$P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') - P' z_0 \cos\alpha' + P' x_0 \cos\gamma'$$
$$P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') - P' x_0 \cos\beta' + P' y_0 \cos\alpha'.$$

il en serait ainsi de P'' ——

Donc les projections des moments linéaire principal seront, en faisant les réductions.

$$L - y_0 Z + z_0 Y = L_1$$
$$M - z_0 X + x_0 Z = M_1$$
$$N - x_0 Y + y_0 X = N_1$$

Si $x_0 y_0 z_0$ sont nuls, c'à d si le centre des moments est à l'origine des coordonnées on a bien L, M, N.

——

de moment linéaire principal qui l'obtiendrait en prenant la racine carrée de la somme des trois projections élevés chacune au carré, chacune de valeur avec la position du centre des moments, on peut démontrer que si on le projette sur la direction de la force principale, sa projection absolue sera la même.

On obtiendra cette proj.on en multipliant ce moment linéaire qui est

$$\sqrt{(L - y_0 Z + z_0 Y)^2 + (M - z_0 X + x_0 Z)^2 + \text{---}}$$

par le cosinus de l'angle que fait ce moment linéaire principal avec la direction de la force principale. on connaitra ce cos. au moyen des cos. des angles de la force principal qui sont

$$\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}.$$

et des cos des angles du moment linéaire principale avec les axes qui sont

$$\frac{L - y_0 Z + z_0 Y}{\sqrt{(L - y_0 Z + z_0 Y)^2 + \text{---}}}, \quad \frac{M - z_0 X + x_0 Z}{\sqrt{\text{---}}}$$

$$\frac{N - x_0 Y + y_0 X}{\sqrt{\text{---}}}$$

faisant la somme des cosinus deux à deux, on obtient le cosinus cherché,

$$\pm \frac{LX + MY + NZ}{R\sqrt{\text{---}}}$$

exprime ce corimes. le multipliant par la valeur du moment linéaire principal, on aura pour la proj^on du moment linéaire s. sur la direction de la force s.

$$\pm \frac{Lx + My + Nz}{R}$$

valeur qui est indépendante des coordonnées du centre des moments donc &c.

puisque la projection de ce moment lin^re principal est toujours la même, q.q^e soit le centre des moments, le moment linéaire principal a nécessairement un minimum qui est cette projection constante. or pour que une droite soit égale à sa projection, il faut qu'elle lui soit parallèle, il faut donc que les corimes des angles soient les mêmes, ce qui donne —

$$\frac{L - y_0 z + z_0 y}{x} = \frac{M - z_0 x + x_0 z}{y} = \frac{N - x_0 y + y_0 x}{z}.$$

on donne lieu à une 4^e valeur de ces fractions en multip^t la 1^re par x la 2^de par y la 3^e par z, et en ajoutant. on a —

$$\frac{Lx + My + Nz}{R} \times \frac{1}{R}.$$

on voit donc qu'on a 2 éq^ons pour déterminer $x_0$ $y_0$ $z_0$ dans le cas du minimum, ces 2 éq^ons étant celles de deux plans on voit que le lieu géométrique

(1) est donc la valeur du moment linéaire principal

Des centres des moments linéaire principal minimum
dans une ligne droite. on trouve ses projections en
égalant chacune des fractions ci-dessus à la 4e ——

$$\begin{aligned} L - y_0 Z + z_0 Y &= \frac{X}{R}(LX + MY + NZ) \\ M - z_0 X + x_0 Z &= \frac{Y}{R}(\text{——————}) \\ N - x_0 Y + y_0 X &= \frac{Z}{R}(\text{——————}). \end{aligned}$$

qui se trouvent vérifiés à priori puisque le 1er et le 2d
membre représentent également la projection du moment
linéaire principal sur les axes x.

Si on rapporte cette droite transportée à l'origine
parallèlement à elle-même, on a ——

$$\left.\begin{aligned} -y_0 Z + z_0 Y &= 0 \\ -z_0 X + x_0 Z &= 0 \\ -x_0 Y + y_0 X &= 0 \end{aligned}\right|.$$

d'où

$$\frac{x_0}{X} = \frac{y_0}{Y} = \frac{z_0}{Z}.$$

qui expriment que cette la droite qui est le lieu des
centres du moment linéaire principal minimum est
parallèle à la direction de la force principale.
On nomme cette droite axe principal.

8e Leçon.

Si $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ la résultante $R=0$,
et les sommes des projections des moments linéaires sur
les axes sont L, M, N qq. soit le centre du moment
linéaire. donc le moment linéaire principal

$$\sqrt{L^2+M^2+N^2}$$

et Constant, ainsi que les angles qu'il fait avec les axes et qui sont

$$\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}\,,\quad \frac{M}{\sqrt{\phantom{L^2+M^2+N^2}}}\quad \frac{N}{\sqrt{\phantom{L^2+M^2+N^2}}}\,.$$

pour savoir quelles directions ont les forces, quand $X=0, Y=0, Z=0$ on supposera d'abord qu'il n'y ait que deux forces P, P'...

on a $X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' = 0$

$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' = 0$$

$$Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' = 0$$

qui peuvent s'écrire

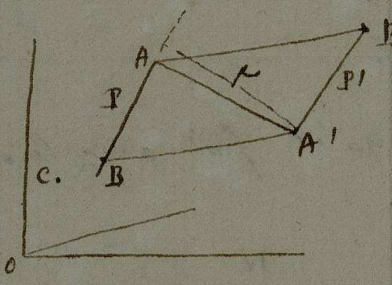
$$P'\cos\alpha' = -P\cos\alpha.$$

$$P'\cos\beta' = -P\cos\beta.$$

$$P'\cos\gamma' = -P\cos\gamma.$$

d'où $P' = P$ et $\cos\alpha' = -\cos\alpha$ ; $\cos\beta' = -\cos\beta$, $\cos\gamma' = -\cos\gamma$. qui expriment que dans ce cas particulier, les forces sont égales et dirigées dans un sens opposé. on nomme ce système de deux forces un couple. et effet pour un tel système de forces la résultante sera nulle. on voit donc que dans un couple, le moment linéaire principal conserve constamment la même Valeur et la même Direction qq. soit le centre du moment des forces qui le composent.

Je prends deux forces AB, A'B' appliquées

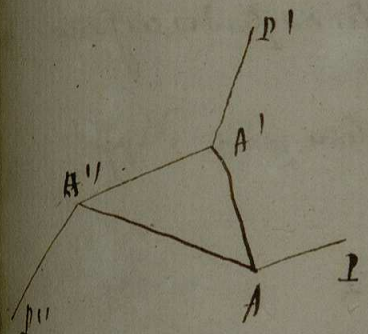



en A, et A' P et P' expriment les intensités de ces forces
99e. parce que voilà placé le centre C des moment des deux
forces P et P' que je suppose former un couple, on pourra
le supposer transporté en A'. et à ce point le moment
linéaire sera la même en grandeur et en direction. or le
moment linéaire principal est la somme des moments
linéaires de la force P et P'. or celui de P' est nul
et celui de P est représenté en grandeur par Pp.
p désignant la perpre abaissée de A' sur la direction de la
force P. donc le moment absolu de ce système de
forces est représenté par la surface du Parallélog.me
construit sur ces deux forces. pour avoir la direction
du moment linéaire, il faut porter sur une perpre
élevée en A' au plan du moment une longueur
égale à la surface du Parallélog.me, mais il faut que
la perpre soit dans du plan du moment soit telle qu'on
voie le plan du moment agir de droite à gauche. or
ce mouvement de AB autour de A' est la même
que le mouvement que tendent à imprimer les deux
forces du couple, quand on suppose A et A' mobiles.
donc la grandeur et la position du moment linéaire
d'un couple se trouvent déterminées par la
grandeur du Parallélog.me construit sur ces forces, et
le sens dans lequel tourne le couple.

je suppose que lorsque

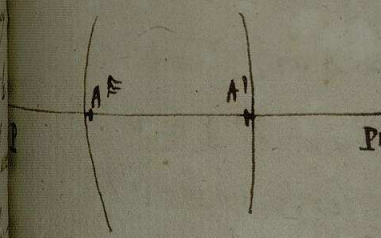
$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0.$$

on ait un nombre qqcs de forces. les projections résultantes $M_1$, $N_1$, $L_1$ seront toujours $M$, $N$, $L$, qui seront indépendants du centre des moments. si donc $M=0$, $N=0$, $L=0$ s'évanouissant le moment linéaire $\sqrt{L^2+M^2+N^2}$ s'évanouit aussi. cela donne lieu à ce principe, que si l'on a plusieurs forces P, P' P'' appliquées aux points A A' A'', et que pour ces forces le moment linéaire principal soit nul, les forces sont situées dans le même plan. en effet si je prends A'' pour centre des moments. le moment de P'' est nul, celui de P et P' devant le détruire, ils doivent être portés sur une même droite, il faut donc que le plan du moment de P soit le même que celui de P'. on ferait voir de même que celui de P'' est le même que celui de P' donc les trois forces P P' P'' sont dans le plan du triangle AA'A''.




Connaissant tous ces principes, nous pouvons passer à l'Equilibre de plusieurs forces appliquées à un système de points invariables.

Soient deux points A et B auxquels sont appliquées deux forces P et P'. si l'Equilibre a lieu, il subsistera lorsqu'un des points restera invariable, le point A' par ex: alors la force P tendra à faire tourner le point A sur une sphère qui a A'A pour rayon, et dans la Direction AA'. il en est de même de A' qui reste en Equilibre sur la sphère décrit du point A comme centre avec AA' pour rayon dans la direction suivant AA'. les forces P, P' sont donc dirigées suivant la droite invariable AA'



Comm' il y a Equilibre, il faut que les forces soient égales et directement opposées.

Exprimons ces conditions en analyse — soient

$P$ , $P'$ deux forces

$\alpha$ $\alpha'$ } les angles de ces forces

$\beta$ $\beta'$ }

$\gamma$ $\gamma'$ }

$x$ $x'$ } leurs points d'app$^{on}$

$y$ $y'$ }

$z$ $z'$ }

il faut que

$P = P'$ et $\quad \cos\alpha' = -\cos\alpha$

$\cos\beta' = -\cos\beta$

$\cos\gamma' = -\cos\gamma$

pour Exprimer que les forces sont égales et directement opposées. on peut réunir en 1 Eq$^{on}$ les 3 suivantes

$$(1) \quad \begin{cases} P'\cos\alpha' = -P\cos\alpha \\ P'\cos\beta' = -P\cos\beta \\ P'\cos\gamma' = -P\cos\gamma \end{cases}$$

Ces 3 Eq$^{ons}$ ne suffisent pas il faut dire aussi que les 2 forces ne forment pas un couple, c'à'd que le moment linéaire principal en soit nul ce qui exige que $L=0$, $M=0$, $N=0$. ou —

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') = 0.$$

$$P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') = 0$$

$$P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') = 0.$$

qu'on peut écrire en employant les formules (1) —

$$(y-y')P\cos\gamma - (z-z')P\cos\beta = 0.$$

$$(z-z')P\cos\alpha - (x-x')P\cos\gamma = 0$$

$$(x-x')P\cos\beta - (y-y')P\cos\alpha = 0.$$

Eqons qui se réduisent aux deux

$$(2)\quad \frac{P\cos\gamma}{y-y_1} = \frac{P\cos\beta}{z-z_1} = \frac{P\cos\alpha}{x-x_1}.$$

Les Eqons (2) et (1) suffisent donc pour déterminer l'Equilibre de deux forces P et P' fixées aux deux extrémités d'une droite invariable, et sur la direction. on peut écrire ces 5 Eqons

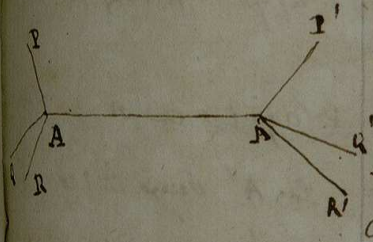
$$\frac{P\cos\alpha}{x-x_1} = \frac{P\cos\gamma}{y-y_1} = \frac{P\cos\beta}{z-z_1} = \frac{P'\cos\alpha'}{x_1-x} = \frac{P'\cos\gamma'}{y_1-y} = \frac{P'\cos\beta'}{z_1-z}.$$

---

9e Leçon. 5

On a donc 5 Eqons pour les conditions d'Equilibre de deux forces qui agissent aux extrémités d'une Droite inflexible, et dans la Direction de cette droite, et l'on a aussi 5 indéterminées car il y a 6 coordonnées $x, y, z, x', y', z'$, et une Eqon constante qui lie les deux points A et A'. cqui réduit ces indéterminées à 5. C'est une propriété que nous verrons être générale, qu'il y a autant de conditions d'Equilibre que d'indéterminées dans le système qu'on veut mettre en Equilibre.

De l'Equilibre de plusieurs forces appliquées aux extrémités A et A' d'une droite inflexible.

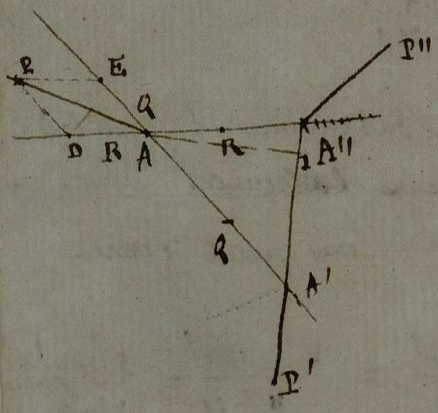



Il faudra que les résultantes des deux systèmes de forces en A et A' soient égales et dirigées en sens opposé sur la droite AA', car en composant les forces reunies en A en une seule, on ne change pas les projections de la résultante qu'on appelle force principale, ni celles du moment linéaire résultant, or on a vu que dans le cas de deux forces appliquées à deux points fixes il fallait que la force principale et le moment linéaire principal fussent nuls pour l'Equilibre, cqui donne les 6 Eqons

$$X=0 \quad Y=0 \quad Z=0, \quad L=0, \quad M=0, \quad N=0,$$

qui se réduisent dans ce cas à 5. donc les mêmes Eqons

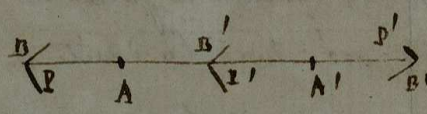
doivent avoir lieu pour l'Equilibre. ———.




Equilibre de trois forces appliquées aux 3 sommets d'un triangle.

Soient A A' A'' les 3 sommets P P' P'' les trois forces qui y sont appliquées. puisqu'il y a Equilibre, je suppose que deux points A'' et A' soient fixes, le système sera encore en équilibre je dis que P doit être dans le plan du triangle AA'A''. Car A étant mobile ne peut se trouver que sur la circonférence décrite avec AI pour rayon et du point I comme centre. le plan de ce cercle sera perpre au triangle A A' A'', pour que le point A soit en équilibre sur ce cercle, il faut que la force agisse normalement à ce cercle et suivant le rayon, elle sera donc dans le plan du triangle. on peut donc la décomposer en deux forces Q et R agissant en A suivant les directions A A', AA'' prolongées s'il est nécessaire au delà de A.

on peut démontrer qu'on ne change en rien l'Equilibre du système, en transportant le point d'appon A des forces Q et R aux points A' et A''




effet une force P agit en A sur la droite A A'' si l'on applique en A' deux forces P' égales et de signe contraire, on ne change rien au système, mais d'après ce qu'on a vu P' et P appliquées aux extrémités A' et A d'une droite inflexible se détruisent donc il reste la force P' égale à P qui agit sur le système.

cela démontré, on peut donc transporter Q et R

en A' et A'' en à lieu a ramené les conditions d'Equilibre à celles de 4 forces appliquées aux deux extrémités d'une droite inflexible, et comme d'ailleurs en transportant les forces de A en A', et en décomposant R en R cos α R on n'a rien changé dans les valeurs des projections de la force résultante sur les axes ni dans celle du moment linéaire résultant, il s'ensuit que l'on aura encore pour les Eqns d'Equilibre les 6 Eqns

$$X=0\ ,\ Y=0\ ,\ Z=0\ ,\ M=0\ ,\ N=0\ ,\ L=0.$$

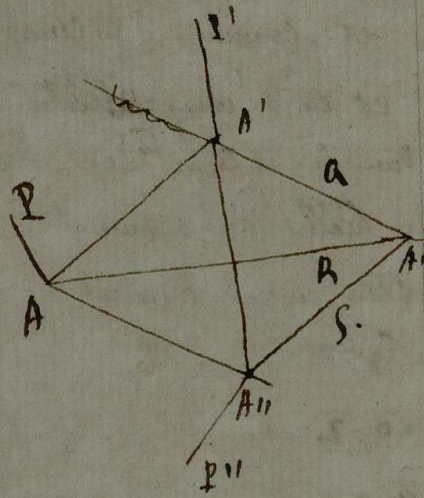
On s'aperçoit toutes les fois que ces 6 Eqns auront lieu, il y aura Equilibre, car d'après ce qu'on a démontré dans le cas précédent, il suffit de ces conditions pour en conclure que les forces sont dans un même plan, et par conséquent pour pouvoir les ramener au cas de l'Equilibre de deux forces qui agissent aux extrémités d'une droite inflexible.

On a ici 6 Eqns et en effet, il existe 6 inconnues dans le problème, car 3 points donnent 9 indéterminées, mais elles sont liées entre elles par 3 conditions qui expriment que les points A, A', A'' sont invariables.

Si l'on suppose plusieurs forces appliquées à chacun des sommets d'un triangle, comme l'on peut toujours les composer en trois, l'on rentre dans le cas précédent.

## Equilibre d'un système de forces liées invariablement entre elles.

Je suppose qu'avec trois points A A' A'' on forme




un triangle qui laisse tous les autres points d'app^on du système hors de son plan. Soient P P' P'' P''' P^IV... appliquées aux points A, A' A'' A''' A^IV.... la force P''' pourra être considérée comme la diagonale d'un parallelepipède construit sur les directions A''' A, A''' A', A''' A''. soient donc R, Q, S les composantes de P'''.. on peut concevoir ces forces appliquées en A', A, A''.... il en serait de même de P^IV qu'on peut concevoir décomposé en trois forces appliquées en A A' A''... et pour qu'il y ait Equilibre, on rentre dans le cas déjà examiné que l'on ait des résultantes en A A' A'' qui soient dans le plan de ce triangle, et qu'enfin les 6 Cond^ons d'Equilibre ci-dessus aient lieu, d'ailleurs ici, en transportant les forces, on n'a rien changé aux projections de la ~~force~~ principale, ni à celles du moment linéaire principal, donc, il faut toujours, que L = M = o N = o, X = o, Y = o, Z = o.

il y a encore ici 6 Eq^ons de condition, et 6 indéterminé

Nous avons vu que le moment linéaire principal d'un système variait d'après le centre des moments, et que sa direction était déterminée quand il devenait un min. —

On peut demander quelle est sa direction quand un système est ramené à un couple et à une force appliquée à l'origine, et que le couple devient Min. cela veut dire que son moment qui est le moment principal du système (puisque la force est appliquée à l'origine) devient un minimum. or il faut encore ici que ce moment linéaire qui est perp^re au plan du couple soit parallèle à la force principale, - qui doit par conséquent être perp^re au plan du couple. telle est la condition pour que le couple soit un minimum.

171

École polytechnique.

Cours de mécanique.

Lamarle



10ème Leçon.

Deux systèmes de forces sont équivalents, quand un 3e système faisant Equilibre au 1er fait Equilibre au 2d.

Soient $P, P', P'', P'''$ ..... un système de forces,

$Q, Q', Q'', Q'''$ ..... l'autre système qui lui est équivalent

$R, R', R'', R'''$ ..... le 3e système de forces auxiliaire.

Soient

$X, Y, Z, L, M, N$, { les projections sur les axes de la force principale et du moment linéaire relatifs au 1er système

$X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$ { les projections analogues relatives au 2d

$X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2$ { les projons relatives au 3e système.

pour qu'il y ait équilibre entre le 1er et le 3ème système, il faut que la somme des projections de toutes les forces sur les axes soit nulle ainsi que celle des moments linéaires, ou que

$$X + X_2 = 0, \quad Y + Y_2 = 0, \quad Z + Z_2 = 0 \quad L + L_2 = 0, \quad M + M_2 = 0, \quad N + N_2 = 0.$$

pour qu'il y ait équilibre entre le 2d et le 3ème, il faut que

$$X_1 + X_2 = 0, \quad Y_1 + Y_2 = 0, \quad Z_1 + Z_2 = 0, \quad L_1 + L_2 = 0, \quad M_1 + M_2 = 0, \quad N_1 + N_2 = 0$$

il faut donc que

$$X = X_1 \quad Y = Y_1 \quad Z = Z_1, \quad L = L_1 \quad M = M_1, \quad N = N_1.$$

pour que deux systèmes agissant sur les mêmes points d'application soient équivalents, c.à.d, il faut que les projections de la force principale et du moment linéaire principal sur les axes soient équivalentes.

Cherchons dans quels cas un système de forces peut être remplacé par une force unique. J'appellerai cette force unique capable de faire équilibre à tout le système résultante des forces données.

Soit R la force principale que je suppose appliquée en un point $x_1$ de l'espace, la résultante lui sera égale. Si a, b c sont les angles de R avec les axes, l, m, n ceux de son moment linéaire avec les mêmes axes, on aura

$$X = R\cos a, \quad Y = R\cos b, \quad Z = R\cos c.$$

$$L = zR\cos l, \quad M = zR\cos m \quad N = zR\cos n.$$

(On a supposé ici que r était la distance ~~du point d'application de la force principale~~ du centre des moments à la résultante s'il en existe dans le système que nous considérons).

Pour que ces Eqns appartiennent à une résultante, il faut que la résultante et son Moment linéaire forment un angle droit, ce qui exige que l'on ait

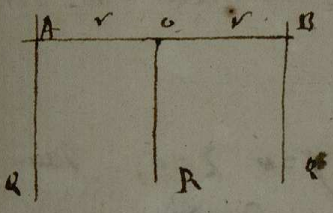
$$LX + My + NZ = 0.$$

Telle est la condition pour que le système ait une résultante. On peut la construire, car je mène par l'origine une force égale à la force principale, et une droite qui forme avec les axes des angles $\cos l = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$, $\cos m = \frac{M}{\sqrt{\quad}}$, $\cos n = \frac{N}{\sqrt{\quad}}$ je mène par l'origine un plan perp$^{re}$ à cette dernière droite, il renfermera la force principale. et comme elle se trouve à une distance distante de la résultante, de la quantité r on aura la direction de la résultante cherchée en remarquant que

$$Rr = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{\quad}}$$

$$z = \frac{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}{R} = \frac{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

chaque la résultante doive se trouver dans le plan de la force principale. je rabats ce plan sur le plan horizontal, soit o l'origine R la force principale, à la distance r je mène deux forces parallèles et l'on aura la direction, il ne reste donc plus qu'à choisir laquelle des directions est convenable ou ces forces tendent à faire le système en sens contraires, il faut donc choisir celle qui fera tourner le système de droite à gauche.




on peut retrouver par l'analyse la direction de la résultante, on voit que

$$L = R(y\cos c - z\cos b)$$
$$M = R(z\cos a - x\cos c)$$
$$N = R(x\cos b - y\cos a).$$

En vertu des Eqns

$$X = R\cos a,\ Y = R\cos b,\ Z = R\cos c,$$

elles deviennent

$$L = yZ - zY,\ M = zX - xZ,\ N = xY - yX.$$

il y aura donc une résultante toutes les fois que ces Eqns seront vérifiées, on il est aisé de voir qu'elles ne le sont pas toujours, et quelle est la condn qui les lie, en multipliant la 1ère par x, la 2e par y, la 3e par z. et ajoutant les produits, on a

$$Lx + My + Nz = 0.$$

Condition déjà trouvée pour qu'il y ait une résultante.

Les Eq^ons ci-dessus se réduisant à deux montrent qu'elles représentent le lieu géométrique des points d'application de la résultante et sa direction. elle se trouve donc sur une droite dont on connaît les Eq^ons, elle est donc déterminée en grandeur et en direction.

il peut arriver que $x=0$, $y=0$ $z=0$, sans que $L, M, N$, le soient en même temps. dans ce cas, on ne peut pas réduire les forces du système en une seule résultante, voyons s'il est possible de les réduire, à deux. or d'après ce que nous va les deux forces résultantes doivent former un couple, car $x=0, y=0$ $z=0$ indiquent qu'elles sont égales et agissent en sens opposé, et $L, M, N$, confirment qu'elles forment un couple. or on sait que la projection algébrique du moment linéaire dans ce cas, se réduit à celle du parallég^me qui représente le moment du couple, si donc $Q$ est la force de ce couple, on a

$$Qd = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

et $m, n, l$ étant les angles du moment linéaire avec les axes on a

$$\cos l = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \quad \cos m = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \quad \cos n = \frac{N}{\sqrt{\ }}$$

il suffira donc de choisir un couple dont le plan soit perp^re à la droite qui aurait pour cosinus de ses angles avec les axes ; $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, et qui soit égal à $Qd$ et l'on aura un couple équivalent au système de forces que l'on considère.

on voit donc qu'on peut transporter un couple dans des plans parallèles, ou les tourner d'une manière quelconque dans leur plan, pourvu que l'on ait

$$Q = \frac{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}{\delta}$$

le couple sera toujours équivalent au système donné.

11ème Leçon.

Voyons quel est le plus petit nombre de forces auquel on peut réduire des forces données.

Soient $P, P', P''$ ..... les forces $X, Y, Z$ les sommes des projections de ces forces sur les axes, $L, M, N$ les sommes des projections des moments linéaires sur les axes. je suppose qu'on veuille remplacer ces forces par deux autres systèmes de forces

$Q, Q', Q''$ ----- $R, R', R''$

dont les projections sur les axes et sommes de leurs moments linéaires soient

$X_1, Y_1, Z_1$ ----- $X_2, Y_2, Z_2$

$L_1, M_1, N_1$ $L_2, M_2, N_2$

il faudra que

$$X = X_1 + X_2 \; ; \; Y = Y_1 + Y_2 \; ; \; Z = Z_1 + Z_2$$

$$L = L_1 + L_2 \; ; \; M = M_1 + M_2 \; ; \; N = N_1 + N_2 .$$

c'à.d que la somme des projections sur les axes soient égales.

pour avoir deux systèmes de forces équivalents au système $P, P', P''$ ---- je prends dont les projections sont

(2) $X = X_1 \quad Y = Y_1 \quad Z = Z_1 \qquad 0 = L_1 \quad 0 = M_1 \quad 0 = N_1 = 0$

et

(3). $X_2 = 0 \quad Y_2 = 0 \quad Z_2 = 0 \qquad L_2 = L_1 \; M_2 = M_1 \; N_2 = N_1$

or d'après les sommes des projections données dans le système (2) on voit qu'on peut réduire le système des forces qui le composent à une force principale appliquée à l'origine des coordonnées que l'on prend pour centre des moments.

D'après le système (3), les forces qui le composent peuvent être réduites à un couple

or l'origine a été prise; on peut donc dire qu'un système de forces données peut être ramené à une force unique appliquée à un point pris, et à un couple. Mais on peut transporter le couple dans un plan parallèle au plan de son moment je prends donc un plan parallèle par l'origine, et j'y transporte le couple de manière que l'une des forces du couple soit appliquée à l'origine, or je puis composer la force principale et la force du couple qui se trouvent appliquées à l'origine, et le système est ramené à deux forces uniques non situées dans le même plan.

Si on ne supposait pas la force principale R appliquée à l'origine il faudrait remplacer le système

$$X, Y, Z \ldots\ L, M, N$$

par les deux systèmes

$$X, Y, Z, y_0 Z - z_0 Y, z_0 X - x_0 Z, x_0 Y - y_0 X.$$

$$0, 0, 0, L - (y_0 Z - z_0 Y), M - (z_0 X - x_0 Z), N - (x_0 Y - y_0 X).$$

---

Supposons que toutes les forces soient parallèles entr'elles et à l'axe des Z, ——————

On aura —

$$X=0 \quad Y=0, \text{ ----- } \quad N=0.$$

Donc l'Eqon (1) $LX + MY + NZ = 0$

est satisfaite, les forces peuvent donc se réduire à une force unique ou à un couple. Si $Z$ n'est pas nul, on pourra ramener le système à une force unique appliquée en un point qqe et parallèle à l'axe des $z$, et à un couple dont le plan sera perpre au plan des $xy$.

on a tous les deux en même temps, et en effet

si l'on avait

$X=0 \quad Y=0 \quad L=0 \quad M=0 \quad N=0$

le système se réduirait à une force parallèle à l'axe des $z$

si l'on avait

$$X=0 \quad Y=0, \quad Z=0 \quad \text{et} \quad N=0 \text{ ....}$$

le système se réduirait dans ce cas à un couple dont les forces seraient parallèles à l'axe des $z$. ~~et~~ ~~[illegible]~~ —

si l'on a $L=0$, $M=0$, $Z=0$, l'Eqon (1) est vérifiée

on a —

$X, Y, 0, 0, 0 \; N$

qui peut se partager en ces deux-ci

$X, Y, 0, 0, 0, 0$

$0, 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; N$

or ces conditions indiquent que la résultante du système est située sur le plan des $xy$, si l'on a avec ces 3 conditions $X=0$ $Y=0$, les forces forment un couple dont le plan est situé sur le plan des $xy$ ou sur un plan parallèle

Or le 2d exprime ~~que la~~ un couple résultante ~~du système est situé~~ situé sur un plan parallèle à $zy$, et du 1er, ~~[illegible]~~ résultante est située sur le plan $zy$ lui-même. donc on peut obtenir ainsi ~~[illegible]~~ le couple sur $xy$. une résultante unique située dans ce plan

Soit un système de forces dont les projections sur les axes et celles de leurs moments sont

(1) $X, \; Y, \; Z, \; L, \; M, \; N.$

d'après le principe démontré ci-dessus je puis les décomposer en deux systèmes

(2) $0, \; 0, \; Z, \; L, \; M, \; 0$

(3) $X, \; Y, \; 0, \; 0, \; 0, \; N$

or le 2d indique un système de forces qui peut d'après

ce que nous avons vu se réduire à une seule force parallèle à l'axe des z

Le 3e peut se réduire à une force située sur le plan des xy. on voit donc qu'on peut toujours réduire le système à deux forces non situées dans le même plan.

——— Equilibre de plusieurs points fixes non appartenant aux mêmes assujettis à tourner autour d'axes fixes.

Je suppose que les forces P, P' P''... appliquées aux points A, A' A'' sont assujettis à faire tourner le système autour d'un point fixe o.

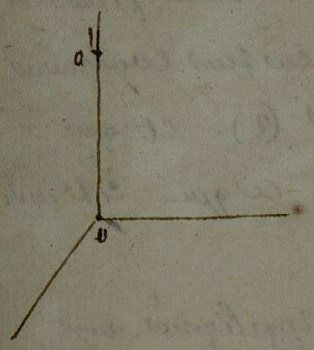
je puis remplacer le système par la force principale que j'applique à l'origine et par un couple dont je suppose une des forces appliquée aussi à l'origine. comme c'est le point fixe o que je prends pour origine. on voit que ces 2 forces qui y sont appliquées se détruisent, et qu'il ne reste plus qu'une force qui tende à faire tourner le système. pour l'Equilibre, il faut donc que le moment du couple soit nul, si q est la force du couple, q la dist qui sépare les 2 forces, on a pour le moment du couple ———

$$qq = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

pour qu'il soit nul, il faut que $L=0$ $M=0$, $N=0$ ce qui donne trois conditions pour l'Equilibre du système de forces que nous considérons.

Equilibre d'un système de forces qui tendent à faire tourner un système invariable de points autour ———

d'un axe fixe,

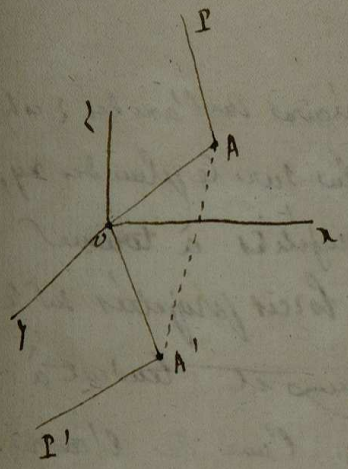



Soit oa' cet axe que je prends pour axe des z. Le système pouvant toujours se ramener à une force unique et à un couple, on voit que la force principale sera détruite par la résistance du point o, reste donc le couple qui ne produira aucun mouvement dans le système s'il agit suivant cet axe, ce qui exige seulement que $N = 0$. Telle est la condition pour l'Equilibre d'un système assujetti à tourner autour d'un axe fixe, si on l'avait pris pour axe des x, on aurait eu, $L = 0$, et $M = 0$ pour l'axe des y.

---

12ème Lecon
5

Les conditions d'Equilibre que nous venons de trouver s'appliquent à l'Equilibre du levier coudé et du treuil.




Soit P et P' deux forces appliquées aux extrémités A et A' d'un levier coudé OAA' dont les points restant liés invariablement entre eux, et tendant à faire tourner le plan OAA' autour du point o, il faudra pour l'Equilibre que

$$L = Pp\cos\lambda + P'p'\cos\lambda' = 0$$
$$M = Pp\cos\mu + P'p'\cos\mu' = 0$$
$$N = Pp\cos\nu + P'p'\cos\nu' = 0$$

ce qui donne lieu aux Eqns

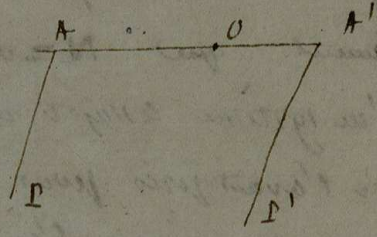
$$\cos\lambda = -\cos\lambda'$$

(1) $Pp = P'p'$ ..... et (2) $\cos\mu = -\cos\mu'$

$$\cos\nu = -\cos\nu'$$

on voit que pour l'Equilibre dans un levier coudé, il faut

que les deux forces soient situées dans le même plan et tendent à faire tourner le système en sens contraire ce qui est indiqué par les trois Eq^ons (2). et que les moments de ces forces soient égales ce qui est indiqué par l'Eq^on (1).




Si les deux forces P et P' parallèles sont appliquées aux extrémités une droite AOA'. on a $\frac{P}{P'} = \frac{p'}{p} = \frac{OA'}{OA}$. Condition pour l'Equilibre de ce levier.

Dans l'Equilibre de plusieurs forces assujéties à tourner autour d'un axe fixe, on a pour seule Cond^on $N = 0$, s'il n'y a que deux on a pour cond^on

$$N = Pp\cos v + P'p'\cos v' = 0.$$

d'où

$$Pp\cos v = -P'p'\cos v'.$$

or puisque la projection du moment linéaire sur l'axe des z est égale à la projection du moment absolu sur le plan des xy, on voit dans le cas de deux forces assujéties à tourner autour de l'axe des z que les deux forces projetées sur le plan des xy aient des moments égaux et tendent à faire tourner le plan en sens contraire l'une de l'autre. dans le treuil on suppose la force dans un plan perp^re à l'axe, ce n'est donc qu'un cas particulier de l'Equilibre de plusieurs forces assujéties à tourner autour d'un axe fixe, où la projection de la force est égale à la force

Elle-même. il suffit donc pour l'Equilibre du treuil que les produits des forces par leurs plus courtes distances à l'axe soient égaux et que les forces tendent à faire tourner le système en sens contraire.

Dans l'Equilibre de plusieurs forces assujetties à tourner autour d'un axe fixe, on a trouvé pour condition d'Equilibre $N=0$, c.à.d que dans ce cas le système se réduit à un couple agissant suivant l'axe des $z$. Si le système pouvait glisser sur l'axe des $z$ la cond$^{on}$ $N=0$ ne serait plus suffisante, on a vu qu'un système de forces pouvait toujours se ramener à une résultante R appliquée à l'origine, et à un couple qu'on peut toujours faire coincider avec l'axe des $z$ et dont les forces agissent normalement à l'axe, or, si le couple tend à glisser sur l'axe, ce n'est que la verta de la force R. pour qu'il y ait Equilibre, il faut que cette résultante R soit normale à l'axe ou que $z=0$ donc

$$N=0,\ z=0$$

sont alors les conditions d'Equilibre.

Equilibre de plusieurs points invariables, qui peuvent glisser sur un plan fixe. Si $P, P', P''$... sont les forces

$X, Y, Z; L, M, N$ ..... les proj$^{ons}$ sur les axes on peut les remplacer par ces deux systèmes

$0, 0, z, L, M, 0$

$X, Y, 0, 0, 0, N.$

le 1er peut se réduire à une force parallèle à l'axe des z et le 2d à une force située sur le plan des xy. or le 1er système ne peut produire aucun effet sur le système il suffit donc pour l'Equilibre que les forces situées sur xy aient une résultante nulle ou que

$$X=0,\quad Y=0,\quad N=0.$$

s'il y avait pour condon dans l'Equilibre des forces qui agissent sur le plan des xy, qu'il faut que le système autour du point o il suffirait pour les condon d'Equilibre de l'Eqon

$$N=0.$$

on voit de plus que la force parallèle à l'axe des z qui agit normalement au plan des xy, ne doit pas surpasser ~~l'effort~~ le poids que peut supporter le système.

## Equilibre des forces parallèles

Soient $P,\ P',\ P''\ldots$ des forces parallèles

$$\left.\begin{matrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{matrix}\right\}\ \text{leurs points d'appon}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{matrix}\right\}\ \text{leurs angles avec les axes.}$$

On peut d'abord trouver la résultante de ce système en remarqt qu'ici $\cos\alpha = \pm\cos\alpha' = \pm\cos\alpha''\ldots$ et de même des autres

donc $\cancel{X=}\ X = P\cos\alpha \pm P'\cos\alpha \pm P''\cos\alpha$

d'où

$$X = (P \pm P' \pm P'' \pm \dots) \cos\alpha$$
$$Y = (P \pm P' \pm P'' \pm \dots) \cos\beta$$
$$Z = (P \pm P' \pm P'' \pm \dots) \cos\gamma$$

on trouvera de même

$$L = P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(\pm y'\cos\gamma \mp z'\cos\beta) \dots$$

qu'on peut écrire —

$$L = (Py \pm P'y' \pm P''y'' \dots)\cos\gamma - (Pz \pm P'z' \pm P''z'' \dots)\cos\beta$$
$$M = (Pz \pm P'z' \pm P''z'' \dots)\cos\alpha - (Px \pm P'x' \dots)\cos\gamma$$
$$N = (Px \pm P'x' \pm P''x'' \dots)\cos\beta - (Py \pm P'y' \pm P''y'' \dots)\cos\alpha$$

Si l'on veut avoir la valeur de la résultante, il suffit de faire la somme des carrés de chacun des membres des 3 Eqns en X, Y, Z ... on a —

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = (P \pm P' \pm P'' \dots)^2$$

$$R = P \pm P' \pm P'' \dots$$

On voit donc que la résultante est égale à la somme algébrique des composantes, et qu'elles agissent dans le sens des forces qui ajoutées donnent la plus grande somme.

Les 3 Eqns en L, M, N. donnent lieu à une Eqn de condition, car en les multipliant par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, la $2^{de}$ ... on a —

$$L\cos\alpha + M\cos\beta + N\cos\gamma = 0.$$

qui donne

$$LX + LY + NZ = 0.$$

Donc ce système de forces est réductible à une force unique ou à un couple.

La résultante sera égale à la force principale, pour connaître sa Dion j'appelle $\xi$ $\eta$ $\zeta$ les coord^es du point d'app^on on aura R étant la résultante

$$L = (R\eta\cos\gamma - R\zeta\cos\beta)$$
$$M = R(\zeta\cos\alpha - \xi\cos\gamma)$$
$$N = R(\xi\cos\beta - \eta\cos\alpha)$$

on a donc au moyen de ces trois Eq^ons les projections de la direction de la résultante. ~~identifiant~~ égalant ces Eq^ons avec les valeurs des ~~Eq^ons~~ coordonnées et identif^t on a

$$R\xi = Px + P'x' + P''x'' \text{ ——}$$
$$(A)\quad R\eta = Py + P'y' + P''y'' \text{ ——}$$
$$R\zeta = Pz + P'z' + P''z'' \text{ ——}$$

on voit donc que les valeurs des coord^es du point d'app^on de la résultante sont indép^t des angles $\alpha, \beta, \gamma$ on appelle le point centre des forces, il reste donc le même qq^e soit la Direction des forces parallèles. Les valeurs de ces coordonnées sont

$$\xi = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \text{ ——}}{P + P' + P'' + \text{ ——}}$$
$$\eta = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \text{ ——}}{P + P' + P'' + \text{ ——}}$$
$$\zeta = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + \text{ ——}}{P + P' + P'' + \text{ ——}}$$

si $x = 0$ $y = 0$ $z = 0$, on a un couple et alors le centre des forces parallèles est rejeté à l'infini.

pour énoncer la loi donnée par 2ème Eqon (A). on — est convenu d'appeler moment d'une force par rapport à un plan le produit de cette force par la distance de — son point d'appon par rapport au plan. on énonce ainsi les Eqons (A). la somme des moments des forces parallèles est égale au moment de la résultante appliquée au centre des forces parallèles.

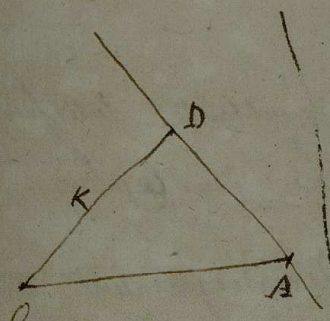
---

Si les points d'application des diverses forces que l'on — considère sont dans le même plan, le point d'application de la résultante y est aussi situé. Si les forces parallèles sont dans un plan parallèle à zy, ou plus simplement dans — le plan zy lui-même

$$x=0,\quad x'=0,\quad x''=0 \text{ ---- Donc } R\xi=0 \text{ ... d'où } \xi=0.$$

or le plan des zy est pqc, donc le centre des forces parallèles se trouve — toujours situé sur le plan qui renferme les points d'appon des forces.

on peut faire voir ce théorème autrement.




je suppose que les points d'appons forment un plan situé d'une manière pqc de l'origine. j'abaisse une perpre sur le plan. soit OA la distance de l'origine au point d'appon A. l, m, n les angles de la perpre OD avec les axes des coord. x, y, z les coordes du point d'appon A. les cos. de ces angles sont, puisque $OA=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{y}{\sqrt{\phantom{x^2+y^2+z^2}}},\quad \frac{z}{\sqrt{\phantom{x^2+y^2+z^2}}}$$

$$\cos AOD = \frac{x\cos l + y\cos m + z\cos n}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

et par conséquent

$$(1) \quad K = x\cos l + y\cos m + z\cos n$$

regardant donc $x, y, z$ comme les coord^ées d'un point, qq^e du plan qui renferme les points d'app^on l'Eq^on (1) est l'Eq^on de ce plan.

On a trouvé précédemment pour les coord^ées du point d'app^on de la résultante

$$R\xi = Px \pm P'x' \pm P''x'' \pm \ldots$$

$$R\eta = Py \pm P'y' \pm \ldots$$

$$R\zeta = Pz \pm P'z' \pm \ldots$$

je multiplie la 1^ère Eq^on par $\cos l$, la 2^de par $\cos m$, la 3^e par $\cos n$, et je fais la somme, j'aurai

$$R(\xi\cos l + \eta\cos m + \zeta\cos n) = (P \pm P' \pm P'' \pm \ldots)K.$$

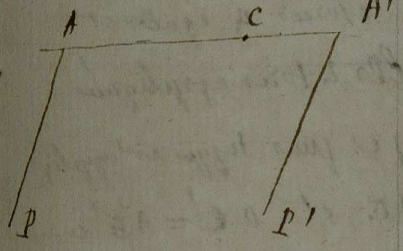
donc

$$\xi\cos l + \eta\cos m + \zeta\cos n = K.$$

Les coord^es du point d'app^on de la résultante satisfont donc à l'Eq^on du plan, il est situé dans ce plan.

Si les points d'app^ons de diverses paralèles se trouvent ~~appliqu~~ sur une droite, comme l'on peut considérer cette droite comme l'int^on de deux plans, et que par ce qu'on vient de dire, le point d'app^on de la résultante doit être situé sur chacun de ces deux plans, on voit qu'il est situé sur la droite qui unit les points d'app^on

Avant de considérer plusieurs forces appliquées aux divers points d'une droite, examinons le cas de deux forces parallèles. Si P et P' sont les forces données, A, A' les points d'appᵘ




$$R = P + P'.$$

$$(P+P')\,\xi = Px + P'x'$$

$$(P+P')\,\eta = Py + P'y'$$

$$(P+P')\,\zeta = Pz + P'z'$$

qu'on peut écrire,

$$P(\xi - x) = P'(x' - \xi)$$

$$P(\eta - y) = P'(y' - \eta)$$

$$P(\zeta - z) = P'(z' - \zeta)$$

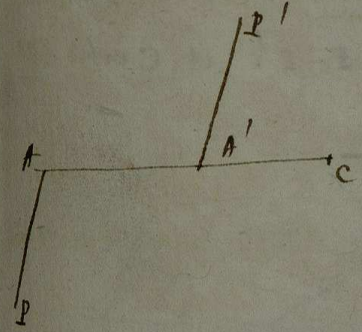
d'où

$$\frac{\xi - x}{x' - \xi} = \frac{\eta - y}{y' - \eta} = \frac{\zeta - z}{z' - \zeta} = \frac{P'}{P} = \frac{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}}{\sqrt{(x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 + (z'-\zeta)^2}} = \frac{AC}{A'C}.$$

De l'égalité des trois 1ères fractions on conclut que le point d'appᵘ de la résultante se trouve sur la droite qui joint les points d'appᵘ A et A' des forces P, P'. et de l'égalité

$$\frac{P'}{P} = \frac{AC}{A'C}.$$

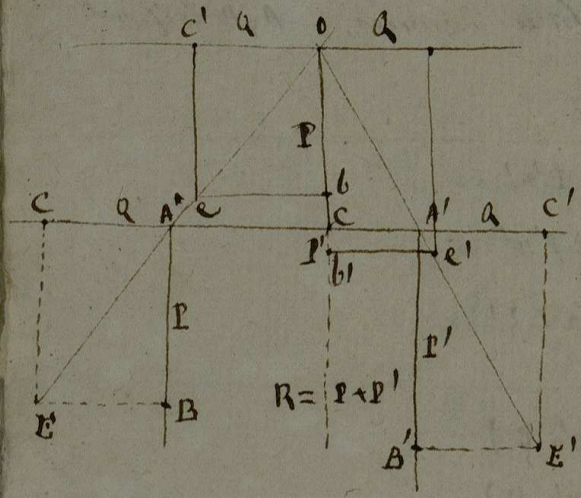
on conclut que ce point d'appᵘ de la résultante se trouve en un point C qui partage la droite AA' en parties réciproquement proportionnelles aux forces.




Si l'on avait pris les forces dans un sens différent on aurait eu

$$\frac{\xi - x}{\xi - x'} = \frac{\eta - y}{\eta - y'} = \frac{\zeta - z}{\zeta - z'} = \frac{P'}{P} = \frac{AC}{A'C}.$$

Ce qui montre que le point C laisse les forces d'un même côté, et qu'il divise toujours la ligne en parties proportionnelles aux forces.

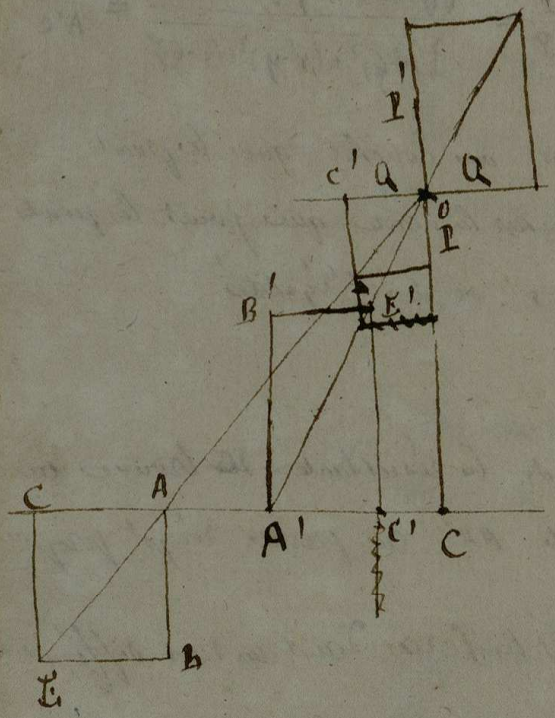



On peut démontrer géométriquement que

$$\frac{AC}{A'c} = \frac{P'}{P}.$$

Aux points A et A' j'applique 2 forces q égales et de direct[on] opposées, je compose ces 2 forces appliquées en A et A' en 2 AE, A'E'. que je puis supposer appliqués en O. je décompose Oc = AE, et Oc' = A'E' en 4 forces q et q qui se détruisent et ~~supposé~~ Ob, Ob' égales à P, P' qui s'ajoutent. donc R = P + P' et agit en C. on peut démontrer que c est tel que $\frac{AC}{A'c} = \frac{P'}{P}$. car les deux triangles OAC, EAB semblables donnent

$$AC \times P = Oc \times q.$$




de même les deux triangles OCA', A'B'E' donnent

$$A'c \times P' = Oc \times q.$$

donc

$$AC \times P = A'c \times P'. \quad \text{C. q. F. D.}$$

Si les deux forces n'étaient pas dirigées dans le même sens, on aurait la même prop[on]

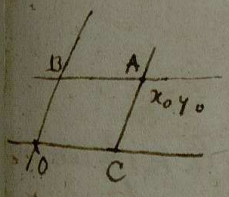
On ferait la construct[on] comme il est indiqué à coté et l'on trouve R = P - P'. et C est le point d'app[on]. _____.

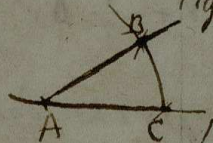
# De la quadrature des surfaces.

Avant de passer à la détermination des centres de gravité des surfaces, il faut établir leurs quadratures.

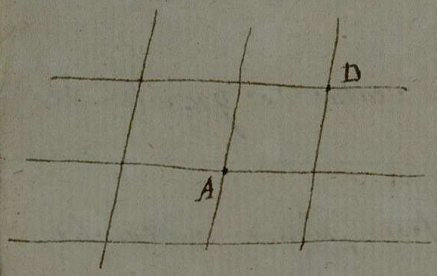
Je suppose que sur une surface plane, ou courbe, on ait tracé une courbe qui embrasse une aire que l'on veut déterminer, ou appréciée par $x, y$ les coord$^{es}$ d'un point q$^{q}$ de cette courbe, rapportées à un système voulu oblique, voulu rectang$^{r}$, voulu polaire, enfin à un système q$^{q}$ de coordonnées. L'Eq$^{on}$ d'une courbe tracée sur une surface sera déterminée quand on connaîtra la relation $f(x,y)=0$ qui lie les coord$^{es}$ $x,y$ d'un point q$^{q}$. Dans certains cas particuliers une ligne pourra être représentée par $y=$ const. ou $x=$ const. on l'appelle alors ligne de 1ère espèce. Dans tous les systèmes possibles dans un système de coord$^{es}$ rectilignes, les lignes de 1ère espèce seront parallèles aux axes, dans un système polaire, elles seront une droite qui fait un angle constant et un cercle. Généralement on aura $f(x,y)=0$ qui représente une ligne q$^{q}$.

À présent que nous savons ce que nous entendons par lignes de 1ère espèce et par une ligne q$^{q}$. On nomme origine des coordonnées un point $x=0$ $y=0$ et aussi les lignes de 1ère espèce qui passent par l'origine.




Dans les coord$^{es}$ rectilignes — ou a l'origine. AB, AC — sont des lignes de 1ère espèce. Dans les coord$^{es}$ polaires — A et AC sont les données du système et AB, BC sont les lignes de 1ère espèce.



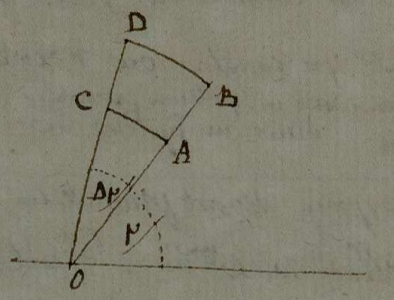

Cela posé. Pour un point A dont les coord. sont $x, y$. je mène deux lignes de 1re espèce (dont les coord sont rectil.). j'attribue à $x$ et $y$ des accroiss très petits $\Delta x$, $\Delta y$. — $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ seront les coordonnées d'un nouveau point D. par lequel je fais passer aussi deux lignes de 1re espèce. Entre ces 4 lignes sera comprise une aire qui se réduira à 0 — Quand $\Delta x$, $\Delta y$ deviendront nuls, et cependant

$$\frac{a}{\Delta x . \Delta y}$$

Converge vers une limite fixe quand les coord$^{es}$ sont rectilignes Car alors dans ce cas, $a = \Delta x . \Delta y \sin \alpha$ ($\alpha$ étant l'angle des axes) d'où de là

$$\frac{a}{\Delta x \Delta y} = \sin \alpha .$$

et $\sin \alpha$ reste le même q$^{el}$ soit les valeurs qu'on attribue à $\Delta x$, $\Delta y$. Dans les coord$^{es}$ polaires on a —




$y = r$, $x = \rho$. coord$^{es}$ de A.

$y = r + \Delta r$ $y = \rho + \Delta \rho$ coord$^{es}$ de D.

et surf. ABDC $= a =$ sect OAC − sect OBD.

or $\text{arc AC} = r . \Delta \rho$.

$\text{arc BD} = (r + \Delta r) \Delta \rho$.

donc $a = \frac{1}{2} ((r + \Delta r)^2 - r^2) \Delta \rho$. d'où

$$\frac{a}{\Delta x \Delta y} = \frac{a}{\Delta \rho \Delta r} = r + \frac{1}{2} \Delta r .$$

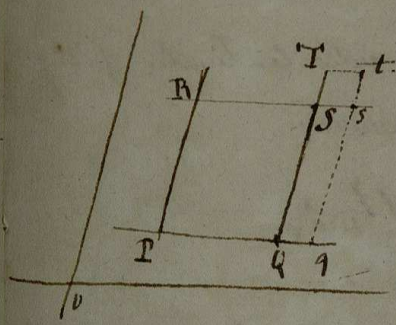
dans les coord$^{es}$ polaires le rapport de la surface a au produit des accroiss des variables converge vers une —

limite variable avec $x$, on peut donc dire généralement que ce rapport a pour limite une fon

$$u = F(x,y).$$

Ch. l'on voit que $u$ sera déterminée toutes les fois que le Système de coord$^{es}$ que l'on emploie le sera.

Connaissant la limite vers laquelle converge ce rapport proposons-nous trouver la surface comprise entre 4 lignes de 1$^{ère}$ espèce.




Soit P un point dont les coord$^{es}$ sont $x_0, y_0$, S un autre point — $(x,y)$. je veux calculer l'aire RSPQ comprise entre les 4 lignes de 1$^{ère}$ espèce menées par P et S. il est clair que cette surface varie avec les coord$^{es}$ $x,y$ de S. elle est donc une certaine fon $\chi(x,y)$ de ces variables qu'il s'agit de déterminer. d'après la nature de cette f$^{on}$, on voit qu'elle devient nulle si l'une des deux variables devient $x_0$ ou $y_0$ donc

$$\chi(x,y_0) = 0, \qquad \chi(x_0,y) = 0.$$

Si je fais croître $x$ de $\Delta x$. la surface qui correspond à cet accroiss$^t$ sera

$$\Delta_x \chi(x,y).$$

Si je fais croître $y$ de $\Delta y$ on aura une nouvelle surface

$$\Delta_y \Delta_x \chi(x,y).$$

or cette dernière surface est précisément $\omega$ donc

$$\frac{\Delta_y \Delta_x \chi(x,y)}{\Delta y . \Delta x} = \frac{\omega}{\Delta y \, \Delta x}$$

Si l'on passe à la limite — le 2$^{d}$ membre devient

la fonction $u$ qui est connue dès que l'on connaît le système de coord$^{ées}$ et la limite du 1er membre est.

$$\frac{\partial_y \left( \frac{\partial_x \chi(x,y)}{\partial x} \right)}{\partial y}.$$

on a donc cette Eq$^{on}$

$$\frac{\partial_y \left( \frac{\partial_x \chi(x,y)}{\partial x} \right)}{\partial y} = u.$$

intégrant par rapport à $y$, mais entre les limites $y_0$ et $y$ pour faire disparaître la constante on aura

$$\frac{\partial_x \chi(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial_x \chi(x,y_0)}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} u\, dy.$$

or $\frac{\partial_x \chi(x,y_0)}{\partial x} = 0$ puisque $\chi(x,y_0) = 0$ qq$^e$ soit $x$.

donc on a

$$\frac{\partial_x \chi(x,y)}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} u\, dy.$$

intég$^t$ encore entre $x_0$ et $x$ et se rapp$^t$ que $\chi(x_0,y) = 0$

On a

$$\chi(x,y) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} u\, dy\, dx.$$

On voit que l'aire comprise entre 4 lignes de 1ère espèce sera connue toutes les fois que le système des coord$^{ées}$ le sera quand cela suffit pour connaître $u$.

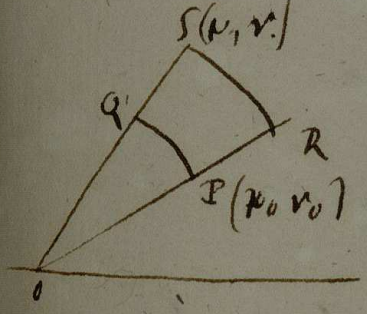
<u>Supposons les coord$^{ées}$ rectilignes</u> on a dans ce cas

$$\chi(x,y) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \sin\delta\, dy\, dx = \sin\delta\,(x-x_0)(y-y_0)$$

Supposons les coord^ées ~~[illegible]~~ rectangulaires

dans ce cas $u = r$ $p = x$, $r = y$. donc

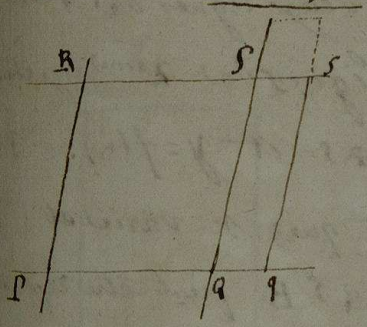
$$\chi(x,y) = \int_{p_0}^{p}\int_{r_0}^{r} r\,dr\,dp = \frac{1}{2}(p-p_0)(r^2 - r_0^2)$$




et en effet cette surface est celle comprise entre deux ~~[illegible]~~ OPQ, ORS.

---

1 S^e recon.




avant de passer à la Détermination d'une surface terminée par des lignes qq^es, il est utile de déterminer la valeur du rectangle QqSS correspondant à un accroissement de $x$ dans la surface $\chi(y,y)$.

On a trouvé précédemment,

$$\Delta_y \Delta_x \chi(x,y) = a$$

Divisant les deux membres par $\Delta y \Delta x$, on a à cause de

$$\lim \frac{a}{\Delta y\, \Delta x} = u.$$

Exp^on déterminée dans chaque système de coordonnées.

$$\frac{\Delta_y \Delta_x \chi(x,y)}{\Delta y \cdot \Delta x} = \frac{a}{\Delta y \cdot \Delta x} = u \pm \varepsilon$$

d'où

$$\frac{\Delta_y \left(\frac{\Delta_x \chi(x,y)}{\Delta x}\right)}{\Delta y} = u \pm \varepsilon.$$

intégrant on a

$$\frac{\Delta_x \chi(x,y)}{\Delta x} = \int_{y_0}^{y} (u \pm \varepsilon)\, dy$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\Delta_x \chi(x,y)}{\Delta x} = (1 \pm \varepsilon') \int_{y_0}^{y} u\, dy$$

valeur cherchée de la surface QqSS.

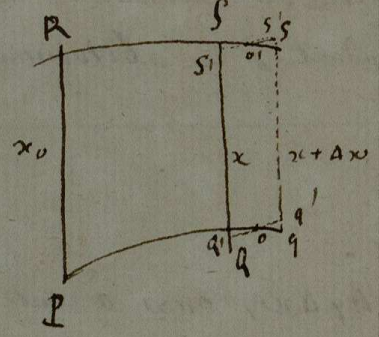
On voit que l'on a obtenu pour la surface PQRS —

$$\chi(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} u\,dy\,dx.$$

Si l'on remplaçait que x et y fussent des coordonnées fixes x, y. on aurait

$$\chi(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} u\,dy\,dx.$$

et $$\frac{\Delta_x \chi(x,y)}{\Delta x} = \int_{y_0}^{y} u\,dy.$$




Supposons actuellement la surface que l'on veut Evaluer terminée d'un côté par deux lignes de 1ère espèce et de l'autre par deux lignes de 2ème espèce, dont les équations sont $y = F(x)$ --- RS et $y = f(x)$ --- PQ.

Soit $x_0$ constant, et que x varie et devienne $x + \Delta x$. La surface PQSR peut être représentée par $\varphi(x)$. alors la surface QqsS comprise entre x, x+Δx et le prolongement Ss Qq des courbes données sera exprimée par $\Delta x\,\varphi(x)$ où on calculera cette 2de surface, en observant qu'à cause du grand rapprochement de x et de x+Δx, on peut remplacer les courbes Ss, Qq par deux lignes de 1ère espèce s's'', Q'q' qui avec x et x+Δx comprennent une surface s's'q'q' équivalente à QqsS.

J'appelle $y = f(x) \pm \varepsilon'$, l'ordonnée du point o et $y = F(x) \pm \varepsilon''$ celle du point o'. j'aurai d'après la valeur générale que l'on a trouvée ci dessus pour —

$\frac{\Delta_x \chi(x,y)}{\Delta x}$, —

$$\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \int_{f(x)\pm\varepsilon'}^{F(x)\pm\varepsilon''} (u \pm \varepsilon)$$

et passant aux limites on a

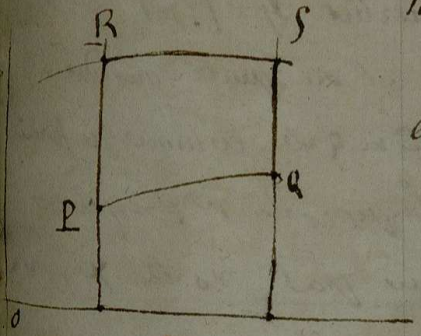
$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \int_{f(x)}^{F(x)} u\,dy.$$

intégrant il vient en représentant $f(x)$ par $y_0$ et $F(x)$ par $y$.

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} u\,dy\,dx.$$

Expon générale pour la valeur d'une surface terminée par deux lignes de 1re espèce et deux de 2de qq soit le système de coordonnées que l'on emploie.

1re appon de cette formule au cas où les coordonnées sont rectilignes et rectangulaires.




Soient $x = x_0$ et $x = X$ les deux lignes de 1re espèce, et $y_0$ et $y$ les ordonnées des 2 courbes PQ et RS on aura

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{y} dy\,dx = \int_{x_0}^{X} (y - y_0)\,dx.$$

ou

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{X} y\,dx - \int_{x_0}^{X} y_0\,dx$$

Expon analogue avec celles que l'on a trouvée dans le calcul intégral.

Si les coordonnées étaient obliques, on a

$$\varphi(x) = \sin\delta \int_{x_0}^{X} \{F(x) - f(x)\}\,dx.$$

On voit donc qu'en inclinant les ordes de l'angle $\delta$ on obtient une surface qui est avec la 1re dans le rapport de 1 à $\sin\delta$.

2de applion aux coordes polaires

On aura puisque $w = v$.

$$\varphi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \int_{f(r_0)}^{F(r)} v\, dr\, d\rho.$$

ou bien

$$\varphi(\rho) = \tfrac{1}{2} \int_{\rho_0}^{\rho} (F(r)^2 - f(r)^2)\, d\rho.$$

appelant $r_0$ et $R$ ces 2 fonctions, on a —

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} \int_{\rho_0}^{\rho} (R^2 - r^2)\, d\rho.$$

La formule ci-dessus

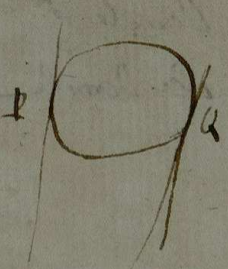
$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} u\, dy\, dx$$

J'applique au cas où l'Espace que on veut Evaluer — se trouve compris entre deux courbes $y = f(x)$ $y = F(x)$ qui se coupent en P et Q., car on peut considérer l'espace compris entre l'espace P m Q n comme renfermé entre P m Q, P n Q, et les 2 lignes de 1re espèce passant par P et Q, que je désigne par $x_0$ et $X$, on a

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{X} \int_{f(x)}^{F(x)} u\, dy\, dx.$$

Lorsque les coordonnées sont rectilignes $x_0$ et $X$ sont les abscisses des points d'intersection des 2 courbes données.

Pour avoir l'aire d'une courbe fermée il faut mener par deux points extrêmes deux lignes du 1er degré et aux points P et Q on peut concevoir la courbe séparée en deux, et l'on rentre ainsi dans la formule ci-dessus. ———



de formule précédente

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} u\,dy\,dx$$

peut servir à trouver la quantité de lumière L reçue par une surface donnée, connaissant l'intensité de la lumière. ou pour l'intensité de la lumière, nous prendrons la limite $\varphi$ du rapport $\frac{L}{a}$ (l étant la chaleur reçue par une surface infiniment petite a terminée par 4 lignes du 1er dégré dont deux passant par x, y, les 2 autres par $x+\Delta x$, $y+\Delta y$.).

pour trouver L, il faut trouver $\lim \frac{l}{\Delta x\,\Delta y}$ afin d'appliquer la formule, or $\lim \frac{l}{\Delta x \cdot \Delta y} = \lim \frac{l}{a} \cdot \frac{a}{\Delta x\,\Delta y} = \varphi \cdot u$.

donc

$$L = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \varphi u\,dy\,dx.$$

on la démontrerait directement en appliquant les mêmes raisonnements que pour l'Elévation d'une surface.

si l'on veut chercher la quantité de lumière reçue par une surface terminée d'un côté par deux ~~lignes~~ du 1er dégré de l'autre par deux du 2d il faudra aussi se servir de cette formule.

de même si pour la pression exercée par un liquide sur un petit Elément a d'une paroi d'un vase, on aura pour la pression totale du liquide sur cette paroi

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} pu\,dy\,dx.$$

---

Evaluation d'une partie de surface courbe.

soit $z = f(x,y)$ la surface donnée, je projette la portion de surface que je cherche, sur le plan des xy, et je rapporte

que les lignes qui la terminent ayant pour projection sur xy
des lignes $x = x_0$ $x = X$, $y = y_0$ $y = Y$ qui terminent
la proj$^{on}$ de cette portion de surface sur xy.

On conçoit que la projection sur un plan xy d'un petit
Elément de surface courbe dans l'espace varie en même temps
que cet Elément. Soit A la projection sur le plan des xy de
la surface B qu'on veut évaluer. A est comprise entre les 4
lignes $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$ $y = Y$ qui sont les proj$^{on}$ des lignes formant
le contour de B dans l'espace.

On trouvera A qui est une surface plane d'après l'Eq$^{on}$

$$A = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} dy\, dx.$$

(Les axes étant rectang$^{aux}$).

pour trouver B, à un point x, y, z de la surface je
conçois un petit Elément tracé, avec 4 lignes de 1ère espèce x, y
$x + \Delta x$, $y + \Delta y$. ou bien si je conçois le plan tangent à la surface au
point x, y, comme je ne considère qu'un petit Elément, il
pourra être considéré comme se confondant avec un Elément
égal dans le plan tangent. Soit b cet Elément a la projection
a l'angle du plan tangent avec xy, on aura $a = b \cos \theta$ ou
$b = a \sec \theta$. or a et b variant en même temps, le rapport
converge vers une limite finie a savoir $\frac{b}{a} = \sec \theta$.

dans ce cas $\lim \frac{b}{\Delta x \Delta y} = u \sec \theta$. or $u = 1$

par conséquent $B = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \sec \theta\, dy\, dx.$

il faut donc obtenir $\sec \theta$ inclinaison du plan tangent

à la surface $z = f(x,y)$.

où il suffit de différentier cette équation, il vient

$dz = p\,dx + q\,dy$. ou $p\,dx + q\,dy - dz = 0$.

en désignant par $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$.

et $\frac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos\theta$ d'où $\sec\theta = \sqrt{1+p^2+q^2}$.

Donc

$$B = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dy\, dx.$$

Appliquant cette formule aux différents cas qui peuvent se présenter, on obtient la valeur d'une surface courbe $qq'$.

toutes les fois que la surface formera un angle constant avec $xy$, il sera aisé d'obtenir $B$, car $\sec\theta$ se trouvera constante. soit par exemple proposé d'évaluer la surface convexe d'un cône droit qui a sa base sur $xy$. on voit qu'ici $\sec\theta$ est constant. et

$$B = \sec\theta . A.$$

où $A = \pi R^2$. donc $B = \sec\theta . \pi R^2 = \frac{1}{2} B \sec\theta (2\pi r)$ mais $R\sec\theta$ est égale à l'apothème, on retombe donc sur une règle connue de la surface convexe du cône.

## Des cubatures

on peut par les mêmes méthodes calculer le volume d'un cylindre à base $qq'$, terminé d'un côté par le plan des $xy$, de l'autre par un plan parallèle.

Soit V ce volume, il croîtra et décroîtra avec la base A du cylindre. Concevons que $z = h$ soit la hauteur du cylindre ou distance entre les deux plans parallèles. je suppose qu'on ait une infinité de volumes semblables à V qui composent V et ayant pour base l'élément $\omega$ formé par les 4 lignes du 1er degré $x, y, \Delta x, \Delta y$. ces petits volumes seront exprimés par $\omega h$. or $\lim \frac{\omega h}{\Delta x \Delta y} = h$. donc

$$V = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} h \, dy \, dx = h A$$

donc un cylindre droit est égal à la base par la hauteur.

Supposons que le cylindre soit terminé par deux surfaces qq. $z = z_0$ $z = Z$. pour connaître l'expression de ce volume, il faut déterminer la limite du rapport d'un volume semblable qui aurait $\omega$ pour base à l'expression $\Delta x \Delta y$, car $\omega h$ entre ainsi dans la formule trouvée. pour trouver ce rapport on conçoit que l'on remplace le volume ayant $\omega$ pour base par les deux surfaces $z = z_0$ $z = Z$ par le prisme équivalent ayant même hauteur et des bases situées sur des plans

$$z = z_0 \pm \varepsilon', \quad z = Z \pm \varepsilon''.$$

Le prisme équivalent est donc

$$\left\{ (Z \pm \varepsilon'') - (z_0 \pm \varepsilon') \right\} \omega = a (Z - z_0)(1 \pm \varepsilon).$$

donc $\lim \frac{a (Z - z_0)(1 \pm \varepsilon)}{\Delta x \Delta y} = Z - z_0$.

et par conséquent

$$V = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} (Z - z_0) \, dy \, dx = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{Z} dz \, dy \, dx.$$

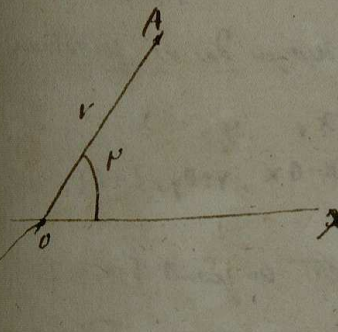
volume cherché

17ème Leçon

## Evaluation d'un volume terminé par des surfaces qqes

On appelle surfaces de 1ère espèce celles telles que $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, ... qui ne renferment qu'une variable dans tous les systèmes possibles, les surfaces de 2de espèce sont celles qui ne renferment que deux variables, enfin $f(x,y,z) = 0$ représente une surface de 3ème espèce.

(1) $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, sont les trois plans (les axes étant fixes.) qui déterminent un point, dans un système polaire ces trois Eqons représentent un cône, une sphère, et un plan; en effet, on détermine un point A dans l'espace, en prenant ox pour axe fixe, le point o pris sur cet axe pour origine, le rayon vecteur r faisant un angle p avec l'axe ox, et q désignant l'angle du plan Aox avec le plan des xy qui passe par ox. Les Eqons (1) seront ici $p = p_0$ $q = q_0$ $r = r_0$. où $q_0$ est l'angle que OA fait avec xy, donc tant que cet angle restera fixe, le point A ne pourra varier que dans le plan Aox. $q_0$ fixe donc la position du plan Aox. $r = r_0$ exprime qu'il est situé sur la sphère qui a $r_0$ pour rayon et o pour centre, enfin $p = p_0$ indique que A est situé sur un cône dont ox est l'axe, o le sommet, et OA la génératrice.




On a appelé $f(x,y) = 0$ $f(x,z) = 0$ $f(y,z) = 0$ des surfaces de 2de espèce, si l'on y joint $z = 0$ ou aura les bases de ces surfaces sur xy.

Cela posé: soit A un point x, y, z. B un —

point voisin $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$. je puis par chacun des points A et B faire passer trois surfaces de 1ère espèce. et l'on aura un volume V dont les dimensions ~~sont~~ très petites. Si les coord$^{es}$ étaient rectang$^{es}$ on a $V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. et $\frac{V}{\Delta x \Delta y \Delta z} = 1$ mais dans un système qq$^{e}$, on peut dire que l'on aurait pour $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$. Il sera donc une fonction de $x, y, z, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ et généralement on aura —

$$\lim \frac{V}{\Delta x \Delta y \Delta z} = f(x,y,z) = w.$$

parceque V s'évanouissant avec $\Delta x \Delta y \Delta z$, on aura ordinairement un rapport autre que 0.

Voyons comment de la connaissance de w on peut déduire un volume terminé par un contour qq$^{e}$, et avant comment on peut déterminer, par le moyen de w un volume compris entre 6 surfaces de 1$^{ère}$ espèce $\begin{cases} x, y, z, \\ x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z \end{cases}$

Soit un point P $x_0 y_0 z_0$ fixe, et un point S $x, y, z$. Si par P et S je mène 6 surfaces de 1ère espèce elles comprendront un volume que je puis désigner par $\psi(x,y,z)$.

Ainsi le volume compris entre $\begin{cases} x, y, z \\ x_0\ y_0\ z_0 \end{cases}$ sera représenté par $\{\psi(x,y,z)$

faisant croître $x_0$ de $\Delta x$ et nommant une 2$^{de}$ fonction du 1$^{er}$ degré, le volume compris entre — — — $\begin{cases} x, y_0 z_0 \\ x+\Delta x, y, z \end{cases}$ sera représenté par $\{\Delta_x \psi(x,y,z)$

faisant croître $x$ de $\Delta x$ et $y$ de $\Delta x$, le vol. compris entre $\begin{cases} x, y, z_0 \\ x+\Delta x, y+\Delta y, z \end{cases}$ aura pour expression $\Delta y \Delta x \psi(x,y,z)$

faisant croître aussi $z$ ou aura les volumes compris entre les 6 surfaces $\begin{cases} x, y, z \\ x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z \end{cases}$ exprimé par $\Delta z \Delta y \Delta x \psi(x,y,z)$

on aura donc pour le volume cherché

$$\Delta z \Delta y \Delta x \psi(x,y,z) = V.$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta z \Delta y \Delta x \psi(x,y,z)}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{V}{\Delta x \Delta y \Delta z}.$$

passant aux limites, on a —

$$\frac{\partial^3 \psi(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} = u.$$

Si pour l'intégrale Eq on remarque que l'on a toujours

$$\psi(x,y,z_0) = 0$$
$$\psi(x,y_0,z) = 0$$
$$\psi(x_0,y,z) = 0$$

on aura

$$\psi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} u \, dz \, dy \, dx.$$

et si $u = 1$.

$$\psi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} dz \, dy \, dx$$ — Exp^on

que l'on a déjà trouvée.

on peut déduire de là le volume $\Delta y \Delta x \omega \psi(x,y,z)$ compris entre les 6 surfaces de 1ère espèce $x$, $y$, $z_0$, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z$ effectué ou a —

$$\Delta x \Delta y \Delta z \, \psi(x,y,z) = V.$$

Divt par $\Delta z$ les deux membres, on a —

$$\frac{\Delta_x^x \Delta_y \Delta_z \psi(x,y,z)}{\Delta z} = \frac{V}{\Delta z}.$$

Or il vient que $\frac{V}{\Delta x \Delta y \Delta z} = (1+\varepsilon)\omega$. d'où $\frac{V}{\Delta z} = (1+\varepsilon)\omega \cdot \Delta x \Delta y$.

Donc —

$$\frac{\Delta_x^x \Delta_y \Delta_z \psi(x,y,z)}{\Delta z} = (1 \pm \varepsilon) u \, \Delta x \Delta y.$$

intégrant il vient —

$$\Delta_y \Delta z \, \psi(x,y,z) = (1 \pm \varepsilon) \Delta x \Delta y \int_{z_0}^{z} u \, dz.$$

Si les deux surfaces de 1ère espèce $z_0$ et $z$ devenaient des surfaces $z_0, z$ on peut obtenir de même le volume compris entre les 6 surfaces

$$x, y, z_0, x+\Delta x, y+\Delta y, z.$$

il suffit de concevoir par un point $z = z_0 \pm \varepsilon'$ de la 1re surface $z_0$ une surface de 1ère espèce, et par un autre point $z = z \pm \varepsilon''$ de la 2e surface $z$ une autre surface de 1ère espèce qui ne changeant en rien le volume cherché, on aura alors — un volume Equivalent compris entre 6 surfaces de 1re espèce

$$x, y, z_0 \pm \varepsilon' \quad x+\Delta x, y+\Delta y, z \pm \varepsilon''$$

et dans ce cas —

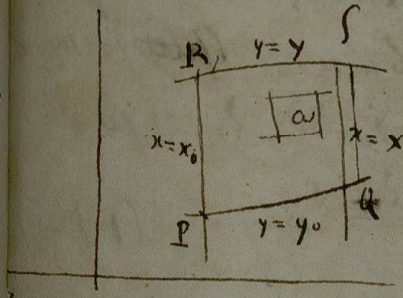
$$\Delta y \Delta x \, \psi(x,y,z) = \Delta x \Delta y (1+\varepsilon) \int_{z_0 \pm \varepsilon'}^{z \pm \varepsilon''} u \, dz. \quad (1)$$

La formule (1) me représente un vol. compris entre 2 surf. de 1ère espèce et 2 de 3e. on peut concevoir que ce volume soit le même que celui qui serait compris sous 2 de 1re 2 de 2de et 2 de 3e. car

et en passant aux limites il viendra

$$\Delta x \Delta y \int_{z_0}^{z} u\, dz.$$

Cela posé : proposons de calculer un volume compris d'une part entre deux surfaces de 1ère esp. de l'autre entre deux surfaces de 2de espèce PQ, RS. et terminé par deux surfaces $z_0$ $z$ de 3e espèce.




Soient $x_0$, $x$ les projetés sur xy des 2 surfaces de 1ère espèce, PQ et RS celles des surfaces de 2de espèce sur le même plan. PQSR sera donc la projection du solide cherché sur xy (axes rectangulaires)

je considère une petite surface a comprise entre $x, x+\Delta x, y, y+\Delta y$ sur le plan des xy. et je la regarde comme la base d'un volume intérieur au volume cherché, on aura pour l'expression de ce petit volume

$$\Delta x \Delta y (1 \pm \varepsilon) \int_{z_0}^{z} u\, dz.$$

or ce petit volume croît et décroît avec a, on peut donc répéter ici les raisonnements que nous avons faits plus haut. et trouver que l'on a —

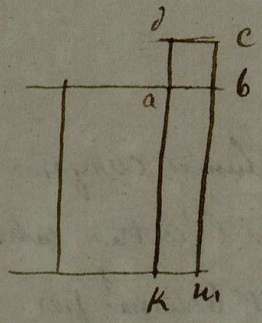
$$\Delta x \Delta y\, V = \Delta x \Delta y (1 \pm \varepsilon) \int_{z_0}^{z} u\, dz$$

d'où

$$\frac{\Delta x \Delta y\, V}{\Delta x \Delta y} = (1 \pm \varepsilon) \int_{z_0}^{z} u\, dz$$

passant aux limites et intégrant on a —

$$V = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} u\, dz.$$



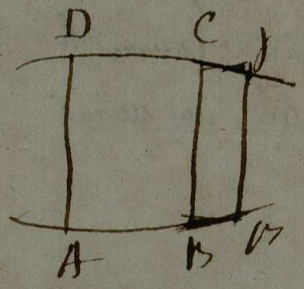

Pour trouver un vol. compris sous 2 surf. de 1re esp. 2 de 2e et 2 de 3e. on commence par démontrer que l'on a

$$\Delta y\, \Delta x\, X(x,y,z) = \Delta x\, \Delta y\, (1 \pm \varepsilon_1) \int_{z_0 \pm \varepsilon}^{z_0 \pm \varepsilon_1} u\, dz$$

pour le volume qui aurait pour base abcd et qui seraient compris les 4 surfaces de 1re espèce et 2 de 3eme.

On démontre ensuite en intégt cette Expon que le volume ayant pour base abmk, ~~que~~ je suppose terminé, du reste par les surfaces $z_0$ et $z_1$ a pour Expon

$$\Delta x\, (1 \pm \varepsilon_{11}) \int_{y_0}^{y} \int_{z_0 \pm \varepsilon}^{z \pm \varepsilon_1} \qquad (1)$$




cela posé on observe que le volume cherché ayant pour base ABCD. on peut faire croître $x$ de $\Delta x$ et qu'on aura pour l'acct de ce vol. $\Delta_x V$ qui aura pour base BBJC et toujours $z_0$ et $z$ pour surfaces supérieures. or ~~cette~~ l'Expon de $\Delta_x V$ sera absolt ~~celle~~ l'Expon (1) dans laquelle on aura mis pour $y_0$ et $y$ des lignes du 2d dégré $y_0 \pm \delta$. $y \pm \delta_1$ convenables on a donc

$$\Delta_x V = \Delta x (1 \pm \varepsilon_{11}) \int_{y_0 \pm \delta}^{y \pm \delta_1} \int_{z_0 \pm \varepsilon}^{z \pm \varepsilon_1} u\, dz\, dy$$

passt aux limites on a l'expon cherchée

$$\int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} dy\, dx = \frac{1}{3} + y^2$$

$$\int_0^1 (x^2+y^2)\, dx =$$

$$\int (x^2+y^2)\, dx = \int x^2\, dx + y^2 \int dx.$$

$$= \frac{x^3}{3} + y^2 x.$$

$$= \frac{1}{3} + y^2$$

$$\int_0^{x^2+y^2} \int_0^1 dx\, dy$$

$$\int_0^{x^2+y^2} dy \; t = x^2+y^2.$$

$$\int dy = y$$

$$\int_0^2 \int_0^1 y\, dy\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} \quad \frac{1}{2}$$

3e

# Suite des Cubatures.

On a trouvé précédemment que l'on avait dans tous les systèmes

$$V = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} w\, dz\, dy\, dx.$$

et il suffit de connaître $w$ dans les divers systèmes, or on a vu que

$$\frac{\partial^3 \psi(x,y,z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = w.$$

en coordonnées rectangulaires $\psi(x,y,z)$ représente un parallélépipède rectangle, on a

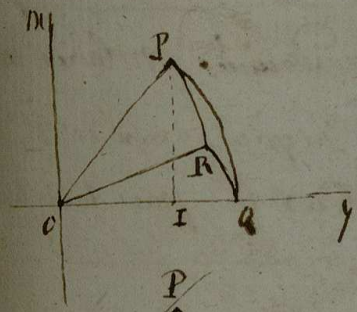
$$\psi(x,y,z) = xyz. \qquad \text{d'où} \quad w = 1.$$

en coord^es obliques, $\psi(x,y,z)$ représente un parallélépipède oblique d'où $\psi(x,y,z) = axyz.$

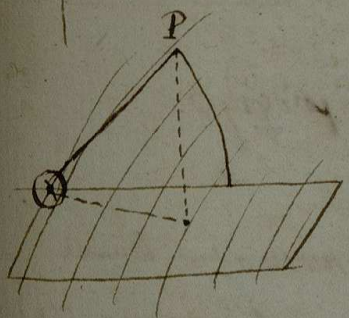
et $w = a.$

en coord^es polaires, pour avoir la valeur de $w$ il faut chercher l'expression de $\psi(x,y,z)$ ou $\psi(\rho,q,r)$ compris entre les 6 surfaces de 1ère espèce

$$0, \quad 0, \quad 0$$
$$\rho, \quad q, \quad r.$$




ici j'ai supposé un des points à l'origine, et le 2e point P ayant pour coord^es $\rho, q, r$. le volume $\psi(\rho,q,r)$ se trouve donc compris entre les deux plans $xy$, $ORQ$ déterminés par $o$, et $q$ qui exprime l'angle que $ORQ$ fait avec le plan fixe $xy$ représenté lui-même par $q = o$. Enfin $\psi(\rho,q,r)$ se trouve terminé à la surface de Sphère $r$, et aussi à la surface conique $p\pi$.



pour trouver cette volume, j'observe qu'il forme une partie du secteur engendré par OSQ tournant autour de OX, de manière que le volume soit à celui du secteur, comme l'angle q est à 4 droits. reste donc à trouver le secteur de sphère engendré par OSQ. or

$$\text{Sect. sph. } OSQ = \tfrac{1}{3} R \cdot \text{zône } SQ.$$

$$\text{zône } SQ = 2\pi R \cdot IQ. \quad \text{or } IQ = R(1-\cos p).$$

donc $\text{Sect. sph. } OSQ = \tfrac{2}{3}\pi R^3(1-\cos p)$.

D'après ce que nous avons observé ci-dessus, on peut établir la prop^on

$$q : 2\pi :: x : \tfrac{2}{3}\pi R^3(1-\cos p).$$

d'où $x = \varphi(p,q,r) = \tfrac{\pi R^3}{3} q(1-\cos p)$.

mais $\dfrac{d^3\varphi(p,q,r)}{dx\,dy\,dz} = u$ donc ici, $u = R^2 \sin p$.

veut-on à présent déterminer en coordonnées polaires un Vol. terminé par deux surfaces de 1ère espèce, deux de 2de, deux de 3e? il ne faut que remplacer u par sa valeur dans la formule générale, et l'on a

$$V = \int_{p_0}^{P}\int_{q_0}^{Q}\int_{r_0}^{R} r^2 \sin p \, dp\,dq\,dr.$$

---

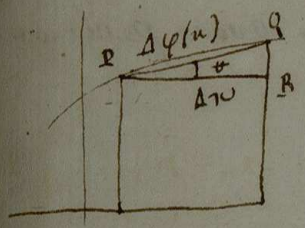
on peut toujours par la même méthode trouver la longueur d'un arc de courbe dont l'éq^on $y = \varphi(x)$ etc. donnée.

Ceffet, s désignant un élément de la courbe compris entre $x$ et $x+\Delta x$, on aura $\lim \frac{s}{\Delta x} = u = f(x)$. Or bien

$$\frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = (1 \pm \varepsilon) u.$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = u. \quad \text{intég}^t \quad \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} u\,dx.$$




exprime la longueur de la courbe entre $x_0$ et $x$, quand on connaît $u$, or quand les coord$^{es}$ sont rectangulaires

$$\frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \sec\theta = u$$

donc

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \sec\theta\,dx.$$

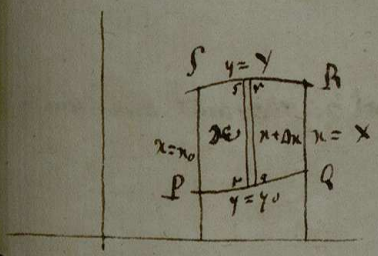
or $\sec\theta = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$ pour une courbe dans l'espace

donc

$$S = \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

19ème leçon

On peut par la méthode des infiniment petits parvenir aux résultats obtenus dans les leçons précédentes d'une manière rigoureuse.




Soit proposé de trouver la surface A comprise entre deux lignes de 1ère espèce et deux de 2de, rapportées à des coord$^{es}$ rectilignes, je considère PQRS comme la somme d'une infinité de petites surfaces pqrs comprise entre $x$ et $x+\Delta x$. or pqrs peut être regardée comme un petit rectangle ayant pour base $rs = y - y_0$ et pour hauteur $pq = \Delta x$. Ainsi $pqrs = (y - y_0)\Delta x$. ~~faisant la somme de toutes~~ ces petites surfaces, ou intégrant la valeur de l'une d'elles après avoir passé aux limites, on a

$$A = PQRS = \int_{x_0}^{x} (y - y_0)\,dx = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} dy\,dx$$

Valeur déja trouvée.

si l'on veut avoir le volume du cylindre qui aurait A pour base et H pour hauteur, il faut le considérer comme une suite de petits volumes ayant tous A pour base et $\Delta H$ pour hauteur, faire la somme de tous ces volumes ou bien intégrer la valeur de l'un d'eux après avoir passé aux limites

$$V = \int_0^H A \, dH = AH.$$

passons à la détermination d'un volume compris sous 2 surfaces de 1re espèce, deux de 2de, deux de 3ième

je suppose les axes rectangulaires, et PQRS la projon de cette surface sur xy. je considère le volume comme une suite de petits volumes ayant $pq = \Delta x$ pour hauteur et pour base une section faite dans le volume par un plan passant par pq parallèlement à yz. soit représenté par $\varphi(y,z)$ cette surface, on aura

$$\varphi(y,z)\,\Delta x$$

pour l'expon de ce petit volume, on en passant aux limites et intégrant, on a

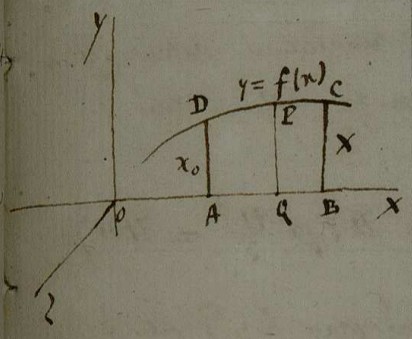
$$V = \int_{x_0}^{x} \varphi(y,z)\, dx.$$

or cette surface $\varphi(y,z)$ rentre dans le cas d'une surface comprise entre deux lignes de 1re espèce $z_0$ z et deux de 2de par conséquent $\varphi(y,z) = \int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} dz\, dy$. donc

$$V = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} dz\, dy\, dx$$

Expon déjà trouvée.

## Cubature des solides de révolution.

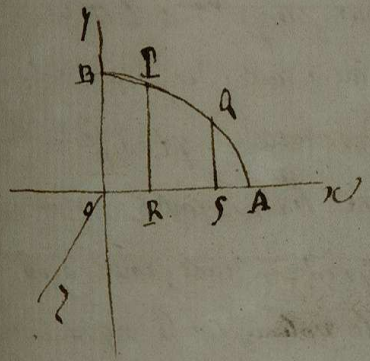



Soit $y = f(x)$ une courbe qui tourne autour de l'axe des $x$, et qu'on veuille trouver le volume engendré par ABCD ; il peut être considéré comme la somme d'une infinité de cercles décrits par $PQ = y = f(x)$. or ces cercles auront pour Exp$^{on}$ $\pi (f(x))^2$, un petit cylindre ayant $\Delta x$ pour hauteur et le cercle PQ pour base, serait

$$\Delta x . \pi (f(x))^2$$

passant aux limites et intégrant entre $x_0$ et $X$ on aura

$$V = \pi \int_{x_0}^{X} (f(x))^2 dx .$$




appon à la sphère. pour trouver le volume du segment de Sphère engendré par PQSR tournant autour de $Ox$. il suffit d'observer que l'Eqon du cercle OA est

$$x^2 + y^2 = r^2$$

d'où $y^2 = (f(x))^2 = r^2 - x^2$.

Mettant cette valeur dans l'Exp$^{on}$ générale de V, on a

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (r^2 - x^2) dx .$$

intégt on a

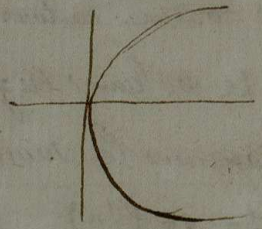
$$V = \pi r^2 (x - x_0) - \frac{1}{3} (x^3 - x_0^3)$$

Exp$^{on}$ du segment de sphère.

pour avoir le volume entier de la sphère, il faut prendre l'intégrale entre $+R$ et $-R$. et l'on a

$$V = \pi \int_{-R}^{+R} (r^2 - x^2) dx . = \frac{4}{3} \pi r^3$$

volume connu de la sphère. ———



Le volume d'un paraboloïde de révolution autour de l'axe des $x$ s'obtient en remplaçant $y^2$ par sa valeur tirée de la parabole génératrice $y^2 = 2px$.

$$V = \pi 2p \int_0^H x\,dx = \pi 2p \frac{H^2}{2} = \pi H^2 p.$$

Si c'est une surface conique engendrée par la droite $y = ax$ — on aura en remplaçant $y^2 = a^2x^2$

$$V = \pi \int_0^H a^2 x^2\,dx = \pi a^2 \int_0^H x^2\,dx = \pi a^2 \frac{H^3}{3}$$

or $a^2H^2 = R^2$ donc $V = \pi R^2 \cdot \frac{H}{3}$ — volume connu.

Pour avoir le volume d'une pyramide, je choisis le sommet pour origine pour plan des $yz$ un plan parallèle à la base, et pour axe des $x$ un plan perp$^{re}$ à cette base. On peut concevoir la pyramide comme une suite de petits solides ayant $dx$ pour hauteur et pour base des sections $\varphi(x)$ faites dans la pyramide par des plans parallèles à la base. $\varphi(x)\,dx$ exprime donc le solidité de ce petit parallélépipède, intégrant après avoir pris aux limites on aura pour le volume de la pyramide

$$V = \int_0^H \varphi(x)\,dx.$$

or $\varphi(x)$ étant une section parallèle à la base à une distance $x$, $H$ étant la hauteur de la pyramide, on a

$$\frac{\varphi(x)}{B} = \frac{x^2}{H^2} \quad \text{d'où} \quad \varphi(x) = \frac{Bx^2}{H^2}$$

donc $$V = \frac{B}{H^2} \int_0^H x^2\,dx = \frac{B}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{BH}{3}$$

Volume connu de la pyramide.

Il est certains cas où l'on peut obtenir facilement le volume compris sous une surface. Si l'Eq^on de cette surface est de la forme

$$(1)\quad f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = 0.$$

en la comparant avec la surface, dont l'Eq^on est

$$(2)\quad f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = 0$$

on voit en appliquant la formule pour trouver le volume

$$V = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} dz\, dy\, dx.$$

que puisque $\frac{z}{c} = z_0$ écrivant la valeur de $z$ tirée de la 2^de surface, le volume de la 1^re surface sera égal à celui de la 2^de multiplié par $c$. il en serait de même pour $a$, et $b$ donc en comparant (1) avec l'Eq^on

$$f(x, y, z) = 0.$$

dont le volume est $V'$, celui de (1) étant $V$ on aura

$$V = a.b.c\ V'.$$

<u>app^on à l'Ellipsoïde.</u>

soit $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$

un Ellipsoïde dont je représente le volume par $V$. et par $V'$ le volume d'une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. on aura

$$V = abc.\ V'.$$

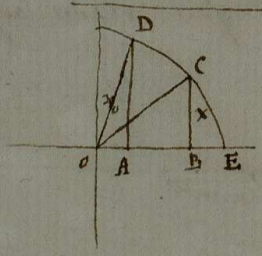
or $V' = \frac{4}{3}\pi$. donc le volume de cet Ellipsoïde est $\frac{4}{3}\pi abc$.

La même remarque a lieu pour les surfaces de la forme $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 0$ qui sont égales à $f(x, y) = 0$ multipliée par $ab$.

<u>app^on à l'Ellipse</u> $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. — la surface $A$ est égale à celle du cercle $\pi$ par $ab$ donc —

$$A = \pi ab.$$

20ème Leçon.




Soit proposé de trouver l'aire A d'un segment de cercle ABCD. $x^2+y^2=r^2$ étant l'Eqn de ce cercle, et $x_0$, x les ordonnées extrêmes. on sait que

$$A = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} dy\, dx.$$

or dans cet exemple $y = \sqrt{r^2-x^2}$ et $y_0 = 0$ donc

$$A = \int_{x_0}^{x} \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\, dx = \int_{x_0}^{x} \sqrt{r^2-x^2}\, dx.$$

pour intégrer $\int \sqrt{r^2-x^2}\, dx$ je pose $\sqrt{r^2-x^2} = tx$ et intégrant par parties, on a

$$\int tx\, dx = \frac{tx^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\, dt. = \frac{tx^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{r^2\, dt}{t^2+1}.$$

puisque l'on peut tirer de l'Eqn ci-dessus $x^2 = \frac{r^2}{1+t^2}$.

donc

$$\int tx\, dx = \frac{tx^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc\,tang} t.$$

remplaçant t par sa valeur et prenant cette intégrale entre $x_0$ et x. on a

$$A = \frac{1}{2}(xy - x_0y_0) + \frac{1}{2}R^2\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tang}\frac{y_0}{x_0}\right).$$

Si l'on examine quelles sont les surfaces que chacun de ces termes représente on trouve que le dernier représente ODE − OCE = = ODC et $\frac{1}{2}xy = OCB$, $\frac{1}{2}x_0y_0 = ODA$.

donc $A = ODC + OCB - ODA = DABC$.

Pour calculer l'aire d'une hyperbole Equilatère $y^2 - x^2 = R^2$ entre les lignes $x_0$ et $x_1$ je pose comme précédemment,

$$A = \int_{x_0}^{x} \sqrt{R^2+x^2}\, dx.$$

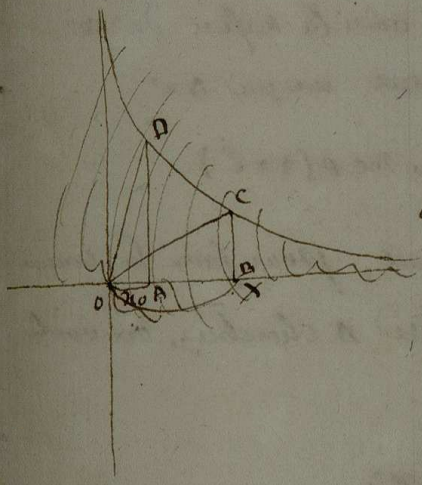
je pose $\sqrt{R^2+x^2} = tx$ et j'ai à chercher $\int tx\,dx$

$$\int tx\,dx = \frac{1}{2}tx^2 - \frac{1}{2}\int x^2\,dt.$$

or $x^2 = \frac{R^2}{t^2-1}$ on a donc à trouver

$$\int \frac{R^2\,dt}{t^2-1} = R^2\int\frac{dt}{(t+1)(t-1)} = \frac{R^2}{2}\left(\int\frac{1}{t-1}\,dt - \int\frac{1}{t+1}\,dt\right)$$

d'où $\int\frac{R^2\,dt}{t^2-1} = \frac{R^2}{2}\left(l(t-1) - l(t+1)\right) = \frac{R^2}{2}\,l.\frac{\sqrt{R^2+x^2}-x}{\sqrt{R^2+x^2}+x}$




on a donc

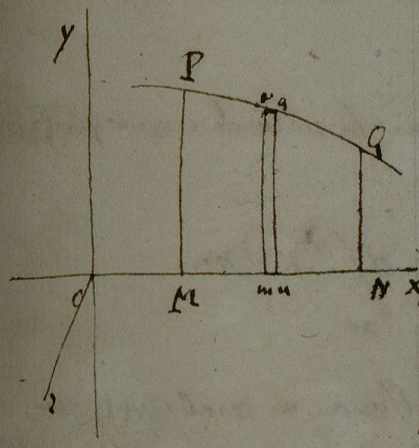
$$\int\sqrt{R^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{R^2+x^2} - \frac{1}{4}R^2\,l.\frac{\sqrt{R^2+x^2}-x}{\sqrt{R^2+x^2}+y}.$$

prenant cette intégrale entre les limites $x_0$ et $X$, on aura

$$A = \frac{1}{2}(Xy - x_0y_0) + \frac{1}{4}R^2\left(l.\frac{y-X}{y+X} + l.\frac{y_0-x_0}{y_0+x_0}\right)$$

sur la figure $A = ABCD = ODC + OCB - ODA$.

ainsi le dernier facteur exprime la valeur de l'espace ODC.




il faut à présent chercher l'aire d'une surface de révolution engendrée par une courbe PQ, dont on connait l'Eq^on $y=f(x)$, tournant autour de OX. je considère la surface engendrée par une suite d'Eléments pq tracés sur PQ tournant autour de OX, or pq étant un arc de courbe très petit, peut être à très peu près considéré égal à la corde pq. la surface cherchée sera donc engendrée par les apothèmes pq d'une suite de trapèzes infiniments petits mnqp. or la surface décrite par pq dans le trapèze mnqp est exprimée par

$$\frac{\text{circ. } nq + \text{circ } pm}{2}\cdot pq.$$

ainsi si ~~qm = y, pm = z~~ $qm = y = f(x)$. $pm = f(x+\Delta x)$. et l'on aura pour la surface décrite par l'apothème de ce trapèze

$$2\pi\left(\frac{f(x)+f(x+\Delta x)}{2}\right).pq.$$

or la corde pq est égale à mm multiplié par $\sec\theta$.
en appellant $\theta$ l'angle que fait la tangente en m avec ox
parceque pour un petit élément pq la tangente en m se
confond sensiblement avec la corde. ainsi la surface de ce
petit cône tronqué sera, en représentant mn par $\Delta x$

$$2\pi\left(f(x)+\frac{f(x+\Delta x)}{2}\right)\cdot\Delta x \sec\theta(1+\varepsilon).$$

en passant aux limites, et en intégrant, pour faire la somme
de toutes ces surfaces, on trouve l'aire A cherchée, on voit
que $\frac{f(x)+f(x+\Delta x)}{2}=f(x)$. donc

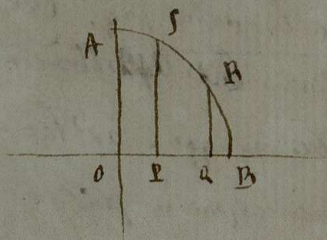
$$A=\int_{x_0}^{x} 2\pi f(x)\sec\theta\,dx.$$

on peut mettre cette formule générale sous une autre forme
en observant que

$$\sec\theta=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{et que la normale en } m \text{ est } y\sqrt{1+\frac{dx}{dy}}=v$$

ce alors la valeur ci dessus devient

$$A=\int_{x_0}^{x} 2\pi.\,v\,dx=2\pi\int_{x_0}^{x} v\,dx.$$




application. à la sphère. si l'on a un cercle AB qui
tourne autour de ox, on aura en appliquant la dernière
formule en A, puisque la normale $v=R$ est constante

$$(A \text{ décrite par } SR)=\int_{x_0}^{x} 2\pi R\,dx=2\pi R(x-x_0).$$

valeur connue d'une surface d'une zone. si on prenait l'intégrale
entre $-R$ et $+R$ on aurait

$$A=4\pi R^2$$

surface de la sphère.

## Surface d'un Ellipsoïde de révolution autour de l'axe des x.

L'Ellipse génératrice a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. et la formule $A = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

il faut donc substituer au lieu de $y$ et $y'$ leurs valeurs en $x$, on tire de là $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ et $yy' = -\frac{b^2}{a^2}x$. remplaçant, il vient

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x} \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{b^4}{a^4}x^2}\,dx.$$

d'où

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x} \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}\,dx$$

pour effectuer l'intégration, je fais $1 - \frac{a^2}{b^2} = \pm\varepsilon^2$

et $\sqrt{b^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} = tx\,\frac{b^2}{a^2}$.

ou bien $\sqrt{b^2 \pm \frac{b^4}{a^4}x^2\varepsilon^2} = tx\,\frac{b^2}{a^2}$.

d'où $b^2 = \frac{b^4}{a^4}x^2(t^2 \pm \varepsilon^2)$.

reste donc à intégrer

$$2\pi\frac{b^2}{a^2}\int tx\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}tx^2 - \frac{\pi b^2}{a^2}\int x^2\,dt.$$

remplaçant $x^2$ par sa valeur dans le dernier terme, il faut chercher $\frac{\pi b^2}{a^2}\int \frac{a^4}{b^2(t^2 \pm \varepsilon^2)}\,dt$. qui est égale à

$$\pi a^2 \int \frac{dt}{t^2 \pm \varepsilon^2}$$

or il on adopte le signe supérieur $\int \frac{dt}{t^2 - \varepsilon^2} = \frac{1}{2\varepsilon}\,l.\frac{t-\varepsilon}{t+\varepsilon}$

pour le signe inférieur $\int \frac{dt}{t^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon}\,\text{arc tang}\,\frac{t}{\varepsilon}$

par conséquent, on aura, en substituant ces expressions dans l'intégrale cherchée

(1) $2\pi\frac{b^2}{a^2}\int t\,dx = \pi x\sqrt{b^2+\frac{b^4}{a^4}\varepsilon^2x^2} - \frac{\pi a^2}{2\varepsilon}\,l.\frac{t-\varepsilon}{t+\varepsilon} + C$

pour la ligne supérieure et

(2) $2\pi\frac{b^2}{a^2}\int t\,dx = \pi x\sqrt{b^2+\frac{b^4}{a^4}\varepsilon^2x^2} - \frac{\pi a^2}{\varepsilon}\,\text{arc tang}\,\frac{t}{\varepsilon} + C.$

pour la ligne inférieure.

Il faudrait donc pour avoir une partie de la surface de l'Ellipsoïde de prendre ces intégrales entre des limites nulle et x comme. Si l'on veut avoir la surface entière il faut les prendre entre o et a et doubler la valeur obtenue.

Il faut donc dans la 2de valeur faire $x=a$. il vient $\pi b^2$ pour le 1er terme, or pour $x=a$ $t=1$. le 2d terme devient donc $-\frac{\pi a^2}{\varepsilon}\,\text{arc tang}\,\frac{1}{\varepsilon}$ il faut retrancher du double de

$$\pi b^2 - \frac{\pi a^2}{\varepsilon}\,\text{arc tang}\,\frac{1}{\varepsilon}$$

Ce que devient cette 2de valeur ci-dessus quand on fait $x=0$. le 1er terme devient o, et le 2d se réduit, à cause de $t$ égale $\infty$ pour $x=0$, à $-\frac{\pi a^2}{\varepsilon}\,\text{arc tang}\,\frac{1}{0} = -\frac{\pi a^2}{\varepsilon}\,100^g$.

On aura donc pour l'intégrale cherchée entre $x_0$ et $X$.

$$2\pi b^2 - \frac{2\pi a^2}{\varepsilon}\,\text{arc tang}\,\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2\pi a^2}{\varepsilon}\,100^g =$$

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2}{\varepsilon}\,\text{arc tang}\,\varepsilon = A.$$

telle est l'expression de la surface de l'Ellipsoïde quand $\varepsilon^2$ est positif c'à.d quand $a>b$, car on l'Ellipsoïde tourne autour du plus petit de ses axes pour engendrer la surface.

il faut obtenir la surface lorsque l'Ellipsoïde tourne autour de son grand axe c, à, d quand $b \times a$ ou que $\varepsilon^2$ est négatif. dans ce cas on parvient à l'intégrale (1), dans la valeur de laquelle il faut faire successivement $x = a$ $x = 0$, en se rappellant que

pour $x = a$ .... $t = 1$ et pour $x = 0$ $t = \frac{1}{0}$.

faisant $x = a$ $t = 1$ on a

$$2\pi b^2 - \frac{2\pi a^2}{2\varepsilon} l\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

il faut retrancher la valeur que prend cette intégrale pour $x = 0$ $t = \frac{1}{0}$ elle est nulle car le 1er terme est évidemment 0, et le 2d devient aussi 0 pour $t = \frac{1}{0}$ car en divisant les deux termes de la fraction $l\frac{t-\varepsilon}{t+\varepsilon}$ par $t$ on a $l\frac{1-\frac{\varepsilon}{t}}{1+\frac{\varepsilon}{t}}$. y faisant $t = \frac{1}{0}$, il vient $l(1) = 0$ donc la valeur de A est

$$2\pi b^2 + \frac{\pi a^2}{\varepsilon} l\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = A.$$

pour passer du cas de l'Ellipsoïde à la surface de la sphère, il faut faire $a = b$ alors $\varepsilon = 0$.

dans le 1er cas on a

$$A = 2\pi b^2 + 2\pi a^2 \lim. \frac{\operatorname{arctang} \varepsilon}{\varepsilon} = 4\pi b^2.$$

puisque $\lim. \frac{\operatorname{arctang} \varepsilon}{\varepsilon} = 1$ quand $\varepsilon = 0$. il en est de même pour l'autre.

Pour démontrer que $\frac{\operatorname{arctang} \varepsilon}{\varepsilon}$ converge vers 1.

car $= \frac{\varepsilon}{\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon}} = \frac{\cos \varepsilon . \varepsilon}{\sin \varepsilon} = \frac{\cos \varepsilon}{\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}}$ et à la limite ce terme là est 1.

$$\pi a^2\left(\frac{l(1+\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{l(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$ diff$^t$ les 2 termes on a 2 — pour limite donc $2\pi a^2$

# Détermination des masses.

On appelle masse d'un corps la quantité de matière renfermée dans ce corps. S'il est homogène, le rapport de la masse au volume s'appelle la densité de ce corps; ainsi appelant $M$ la masse, $V$ le volume corresp$^t$, $D$ la densité qui est la même pour tous les points de ce corps, puisque la masse varie prop$^t$ au volume dans un corps homogène, on aura $\frac{M}{V} = D$. Mais le corps n'étant plus homogène, $M$ et $V$ ne varient plus proportionnellement, et $\frac{M}{V}$ n'est pas constant, on considère alors une petite masse $m$ dans ce corps, $v$ étant le volume corresp$^t$ à cette masse, on peut concevoir que $m$ et $v$ décroissent en même temps, mais le rapport $\frac{m}{v}$ converge alors vers une limite fixe $\rho$ que j'appelle densité moyenne de cette petite masse qui est alors devenue un point matériel $(x, y, z)$. On voit que si le corps était homogène cette densité moyenne $\rho$ deviendrait égale à $\frac{M}{V} = D$, car alors $\frac{m}{v} = \frac{M}{V}$ par conséq$^t$ $\rho = D$.

Cela posé: on peut connaissant le volume $V$ d'un corps et la densité $\rho$ à chaque point $x, y, z$ de ce corps trouver sa masse $M$.

En effet $M$ croît et décroît avec $V$, il faut donc opérer relativement à la détermination des masses, comme

pour celle des volumes, et cherche d'abord l'exp^on d'un petit Elément $m$ de la masse cherchée. or on a vu que

$$\lim \frac{m}{v} = \rho \quad \text{donc} \quad m = \rho v(1 \pm \varepsilon).$$

mais on sait que $v = u(1 \pm \varepsilon')\,\Delta x \Delta y \Delta z$. remplaçant, on aura

$$m = \rho u (1 \pm \varepsilon'')\,\Delta x \Delta y \Delta z.$$

par les mêmes raisonnements que l'on a employés pour passer à la Dét^on du vol. $V$ connt le vol. $v$. on pourra conclure que

$$M = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} \rho u \, dz dy dx.$$

Si le corps était homogène $\rho = D$ quantité constante, et alors

$$M = \rho \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} u \, dz dy dx = \rho V = VD.$$

Valeur connue de la masse d'un corps homogène.

On peut supposer que la masse d'un corps restant la même, les trois dimensions de son volume viennent à décroître jusqu'à devenir nulles, on a là un point matériel tel que nous le considérons en Statique. Si deux dimensions deviennent nulles, la masse restant toujours la même, on aura une ligne matérielle. Si une seule dimension décroit jusqu'à devenir nulle, on aura une surface matérielle.

Supposons qu'une certaine quantité $M$ de matière ait été concentrée sur une surface $A$, on peut la déterminer

Connaissant l'étendue de la surface A, et la densité $\rho$ en chaque point de la surface. Imaginons concevons une masse M qui ait été concentrée sur un petit Elément a de surface, on retrouvera le volume de m et d'après la Définition même, $\frac{m}{a}$ est la densité de cette petite masse, et la limite de ce rapport sera la densité moyenne $\rho$ au point $x, y, z$ compris dans cette petite surface ainsi

$$\lim \frac{m}{a} = \rho \quad \text{d'où} \quad m = a\rho(1 \pm \varepsilon)$$

mais M croit et décroit avec A, on peut donc trouver M de la même manière que l'on a trouvé A, en désignant par m un autre de l'Elément a. on voit que

$$a = u(1 \pm \varepsilon')\Delta x \Delta y.$$

on aura donc pour un petit Elément de masse correspondant à un petit Elément a de surface sur laquelle on la supposé concentrée

$$m = \rho u (1 \pm \varepsilon_1) \Delta x \Delta y.$$

d'où l'autre

$$M = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \rho u \, dy \, dx.$$

On peut par la même méthode chercher la masse M concentrée sur une ligne s dont l'Equation est connue. car appelant m la masse de matière concentrée sur un petit Elément s de cette courbe, $\frac{m}{s}$ est la densité moyenne de cet Elément donc

$$\lim \frac{m}{s} = \rho \quad \text{d'où} \quad m = \rho s (1 \pm \varepsilon)$$

on voit d'ailleurs que

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{s}{\Delta x} = (1 \pm \varepsilon') u \Delta x$$

donc

$$m = \rho u (1 \pm \varepsilon'') \Delta x$$

par conséquent

$$M = \int_{x_0}^{x} \rho u \, dx.$$

On peut obtenir la masse d'un solide de révolution par une seule intégration en supposant que la densité moyenne ne varie que d'une section à une autre.

En effet on conçoit ce solide coupé par des plans parallèles extrêmement rapprochés, on aura donc entre deux de ces plans une suite de solides dont les volumes seront $\pi y^2 \Delta x$. en les multipliant par $\delta$ qui en sensiblement la même pour ce petit volume, on a

$$\pi y^2 \delta (1 \pm \varepsilon) \Delta x$$

pour la masse de l'un de ces petits volumes, passant aux limites et faisant la somme, on aura

$$M = \int_{x_0}^{x} \pi y^2 \delta \, dx.$$

## Des centres de gravité.

Avant de passer à la recherche des centres de gravités nous allons démontrer trois théorèmes qui nous seront d'un grand usage dans leur détermination.

### 1er théorème.

Supposons qu'une portion S d'une ligne représentée par l'équation $y = f(x)$ soit divisée en éléments $S_1\ S_2\ S_3 \ldots S_n$, que $f(x)$ soit une fonction qq^e, mais continue et positive entre les limites $x_0$ et $x$ abscisses des points extrêmes de S, je choisis dans chacun de ces éléments $S_1\ S_2 \ldots$ &c des points $x_1\ x_2 \ldots x_n$ les y correspondants seront $f(x_1)$, $f(x_2)$ &c il s'agit de démontrer que la somme des produits

$$S_1 f(x_1) + S_2 f(x_2) + S_3 f(x_3) \text{ --- } + S_n f(x_n)$$

converge vers une limite $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$. ———.

On peut même démontrer que cela a lieu pour une suite de termes plus générale,

$$S_1(f(x_1) \pm \varepsilon_1) + S_2(f(x_2) \pm \varepsilon_2) + \text{ ——— } + S_n(f(x_n) \pm \varepsilon_n)$$

en effet elle peut s'écrire ainsi ——

$$S_1 f(x_1) + S_2 f(x_2) + S_3 f(x_3) + \text{ ——— } S_n f(x_n)$$
$$\pm \varepsilon_1 S_1 \pm \varepsilon_2 S_2 \pm \varepsilon_3 S_3 \text{ -- ——— } \pm \varepsilon_n S_n$$

on sait que cette ligne est absolument la même que celle que nous voulions traiter d'abord, et l'on peut faire voir que la 2de converge vers une limite nulle, car on peut la mettre sous la forme ——

$$(S_1 + S_2 + S_3 + \text{ ——— } S_n) M (\pm \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \text{ ---} \varepsilon_n) =$$

$= S\varepsilon$ — qui à la limite sera nulle. Reste donc à trouver la limite de

$$S_1 f(x_1) + S_2 f(x_2) + \text{ ——— } + S_n f(x_n)$$

on peut la mettre sous la forme

$$(S_1 + S_2 + S_3 + \text{ —— } S_n) M (f(x_1) + f(x_2) + \text{ -- } f(x_n) =$$

$$= S \times f(x_0 + \theta(x - x_0))$$

en subdivisant encore $S_1$ $S_2$ ---- on parviendrait à un résultat semblable, donc la subdivision influe très peu sur la somme, on restera donc dans les raisonnements que nous avons faits au commencement du calcul intégral, pour définir une intégrale.

On voit donc qu'il suffit de faire la somme de chacun de ces termes $S_1 f(x_1)$ après avoir passé —

à la limite. mais on sait que

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = (1 \pm \varepsilon)\, u = \frac{s_1}{\Delta x}.$$

donc $s_1 = u(1 \pm \varepsilon)\Delta x$. et par conséquent

$$s_1 f(x_1) = u(1 \pm \varepsilon) f(x_1)\Delta x.$$

et lim. $s_1 f(x_1) = u f(x)dx$ intégrant, il vient

$$\int_{x_0}^{x} u f(x)dx = \lim \left\{ s_1 f(x_1) + s_2 f(x_2) + s_3 f(x_3) \cdots \right\}.$$

formule qu'il s'agissait d'établir.

2° théorème. il s'agit de démontrer que si l'on partage une surface A dont l'équation est $f(x,y)$ en Eléments

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n$$

si l'on prend dans chacun de ces Eléments un point $x_1 y_1 \; x_2 y_2 \cdots x_n, y_n$

on aura

$$\lim \left\{ (f(x_1 y_1) \pm \varepsilon_1) + (f(x_2 y_2) \pm \varepsilon_2) \cdots \right\} = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} u f(x,y)\, dy\, dx$$

Les raisonnements sont absolument les mêmes que pour une portion de ligne.

3e théorème relatif aux volumes on démontrerait encore de la même manière.

Si on divise un volume V en petits volumes $v_1 v_2 \cdots v_n$ que l'on prenne dans chacun d'eux des points $x_1 y_1 z_1 \cdots x_2 y_2 z_2 \cdots x_n y_n z_n$ on aura si $V = f(x,y,z)$

$$\lim \left\{ (v_1 f(x_1 y_1 z_1) \pm \varepsilon_1) + (v_2 (f(x_2 y_2 z_2) \pm \varepsilon_2) \cdots \right\} = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} u f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy.$$

SORBONNE

22ème Leçon.

l'on vient de démontrer ces théorèmes dans l'hypothèse où les fonctions $f(x)$ $f(x,y)$ $f(x,y,z)$ étaient constamment positives entre $x_0$ et $X$, on peut les étendre au cas où ces fonctions pourront changer de signe entre les limites données dans chaque question.

Dans le 1er théorème, supposons d'abord $f(x)$ tantôt positive tantôt négative entre $x_0$ et $X$. on peut ajouter à $f(x)$ une quantité constante $F$ qui surpasse la plus grande valeur négative de $f(x)$. et $f(x)+F$ sera essentiellement positive pour toutes les valeurs de $x$ comprise entre $x_0$ et $X$. on aura donc le théorème ci-dessus démontré pour cette fon

$$\lim \{ s_1(F+f(x_1)\pm\varepsilon_1) + s_2(F+f(x_2\pm\varepsilon_2) + \cdots = \int_{x_0}^{X} u\,(F+f(x))\,dx.$$

on peut décomposer ainsi le 1er terme

$$\lim \{ s_1(f(x_1)\pm\varepsilon_1) + s_2(f(x_2)\pm\varepsilon_2) + \cdots$$

$$+ \lim \{ s_1 F + s_2 F + \cdots s_n F) = \lim (s_1+s_2 \cdots s_n) F = \lim sF$$

Le 2d terme peut aussi se décomposer en deux termes car

$$\int_{x_0}^{X} u(F+f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} u F\,dx + \int_{x_0}^{X} u f(x)\,dx.$$

or $\int_{x_0}^{X} u F\,dx = F\int_{x_0}^{X} u\,dx = \lim sF$. donc on a généralement

$$\lim \{ s_1(f(x_1)\pm\varepsilon_1) + s_2(f(x_2)\pm\varepsilon_2) + \cdots) = \int_{x_0}^{X} u f(x)\,dx.$$

qqe soit la fon entre les limites $x_0$ et $X$.

on démontrerait absolument de la même manière que $f(x,y)$ devenant positive ou négative entre les limites données, le théorème (2) a lieu, de même pour les volumes.

application de ces principes à la recherche des centres de gravité.

On appelle verticale en un point donné, la ligne qui se dirige de ce point vers le centre de la terre, d'après cela les verticales des divers points matériels d'un corps sont sensiblement parallèles.

Un fil qui soutient un corps prend toujours une position verticale, et est sollicité par une force qu'on appelle poids du corps. Comme le fil sera toujours vertical, quelque point du corps qu'il soit appliqué, et que la force qui le sollicite est toujours la même, on voit que le poids d'un corps est le même, qu'il soit suspendu par l'un de ses points ou par un autre.

Si le corps est homogène, le poids croit proportionnellement au volume, cela doit être puisqu'on suppose que le poids d'un corps croit proportionnellement à la quantité de matière qu'il renferme. Mais cette dernière hypothèse force d'admettre celle-ci: que des masses égales renferment des volumes égaux quand le corps est homogène, et des masses inégales correspondent à des volumes égaux quand le corps est hétérogène.

Cela posé: voici comment on peut définir le centre de gravité d'un corps, d'abord...

Soit M la masse de ce corps, g le poids qui sollicite l'unité de masse, comme le poids croit proportionnellement à la masse gM est le poids de ce corps, je partage M en les éléments

$$m_1, m_2, m_3 \text{ ---------- } m_n.$$

on aura $$gM = gm_1 + gm_2 + gm_3 + \text{ ---------- } + gm_n.$$

résultat qui est confirmé par l'expérience, car chaque élément est sollicité par des forces parallèles dont la résultante parallèle à leur direction est égale à leur somme. — le poids qui, tend à faire descendre $m_1$ vers le centre de la terre, et l'on

admet que ce poids est dirigé suivant le fil qui soutient cette masse, et la traverse.

Si donc j'appelle

les volumes correspondants à $\begin{cases} v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \text{---} \quad v_n \\ m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad \text{---} \quad m_n \end{cases}$

les poids de ces masses seront appliqués à des points

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{---} \quad x_n$
$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \text{---} \quad y_n$
$z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad \text{---} \quad z_n$

choisis arbitrairement dans les volumes correspondants. Concevons que ces volumes diminuent, ainsi que leurs dimensions et deviennent infiniment petits, on aura en chacun des points de ce corps des forces parallèles, que pourra donc trouver le centre de ces forces parallèles pour y appliquer la résultante de tous ces petits poids, nous verrons bientôt que ce centre des forces parallèles, occupe dans chaque corps une position fixe, et c'est ce point qu'on appelle <u>centre de gravité</u>.

Pour démontrer son existence, et la position pour un corps dont on connait la masse $m$ et la densité $\delta_1 \delta_2 \ldots$ en chacun des points, j'appelle $\xi, \eta, \zeta$ les coord$^{es}$ du centre des forces parallèles, puisque $gm\xi$ est le moment de la résultante de toutes ces forces parallèles, par rapport au plan des $zy$. on aura

$$gm\xi = gm_1 x_1 + gm_2 x_2 + gm_3 x_3 + \text{---} gm_n x_n$$

or $\frac{m_1}{v_1} = \delta_1 (1 \pm \varepsilon_1) \qquad \frac{m_2}{v_2} = \delta_2 (1 \pm \varepsilon_2)$ &c ---

on a donc

$$gm\xi = g\delta_1 x_1 v_1 (1 \pm \varepsilon_1) + g\delta_2 x_2 v_2 (1 \pm \varepsilon_2) + \text{---}$$

or la valeur de $gM\xi$ à mesure que les Eléments deviennent petits, converge vers une limite fixe, car elle est semblable à celle que nous avons considéré dans le 3e théorème relatif aux volumes. on peut donc dire que

$$gM\xi = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} g\rho\, u x\, dz\, dy\, dx.$$

Mais ici $u=1$. car on considère les axes rectangulaires, dans la recherche du centre des forces parallèles. on aura donc pour les coord.es du centre des forces parallèles.

$$gM\xi = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} g\rho\, x\, dz\, dy\, dx$$

$$gMy = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} g\rho\, y\, dz\, dy\, dx$$

$$gM\zeta = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} g\rho\, z\, dz\, dy\, dx.$$

si le corps vient à tourner les forces $gm, gm, \ldots$ resteront constamment verticales, et auront changé de position par rapport au corps, mais la résultante $gM$ de ces forces reste toujours la même, on voit qu'elle sera constamment appliquée en $\xi, y, \zeta$, car le corps tournant, on peut supposer les plans coord.es tourner avec lui. ce point $\xi, y, \zeta$ déterminé par les 3 Eq.ons ci-dessus est donc le centre de gravité de ce corps.

$g$ étant commun aux deux membres de chacune des 3 Eq.ons ci-dessus, on peut le supprimer, il reste trois Eq.ons qu'on peut tirer de la valeur de la masse

$$M = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \rho\, dz\, dy\, dx$$

en ~~multis~~ remplaçant sous les signes $\int\int\int$ $\rho$ par

$\rho x$, $\rho y$, $\rho z$ suivant qu'on veut obtenir

$Mx$, $My$, $Mz$ qui sont les moments de la masse

sur $zy$, $zx$, $xy$.

Centre de gravité d'une surface qq^e B dont on connait la masse.

On l'obtiendra de la même manière que celui des volumes

je suppose que des Eléments de la masse M

$$m_1, m_2, m_3 \text{ ——— } m_n$$

se soient concentrés sur des Eléments de la surface B

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \text{ ——— } a_n$$

en un point qq^e de ces petits Eléments de surface, on peut concevoir les poids des masses qui y sont concentrées, ces forces sont

$$gm_1, gm_2, gm_3 \text{ ——— } gm_n$$

et l'on a $gM\xi = gm_1x_1 + gm_2x_2 + \text{ ——— } gm_nx_n$

or $\frac{m_1}{a_1} = \rho_1(1 \pm \varepsilon_1)$ $\quad \frac{m_2}{a_2} = \rho_2(1 \pm \varepsilon_2)$ ———

donc $gM\xi = ga_1\rho_1x_1(1 \pm \varepsilon_1) + ga_2\rho_2x_2(1 \pm \varepsilon_2) + \text{ ———}$

or d'après ce qu'on a vu dans la Détermination des surfaces

$$a_1 = u(1 \pm \varepsilon')\sec\theta\,\Delta x\Delta y.$$

remplaçant $a_1$ par sa valeur, ainsi que $a_2$ --- $a_n$ on aura une Eq^on semblable au 2^d principe démontré ci-dessus. on aura donc d'après ce qui a été dit,

$$gM\xi = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\rho\sec\theta.\,x\,dy\,dx.$$

$$gMy = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\rho\sec\theta\,y\,dy\,dx$$

$$gM\zeta = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\rho\sec\theta\,z\,dy\,dx$$

Telles sont les éq^ons qui déterminent la position du centre de gravité d'une surface qq^e. on voit qu'on passe de la masse à ses moments par rapp^t aux trois plans, en remplaçant sous les signes $\int\int\int$ $\rho \sec\theta$ par $\rho \sec\theta x$, $\rho \sec\theta y$, $\rho \sec\theta z$.

## Centre de gravité d'une ligne S.

En faisant les mêmes raisonnements, on trouverait les 3 éq^ons

$$M\xi = \int_{x_0}^{X} \rho x \sec\theta \, dx$$

$$My = \int_{x_0}^{X} \rho y \sec\theta \, dx$$

$$Mz = \int_{x_0}^{X} \rho z \sec\theta \, dx$$

dans ce cas, $\sec\theta = \sqrt{1+y_1^2}$.

## Centre de gravité d'un solide de révolution

En divisant ce solide en ~~tranches~~ parallèles, on aura de petits solides, sur lesquels on raisonnerait, comme sur $v_1$ $v_2$ ... $v_n$ dans la dét^on du centre de gravité d'un corps qq^e, et l'on aura

$$M\xi = \pi \int_{x_0}^{X} \rho y^2 x \, dx$$

$$My = \pi \int_{x_0}^{X} \rho y^2 y \, dx$$

$$M\zeta = \pi \int_{x_0}^{X} \rho y^2 z \, dx$$

on dirait $gM\xi = gm_1x_1 + gm_2x^2 \ldots$

or ici $\lim \frac{m_1}{v_1} = \rho$

et $v_1 = \pi y^2 \Delta x$. on a donc

$m_1 = \rho \pi y^2 \Delta x$ et partout

## Centre de gravité d'une surface de révolution

je suppose une masse M concentrée sur cette surface

on a $M = 2\pi \int_{x_0}^{X} \rho v \, dx$ par conséquent les coord^ns du centre de gravité sont

$$M\xi = 2\pi \int_{x_0}^{X} \rho v x \, dx$$

$$My = 2\pi \int_{x_0}^{X} \rho v y \, dx$$

$$M\zeta = 2\pi \int_{x_0}^{X} \rho v z \, dx$$

Application de ces formules aux solides, surfaces, et lignes homogènes.

Il faut dans chacune d'elles faire sortir $\xi$ hors du signe $\int$ puisqu'elles en sont constantes. On peut mettre les formules relatives au centre de gravité des solides sous une autre forme, en supposant que $u$ soit la section faite par un plan perp$^{re}$ à l'axe des $x$ à une distance $x$ de l'origine. Car on sait que —

$$u = \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} dz\, dy$$

(les axes étant rectangulaires) on aura donc —

$$M\xi = \int_{x_0}^{x} u x\, dx$$

$$My = \int_{x_0}^{x} u y\, dx$$

$$M\zeta = \int_{x_0}^{x} u z\, dx$$



d'où l'on tire

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{x} u x\, dx}{\int_{x_0}^{x} u\, dx}$$

$$y = \frac{\int_{x_0}^{x} u y\, dx}{\int_{x_0}^{x} u\, dx}$$

$$\zeta = \frac{\int_{x_0}^{x} u z\, dx}{\int_{x_0}^{x} u\, dx}$$

Les formules étant mises sous cette forme, il est d'autant plus facile de les appliquer.

Centre de gravité d'une pyramide ayant son sommet à l'origine, et le plan de sa base parallèle à $zy$, ce que l'on peut toujours faire.

En faisant une section $u$ par un plan parallèle à $zy$ à une distance $x$, on a — $B$ étant la base et $H$ la hauteur de la pyramide

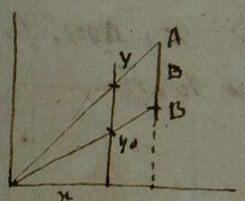


$$\frac{u}{x^2} = \frac{B}{H^2} \quad \text{d'où} \quad u = \frac{B}{H^2} x^2.$$

En remplaçant $u$ par la valeur dans les formules ci-dessus.

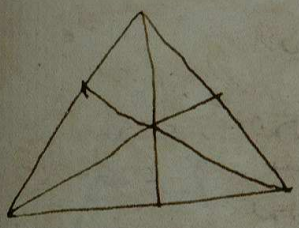
On aura
$$\xi = \frac{B}{H^2}\frac{\int_0^H x^3\,dx}{\int_0^H x^2\,dx}$$
les limites sont ici 0 et H puisqu'on suppose que la pyramide passe à l'origine, et que sa hauteur est H.

on tire de là
$$\xi = \frac{B}{H^2}\frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}H.$$
Le centre de gravité se trouve donc dans un plan parallèle à $xy$ à une distance égale aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur, on ferait voir de même qu'elle se trouve dans des plans semblablement situés par rapport aux trois bases. Le centre de gravité se trouve au point de rencontre de ces 4 plans.




Centre de gravité d'un triangle. je place sa base AB parallèle à l'axe des $y$, sommet opposé à l'origine. et j'aurai
$$\frac{y-y_0}{x} = \frac{B}{H} \quad \text{d'où} \quad y-y_0 = \frac{B}{H}x.$$
ou
$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{x} u\,x\,dx}{\int_{x_0}^{x} u\,dx}$$
$u$ désignant ici la réction $y-y_0$

on aura donc, puisque les limites sont 0 et H.
$$\xi = \frac{\int_0^H x^2\,dx}{\int_0^H x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}H.$$
Le centre de gravité se trouve donc sur une droite située au tiers de la hauteur à partir de la base. par la même raison elle est située sur des droites semblablement placées par rapport aux deux autres bases. Le centre de gravité sera donc à l'intersect de ces trois droites.



On peut démontrer que le centre de gravité d'un triangle est situé au point d'int^on des trois droites qui joignent les sommets de ce triangle aux points milieux des bases opposées.

On peut démontrer aussi Géométriq^t que l'on obtient le Centre de gravité d'une pyramide, en joignant les sommets avec les centres de gravité des bases opposées.

On peut obtenir autrement les centres de gravité de beaucoup de corps. pour cela il faut démontrer les théorèmes suivants

Théorème 1^er Si l'on divise un solide donné par tranches infiniment minces par des plans parallèles à zy. le Centre de gravité de chacune d'elles se confondra sensiblement avec le centre de gravité des sections.

Si l'on suppose une section par un plan à une distance x, l'autre sera à la distance $x+\Delta x$, la masse de la tranche comprise entre ces deux plans sera

$$\int_x^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \rho\, dz\, dy\, dx$$

or $\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \rho\, dz\, dy$ qu'on peut représenter par $f(x)$. on aura donc

$$\mu = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\, dx$$

en désignant par $\mu$ la masse de la tranche élémentaire et

$$\mu\xi = \int_x^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \rho x\, dz\, dy\, dx$$

$$\mu y = \int_x^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \rho y\, dz\, dy\, dx$$

$$\mu z = \int_x^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \rho z\, dz\, dy\, dx.$$

par conséquent $\xi = \dfrac{\int_x^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \rho x\, dz\, dy\, dx}{\int_x^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \rho\, dz\, dy\, dx}$

$y = \int$ ——

$\xi = \int$ ——

on peut le mettre sous la forme —

$$\Delta x\,(1+\varepsilon)\,f(x).$$

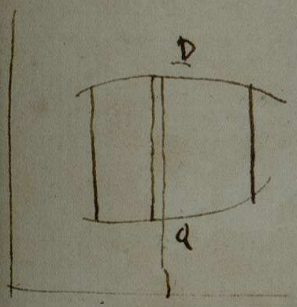
d'après la 2ème leçon du calcul intégral. on aura — donc

$$\xi = x$$
$$\eta = \frac{\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho\, y\, dz\, dy}{\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho\, dz\, dy}$$
$$\zeta = \frac{\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho\, z\, dz\, dy}{\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho\, dz\, dy}$$

coord$^{es}$ du centre de gravité d'une section parallèle à zy. donc &c$^{a}$ —.

<u>Théorème 2$^{ème}$</u> Si l'on considère une portion de surface comprise entre x et x+Δx, je dis que son centre de gravité coïncidera à très peu près avec celui de l'ordonnée correp$^{te}$ à x.

on y parviendra en raisonnant comme précédemment soit par cette manière. Élémentaire. —




$$\mu = \int_{x}^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{Y} \rho\, dy\, dx = \Delta x\,(1+\varepsilon)\int_{y_0}^{Y} \rho\, dy$$

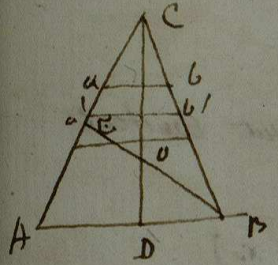
par conséquent

$$\xi = x$$
$$\eta = \frac{\int_{y_0}^{Y} \rho\, y\, dy}{\int_{y_0}^{Y} \rho\, dy}$$

qui sont les coord$^{es}$ de la portion d'ordonnée PQ. donc &c$^{a}$ —

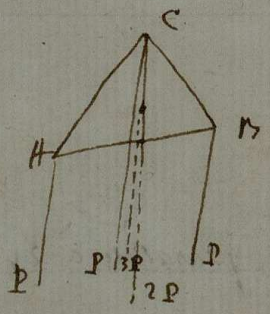
D'après ces théorèmes il sera aisé de déterminer le centre de gravité de plusieurs solides et surfaces

<u>Centre de gravité d'un triangle.</u> il se trouvera au centre de gravité de toutes les droites ab, a'b', parconséquent sur la ligne CD qui joint leurs points milieux. il se trouvera aussi sur BE. c'est donc le centre de gravité cherché.




il en sera de même pour la pyramide.

En général, on connaîtra le centre de gravité d'un corps, quand on connaîtra les lignes qui unissent les centres de gravité de deux systèmes de sections faites dans ce corps par des plans parallèles.




On peut aussi trouver le centre de gravité d'un triangle, en supposant sa masse décomposée en trois forces égales appliquées aux trois sommets

de même pour la pyramide.

## Centre de gravité des solides de révolution.

On suppose que l'axe des $x$ est l'axe de rotation, alors $u = \pi y^2$. et l'on a

$$\xi = \frac{\pi \int_{x_0}^{X} \rho y^2 x \, dx}{\pi \int_{x_0}^{X} \rho y^2 \, dx}.$$

$$y = \text{———}$$

$$\zeta = \text{———}$$

Appon au cône droit ayant son sommet à l'origine et sa base à une distance $x = H$. $u = ax^2$ et l'on a

$$\xi = \frac{\int_0^H x^3 dx}{\int_0^H x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4} H^4}{\frac{1}{3} H^3} = \frac{3}{4} H.$$

ce que l'on savait déjà.

Appon au segment d'un parabde de révolution.

$y^2 = 2px$ $\quad x = H.$ donc

$$\xi = \frac{2}{3} H.$$

Quand dans une courbe $\rho$ et $\sec\theta$ sont constants les coordes du centre de gravité sont

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\int_{x_0}^{X} x \, dx}{\int_{x_0}^{X} dx} = \frac{1}{2}(X + x_0) \\ y = \dfrac{\int_{x_0}^{X} y \, dx}{X - x_0} \\ \zeta = \dfrac{\int_{x_0}^{X} z \, dx}{X - x_0} \end{cases}$$

il se trouve donc ~~au milieu~~ sur le z qui joint le milieu des x des points extrêmes de la courbe.

Le centre de gravité d'une surface quand ρ et ξ sont constants, est déterminé par

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} x\,dy\,dx}{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} dy\,dx}$$

$$y = \frac{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} y\,dy\,dx}{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} dy\,dx}$$

$$\zeta = \frac{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} z\,dy\,dx}{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} dy\,dx}$$

où les deux 1ères déterminent le centre de gravité de l'aire projetée sur le plan des xy. et le z se trouve être le volume compris dans cette surface divisé par la proj^on de cette surface, ainsi

$$\zeta = \frac{V}{A}.$$

V étant le volume, et A la proj^on de la surface sur xy.

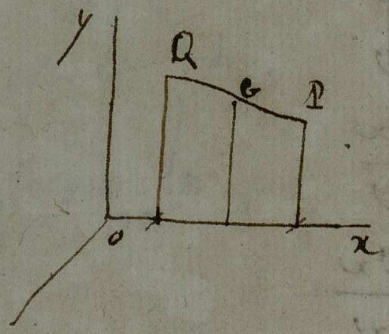
<u>app^on</u> à la surface du cône droit ayant une base circulaire sur xy.

La circonférence de la base a son centre de gravité à son centre, celui de la surface se trouvera donc sur le z passant par ce point, à une distance

$$\zeta = \frac{V}{A} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\pi R^2} = \frac{H}{3}.$$

## théorème de guldin

1° une surface de révolution autour de l'axe des $x$ parex: est égale à la courbe plane génératrice multipliée par le chemin que parcourt le centre de gravité de cette courbe plane en tournant autour de $ox$.




en effet, on sait que si $PQ = S$

$$S = \int_{x_0}^{x} \sec\theta \, dx.$$

$$M = \int_{x_0}^{x} \rho \sec\theta \, dx$$

et

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{x} x \sec\theta \, dx}{\int_{x_0}^{x} \sec\theta \, dx} \; ; \quad y = \frac{\int_{x_0}^{x} y \sec\theta \, dx}{\int_{x_0}^{x} \sec\theta \, dx}$$

$\xi$ et $y$ étant les coord^ns du centre de gravité $G$ de la courbe $PQ$.

on peut écrire ainsi l'Eq^on en $y$.

$$= y S = \int_{x_0}^{x} v \, dx \qquad \text{car } v = y \sec\theta = y\sqrt{1+y'^2}.$$

multipliant les 2 termes de cette égalité par $2\pi$. on a

$$2\pi y . S = 2\pi \int_{x_0}^{x} v \, dx.$$

or le 2^d membre de cette Eq^on exprime la surface de révolution engendrée par $PQ$, on voit donc qu'elle est égale à l'arc $PQ$ multiplié par la circonférence que décrit $G$.

si le plan des $yx$ ne tournait que d'un angle $q$. $\frac{q}{2\pi}$ sera le rapport de cet angle à la circonférence. la surface décrite sera dans ce cas

$$q y . S = q \int_{x_0}^{x} v \, dx.$$

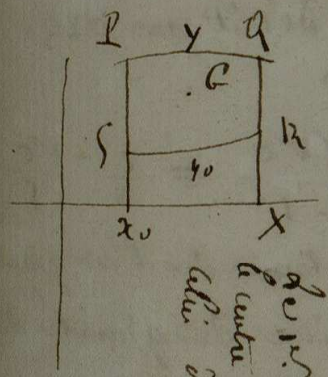
C.Q.F.D.

si l'on voulait appliquer le théorème, en supposant que la rotation se fait autour de l'axe des $x$, on aurait

$$2\pi \xi . S = 2\pi \int_{y_0}^{y} x \sec\theta \, dy$$

il suffirait donc de changer $x$ en $y$ dans la formule ci-dessus.

2°. Un solide de révolution engendré par une surface plane PQRS située sur le plan des xy, est égal à cette surface par le chemin qu'a parcouru le centre de gravité de cette surface, quand le centre de gravité a tourné autour de l'axe des x par ex.




en effet, on sait que si surf PQRS = A. on a

$$A = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{y} dy\,dx. \quad M = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{y} \rho\, dy\,dx = \rho A.$$

et si l'on suppose $\rho$ constant

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{X} x(y-y_0)\,dx}{\int_{x_0}^{X}(y-y_0)\,dx}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{X}(y^2-y_0^2)\,dx}{\int_{x_0}^{X}(y-y_0)\,dx}.$$

On tire de cette dernière formule

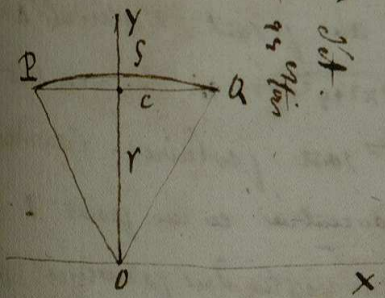
$$y \cdot A = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{X}(y^2-y_0^2)\,dx$$

multipliant les deux membres par $2\pi$, on a

$$2\pi y \cdot A = \pi\int_{x_0}^{X}(y^2-y_0^2)\,dx.$$

Le 2d membre exprime le solide décrit par PQRS, donc il est égal à la surface génératrice par la circonférence cercle que décrit le centre de gravité G de cette surface.

Le 1er de ces théor. sert dans certains cas à dét. le centre de gravité d'une ligne, le 2d à dét. qq. cas celui de la surface génératrice.




<u>appon au centre de gravité d'un arc.</u>

je prends pour axe des y une droite OY perpve à la corde PQ = c de l'arc donné S. et pour axe des x la droite OX parallèle à PQ. je suppose que cet arc tourne autour de OX.

d'après le théorème de guldin, on aura en désignant par y l'ordce du centre de gravité qui doit évidt être situé sur OY.

$$2\pi y = \frac{2\pi r \cdot c}{S}$$

Le 2d membre de cette Eqon étant l'expon de la surface de révolution engendrée par PS en tournant autour de oy. divisée par l'arc PS = s.

donc

$$y = \frac{cr}{s}.$$

on connaîtra donc ainsi la position du centre de gravité de l'arc PQ.

Centre de gravité du secteur décrit par OPQ.

on a d'après le théorème de Guldin

$$2\pi y = \frac{\frac{1}{3} r \cdot 2\pi r c}{\frac{1}{2} r \cdot s} = \frac{2}{3} \frac{rc}{s}.$$

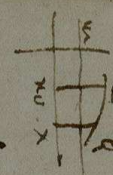
il se trouve donc sur oy à une distance de l'origine qui est les $\frac{2}{3}$ de l'ordonnée du centre de gravité de l'arc de ce secteur.

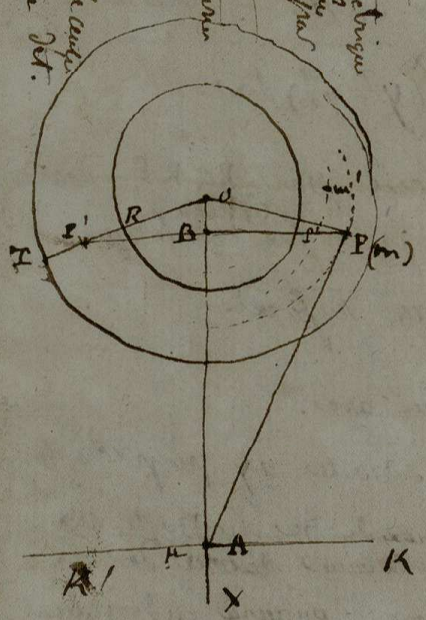
---

## Attraction d'un corps sphérique sur un point matériel situé au dedans ou au dehors de cette surface.

je suppose que OR et OT tournent autour de l'axe ox. on aura un volume compris entre ces deux sphères que je conçois rempli d'une masse M, dont la densité $\rho$ ne varie pas pour un même parallèle OP, et agissant par attraction sur une masse $\mu$ concentrée au point matériel A. situé sur ox. ainsi $\rho$ est $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ si les axes sont rectangulaires. et $\rho = f(r)$ si les coordes sont polaires. Considérons d'abord l'attraction d'une masse m concentrée en un point P de la masse donnée sur le point A. en vertu du principe que l'action est égale pour l'Equilibre de deux corps en présence l'un de l'autre, il s'ensuit, m et $\mu$

On pourra au moyen des formules de Guldin trouver le centre de gravité de plusieurs lignes et surfaces, dans lesquelles un lieu géométrique de ces centres de gravité, quand on en connaîtra un autre lieu par la donnée de la question de centre de gravité sera déterminé. nous avons d'en voir 2 Exem. si par ex: xoxqp tourne autour de ox au moyen de $2\pi y \cdot A$ = Sol. de revon on peut déterminer la parallèle une ou ce trouve situé le centre de gravité. il suffirait d'en connaître un autre lieu pour le dét.



tendront à l'attirer l'une vers l'autre, avec une force qui sera égale pour chacune d'elles, et de plus que le mouvement s'effectuera sur la ligne droite AP qui les unit. on admet comme maximum que chacune de ces forces est proportionnelle au produit des deux masses et à une fon de la distance, qui est ordinairement la raison inverse du carré de la distance. Si l'on désigne la distance IA par s, par k l'action de la masse A ou I à l'unité de distance, et par m et μ les masses à l'unité de distance, $\frac{k\mu m}{s^2}$ exprimera l'attraction à la distance s de deux masses dont les attractions sont à l'unité de distance, on peut la mettre sous la forme

$$\frac{k\mu m}{s^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)$$

en observant que si OA est représenté par a, et que PB soit x au point I. $\frac{a-x}{s} = \cos IAO$, d'ailleurs la force qui agit de I en A peut se décomposer en deux forces l'une dirigée suivant l'axe OX et l'autre dirigée suivant une perp^re AK à l'axe OX. ou une autre masse placée en I agira ainsi que le fait I sur la μ, on pourra donc décomposer cette force en deux l'une dirigée suivant l'axe et une autre suivant AK' qui détruira celle dirigée suivant AK — la résultante de toutes les composantes au point A sera donc nulle, il ne restera donc que celle des composantes dirigées suivant OX. mais elles seront égales aux forces de m, m'..... multipliées par les cosinus que IA, I'A font avec l'axe des x.

Ainsi la résultante F des diverses attractions des molécules m m' m'' &a de la masse sera exprimée par la somme d'une suite de termes de la forme —

$$\frac{K\mu m}{s^2} \cdot \frac{a-x}{s}$$

Ainsi on peut dire qu'en coord^ées ~~polaires~~ rectilignes

$$F = \frac{K\mu m}{s^3}(a-x) + \text{———} \cdots$$

or $m = \rho v(1 \pm \varepsilon)$. ainsi —

$$F = \frac{K\mu\rho v(1\pm\varepsilon)(a-x)}{s^3} + \&a \text{———}$$

pour intégrer cette exp^on, il est plus simple de prendre — des coord^ées polaires, les limites des intégrales se trouveront facilement.

or en coord^ées polaires $p = POA$ donc $x = r\cos p$. $OP = r$ rayon vecteur du point m. q représentera l'angle que le plan POX fait avec un plan fixe, on aura — donc pour les coord^es polaires

$$F = \frac{K\mu\rho v(1\pm\varepsilon)(a - r\cos p)}{s^3} + \&a \text{———}$$

$s^2$ étant égal dans le triangle OAP à l'exp^on —

$$s^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos p$$

Mais la suite de termes qui forme F peut se mettre sous la forme

$$F = v f(p, q, r) + \&a \text{———}$$

et l'on sait qu'à la limite une suite de termes de cette forme peut s'écrire

$$F = \int_{p_0}^{P}\int_{q_0}^{Q}\int_{r_0}^{R} u\, f(p,q,r)\, dr\, dq\, dp.$$

or dans cet exemple $f(p,q,r) = \frac{\kappa\mu\,\rho(a - r\cos p)}{\delta^3}$.
et $u = r^2 \sin p$. on a donc

$$F = \kappa\mu \int_{p_0}^{P}\int_{q_0}^{Q}\int_{r_0}^{R} \frac{\rho(a - r\cos p)}{\delta^3}\, r^2 \sin p\, dr\, dq\, dp.$$

pour obtenir les limites qui conviennent à l'attraction de la masse M sur $\mu$, on observe d'abord que $r_0$ et R doivent être égaux aux rayons des deux sphères concentriques. de plus le mouvement de rotation devant se faire en entier autour de OX, q s'étendra depuis 0 jusqu'à $2\pi$. ainsi les limites relatives à q seront $q_0 = 0$ $Q = 2\pi$. celles de p ne devront s'étendre que depuis 0 jusqu'à $\pi$. car tous les rayons vecteurs menés du centre à la demi-zône supérieure comprise entre les cercles suffisent pour décrire tout la masse M en tournant de OX. ainsi on aura pour les limites de p $p = 0$ $p = \pi$

Les limites de l'intégrale triple ci-dessus sont donc

$r_0$ $p_0 = 0$ $q_0 = 0$
R $P = \pi$ $Q = 2\pi$

ainsi

$$F = \kappa\mu \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{R} \frac{\rho(a - r\cos p)}{\delta^3}\, r^2 \sin p\, dr\, dq\, dp$$

or les limites sont constantes, on peut donc commencer l'intégon par l'une des trois variables.

on simplifie les calculs dans ce cas particulier, en commençant par intégrer par rapport à $q$, ensuite par rapport à $p$ enfin par rapport à $r$. effectuant la 1ère intégr. par rapport à $q$, on a

$$F = 2\pi k \mu \int_{p_0}^{R} \int_0^{\pi} \rho \frac{a - r\cos p}{s^3} r^2 \sin p \, dp \, dr.$$

Intégrons actuellement par rapport à $p$, on voit que $\rho r$ est indépendant de $p$ on peut les faire sortir du signe $\int$. et l'on a pour l'intégle par rappt à $p$.

$$\rho r \int_0^{\pi} \frac{a - r\cos p}{s^3} r \sin p \, dp.$$

mais $s^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos p$ diffᵗ on a $s\,ds = ar\sin p$.

donc $\rho r \int \frac{a - r\cos p}{s^3} r \sin p = \frac{\rho r}{a} \int \frac{a - r\cos p}{s^2} ds.$

ajoutant $2a^2$ à chacun des membres de l'Eq. ou $s^2$ on a

$$s^2 - r^2 + a^2 = 2a(a - r\cos p).$$

et l'intégrale ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{\rho r}{2a^2} \int \frac{s^2 - r^2 + a^2}{s^2} ds = \frac{\rho r}{2a^2}\left(s + \frac{r^2 - a^2}{s}\right)$$

$$= \frac{\rho r}{2a^2}\left(\frac{s^2 + r^2 - a^2}{s}\right) = \frac{\rho r (2r^2 - 2ar\cos p)}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos p}}$$

$$= \frac{\rho r^2 (r - a\cos p)}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos p}}$$

il faut prendre cette intégrale entre les limites $0$ et $\pi$

et l'on a —

$$\frac{\rho r^2}{a^2}\left(\frac{r+a}{r+a} - \frac{r-a}{\sqrt{r^2+a^2-2ar}}\right)$$

~~Et~~ $\rho(r)^2$

Si je suppose le point $\mu$ situé au dehors de la sphère $r-a$ est négatif, et il faut considérer le dénominateur comme la racine de $(a-r)^2$ ainsi dans ce cas on a

$$\frac{2\rho r^2}{a^2}$$

pour la valeur de l'intégrale par rapp^t à $p$.

Si le point $\mu$ est au dedans de la sphère. $r-a$ est positif, et l'on a $0$ pour l'intégrale; ainsi l'attraction est nulle quand le point $\mu$ est intérieur.

et au dehors on a

$$F = \frac{4\pi K\mu}{a^2}\int_{r_0}^{R} \rho r^2 dr.$$

pour la force d'attraction. on peut l'exprimer en f^on de la masse $M$. car

$$M = \int_{r_0}^{R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho r^2 \sin p\, dq\, dp\, dr$$

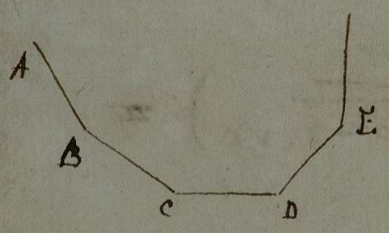
qu'on peut mettre sous la forme suivante en intégrant.

~~Cette Expon~~

$$M = 4\pi\int_{r_0}^{R} \rho r^2 dr. \quad \text{Donc}$$

$$F = \frac{KM\mu}{a^2}.$$

telle est donc l'attraction de la masse $M$ sur la masse $\mu$. on voit qu'elle est la même que celle de $m$ sur $\mu$.




## Conditions d'Equilibre dans le polygone funiculaire.

On appelle Polyg. funicul. le polyg. ABCD---- dont les côtés inextensibles AB, BC, CD---- ont la liberté de se mouvoir autour des points A, B, C, D--- couverts des forces $P\ P'\ P''\ P'''$---- $P^{(n)}$ que je suppose être les résultantes de toutes les forces appliquées en A, B, C, D---- s'il y a n côtés, et que l'on connaisse les angles que chacune des forces fait avec les axes, ainsi que les coord$^{es}$ de son point d'app$^{on}$

$$P\begin{cases} x & z \\ y & \beta \\ z & \gamma \end{cases} \quad P'\begin{cases} x' & z' \\ y' & \beta' \\ z' & \gamma' \end{cases} \quad P''\begin{cases} x'' & z'' \\ y'' & \beta'' \\ z'' & \gamma'' \end{cases} \text{------} P_n\begin{cases} x^{(n)} & z^{(n)} \\ y^{(n)} & \beta^{(n)} \\ z^{(n)} & \gamma^{(n)} \end{cases}$$

On n'a qu'à concevoir que le système devienne invariable, l'Equilibre subsistera, et l'on aura d'abord les 6 Eq$^{ons}$

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} &P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{----} P^{(n)}\cos\alpha^{(n)} = 0 \\ &P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{----} P^{(n)}\cos\beta^{(n)} = 0 \\ &P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{----} P^{(n)}\cos\gamma^{(n)} = 0 \end{aligned}\right\}$$

qui expriment que les projections des forces sur les axes sont nulles

$$(2)\quad \left.\begin{aligned} &P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \text{----} = 0 \\ &P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') + \text{----} = 0 \\ &P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \text{----} = 0 \end{aligned}\right\}$$

qui expriment que les sommes des moments linéaires sur les axes sont nulles.

Mais supposons que le système devienne variable, l'Equilibre ne pourra subsister si P n'est pas dirigée suivant AB ce qui s'exprime par le système d'Eq$^{ons}$

$$\frac{P\cos\alpha}{x - x'} = \frac{P\cos\beta}{y - y'} = \frac{P\cos\gamma}{z - z'}$$

Comme AB est une droite inextensible, on peut la concevoir appliquée en B et il faudra que la résultante R des deux forces P et P' soit dirigée suivant le 2$^{e}$ côté BC ce qui donne lieu au système d'Eq$^{ons}$

$$\frac{P\cos\alpha + P'\cos\alpha'}{x'-x''} = \frac{P\cos\beta + P'\cos\beta'}{y'-y''} = \frac{P\cos\gamma + P'\cos\gamma'}{z-z'}.$$

par la même raison il faudra que la résultante de $R$ et $P''$ soit dirigée suivant $CD$, ainsi de suite... on aura donc

$$\frac{P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha''}{x''-x'''} = \frac{P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta''}{y''-y'''} = \frac{P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma''}{z''-z'''}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \cdots P^{(n-1)}\cos\alpha^{(n-1)}}{x^{(n-1)} - x^{(n)}} = \frac{P\cos\beta + \cdots P^{(n-1)}\cos\beta^{(n-1)}}{y^{(n-1)} - y^{(n)}} = \frac{P\cos\gamma + \cdots}{z^{(n-1)} - z^{n}}.$$

toutes ces Eq^ons sont donc nécessaires pour que l'Equilibre subsiste dans un polygone funiculaire. et nous ferons voir bientot que les Eq^ons (2) ne sont qu'une conséquence de toutes les autres. en admettant cela il est aisé de voir qu'il y a autant d'Eq^ons de condition que de variables indépentes, en effet il y a $2n+3$ Eq^ons, comm'il y a $n$ cotés par conséquent $n+1$ sommets, il y a $3n+3$ variables, mais les cotés étant supposés inextensibles, elles se trouvent liées par $n$ Eq^ons il n'y a donc que $2n+3$ variables indépendantes précisément autant que d'Eq^ons.

Démontrons que les Eq^ons (1) se déduisent des autres, ce qui sera vrai si je fais voir que la dernière par ex: des Eq^ons (2) s'en déduit.

on peut écrire ainsi les Eq^ons ci-dessus

$$P\cos\beta(x-x') = P\cos\alpha(y-y')$$

$$P\cos\beta(x'-x'') + P'\cos\beta'(x'-x'') = P\cos\alpha(y'-y'') + P'\cos\alpha'(y'-y'')$$

$$\vdots$$

$$P\cos\beta(x^{(n-1)}-x^{(n)}) + P'\cos\beta'(x^{(n-1)}-x^{(n)}) \cdots = P\cos\alpha(y^{(n-1)}-y^{(n)}) + \cdots$$

je fais la somme de ces Eq^ons il vient

$$P\cos\beta(x-x^{(n)}) + P'\cos\beta'(x'-x^{n}) + \text{———} P\cos\beta^{(n-1)}(x^{n-1}-x^{n}) =$$

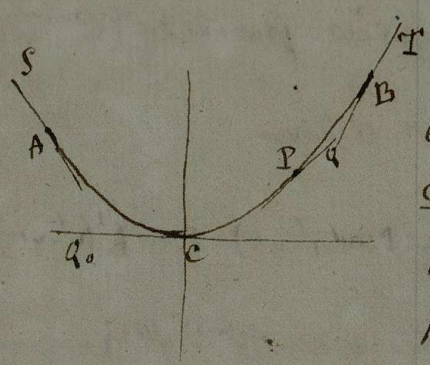
$$= P\cos\alpha(y-y^{(n)}) + P\cos\alpha'(y'-y^{(n)}) \text{———} P\cos\alpha^{(n-1)}(y^{(n-1)}-y^{(n)}).$$

Eq^on qui exprime ainsi que la dernière des Eq^ons (2) que la somme des projections des moments linéaires sur l'axe des $x$ est nulle, donc les Eq^on (2) ne sont qu'une conséquence des autres.

Considérons le cas ou deux sommets A et B deviennent fixes. l'Equilibre subsistera encore si je rends A et B mobiles, pourvu que j'applique en A et B des forces capables de tenir ces points en équilibre avec tout le système. et il ne restera dans ce cas que $2n-3$ cond^ons d'Equilibre et $2n-3$ variables indép^tes.

## De la chaînette.

on appelle ainsi la courbe qui trace une chaîne pesante attachée par ses extrémités en A et B et abandonnée à l'action de la pesanteur. on conçoit que cette courbe doit être plane, supposons que des portions égales de la masse de la chaînette aient été concentrées sur des portions égales de la courbe dont il s'agit de trouver l'Eq^on, c.à.d que S soit constante




je prends le point le plus bas de la courbe pour origine, la tang^te en ce point pour axe des $x$, une p^re à cet axe en ce point C pour axe des $y$. l'Equilibre de la chaînette que je suppose actuellement existant, ne sera pas troublé, si je suppose que A et B ne soient plus fixes, pourvu que j'applique en A et B des forces convenables, qui devront être dirigées

suivant les tangentes AS, et BT à la courbe aux points A et B. il en sera de même de deux autres points C et P. par ex: l'Equilibre ne sera pas troublé, si je remplace les tensions aux points C et P par des forces convenables Q et $Q_0$. or PC peut être considérée comme une chaînette il suffit donc de chercher son Eqon. j'appelle x, y les coordes de P, l'Equilibre ne doit pas varier si la chaîne devient pesante, son poids entre P et C sera $g\rho s$ si PC = s. or pour l'Equilibre il faut que la somme des projections des forces sur chacun des axes soit nulle, il faut donc chercher les projons de Q sur les deux axes; en examinant qu'elles sont égales à Q multipliés par les cosinus que la tangte fait avec les axes on aura $Q\frac{dy}{ds}$, $Q\frac{dx}{ds}$ pour leurs valeurs, de plus le poids $g\rho s$ est projeté dans sa véritable grandeur sur Cy, on devra donc avoir pour l'Equilibre

$$\frac{Q\,dx}{ds} - Q_0 = 0\ ; \quad \frac{Q\,dy}{ds} - g\rho s = 0.$$

Voilà les Eqons qui vont servir à déterminer l'Eqon de la Chaînette.

pour cela je les écris ainsi

$$\frac{Q\,dx}{ds} = Q_0 \qquad \frac{Q\,dy}{ds} = g\rho s$$

divist l'une par l'autre on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\rho}{Q_0}.s$$

je fais $\frac{g\rho}{Q_0} = a$ ; $\frac{dy}{dx} = y'$. on a donc $y' = as$.

d'où $dy' = a\,ds$ or $ds = dx\sqrt{1+y'^2}$. remplaçant

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = a\,dx.$$

÷ parce qu'on les multiplie on trouve $1=1$.

intégrant on a ——

$$l(y' + \sqrt{1+y'^2}) = ax. \quad \text{ou} \quad y' \div \sqrt{1+y'^2} = e^{ax}$$

ou a aussi —— $-y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{-ax}$ ÷

faisant la soustraction on a —— $2y' = e^{ax} - e^{-ax}$

cette Eqon reunie à l'Eqon $y' = as$ servira à trouver $a$. cela posé : on voit qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}.$$

intégrant entre les limites $x=0$ $y'=0$ ——

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{a} - \frac{1}{a}.$$

remplaçant $a$ par sa valeur convenable que l'on peut déterminer au moyen des 2 Eqons ci-dessus, on aura l'Eqon de la Chaînette

———

Ecole polytechnique

# Cours de Mécanique

Lamastre

4e

$x_0 + \alpha$

$x_0 + 2\alpha$

$x_0 + 3\alpha$ $\qquad x_0 -$

$x_0 + 4\alpha$

$\vdots$

$x_0 + n\alpha$

$$\int_0^{X-x_0} f(X-x)\,dx = \int_0^{X-x_0} f(x+x_0) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

$$\int \frac{dx}{x\,lx} = \int \frac{d\,lx}{lx} = l\,lx - l\,lx_0 = l\,\frac{lx}{lx_0}.$$

# 26ème Leçon

Equilibre de différents points matériels A, A', A'' &ca liés entre eux par des relations

Quand on les supposait indépendants les uns des autres on a vu que l'on avait

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$
$$x' = 0 \qquad y' = 0 \qquad z' = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

en supposant que les résultantes des diverses forces appliquées en chacun des points A A' A'' &ca soient

| | P | P' | P'' |
|---|---|---|---|
| Les proj. de ces forces sur les axes étant | $x$, $y$, $z$ | $x'$, $y'$, $z'$ | $x''$, $y''$, $z''$ |
| Les coord.ées de leur pt d'appon | $x$, $y$, $z$ | $x'$, $y'$, $z'$ | $x''$, $y''$, $z''$ |
| Les angles qu'elles font avec les axes | $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ | $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ | $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ |

Cherchons actuellement l'Equilibre de ces forces appliquées aux points A A'A''... que je suppose liés entre eux par la relation $L = f(x, y, z\ x'y'z'\ x''y''z''\ x'''\ldots \&ca) = 0$ entre les coord.ées de ces points.

Nous ferons d'abord voir que le système peut être maintenu en Equilibre par des forces autres que celles qui devaient agir sur un système de points invariables pour que l'Equilibre y subsistât; c.à.d qu'il n'est pas nécessaire ici que P P'... soient nulles. en effet, supposons que l'Equilibre subsiste, il ne sera point troublé, si j'ajoute plus de fixité au système; si je fixe par ex: tous les points excepté

le point A, on n'aura plus à considérer les forces P' P'' &c qui seront détruites par la résistance des points fixes, mais seulement la force P, comme A'A''A''' &c sont fixes L=0 ne se trouvera que $f(x,y,z\ldots K)=0$. le point A ne peut donc se mouvoir que sur cette surface, or pour qu'il y ait Equilibre, il faut que P soit normale à cette surface au point A. Supposons à présent que A' soit mobile, on peut le obtenir à la place en le concevant se mouvoir sur la surface $f(x',y',z'\ldots K')=0$ par une force P' agissant en A' normalement à cette surface il en sera de même des points A'' A''' &c on peut donc maintenir en équilibre un système donnés de points liés entre eux par des Eqns L=0 par des forces dont on peut déterminer les Dirns.

Cherchons par l'analyse quelles sont les Eqns auxquelles doivent être soumises les forces P-P'-P'' &c pour qu'il y ait Equilibre.

D'abord P doit être dirigée suivant la normale à la surface L=0. or les cosinus de la normale à cette surface avec les axes sont proportionnels à

$$\frac{\partial L}{\partial x} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} \qquad \frac{\partial L}{\partial z}$$

ceux de la force P sont proportionnels à

$$X \qquad Y \qquad Z$$

donc il faut que

$$\frac{X}{\frac{\partial L}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial L}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial L}{\partial z}}$$

pour que la force P soit dirigée suivant la normale.

On aura de même pour P' ——

$$\frac{x'}{\frac{\partial L}{\partial x'}} = \frac{y'}{\frac{\partial L}{\partial y'}} = \frac{z'}{\frac{\partial L}{\partial z'}}$$

Eq^ns que l'on peut écrire

$$X = \lambda \frac{\partial L}{\partial x}, \quad Y = \lambda \frac{\partial L}{\partial y}, \quad Z = \lambda \frac{\partial L}{\partial z}$$

$$X' = \lambda' \frac{\partial L}{\partial x'}, \quad Y' = \lambda' \frac{\partial L}{\partial y'}, \quad Z' = \lambda' \frac{\partial L}{\partial z'}$$

Au moyen de ces Eq^ns on pourra déterminer — P P' — —

$$P = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2}$$

$$P = \lambda' \sqrt{\frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{\partial L}{\partial z'}}$$

Il reste à démontrer que l'on doit avoir généralement ——

$\lambda = \lambda' = \lambda'' = \alpha^{a}$ —— toutes les fois que l'on a $L = 0$ ——

L'Equilibre entre tous les points A A' A'' — existe. on ne le troublera pas en fixant tous les points excepté A et A', ainsi que le milieu de la droite A A' qui unit ces points, ch^s en cherchant les conditions pour que les points que je suppose mobiles soient en équilibre avec tout le Système. j'appelle a, b, c les coord^es du point milieu de AA' —

$$x + x' = 2a, \quad y + y' = 2b, \quad z + z' = 2c.$$

on aura aussi — (1) $(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = r^2$, $f(x, y, z, x', y', z' \ldots) = 0$

ch^s l'on voit que A et B doivent se trouver sur deux courbes tracées sur une sphère dont (1) est l'Eq^n. les tangentes en A et A' à cette courbe seront donc parallèles, P et P' qui sont les forces appliquées en A et A' peuvent donc se décomposer chacune en deux forces, les unes suivant le diamètre AA' —

les autres suivant les ~~tangentes~~ parallèles. Les forces dirigées suivant les tangentes peuvent seules produire un effet sur le système, il faut donc pour l'équilibre qu'elles soient égales, et dirigées dans le même sens, car elles pourroit se composer en une seule appliquée au point milieu de AA' qui la détruira par la résistance. Exprimons donc ces conditions en analyse.

ou les projections de P et P' sur les tangentes sont égales à ces forces multipliées par les cosinus qu'elles font avec ces tangentes. pour trouver ce cosinus, il faut obtenir les cosinus des forces P et P' avec les axes, ceux des tangentes en faire le produit, deux à deux, et ensuite la somme

Les cosinus des forces P avec les axes sont

$$\frac{X}{P}\ ,\quad \frac{Y}{P}\ ,\quad \frac{Z}{P}\ .$$

ceux de la tang^te en A sont

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\ ;\ \frac{dy}{\sqrt{\ }}\ ;\ \frac{dz}{\sqrt{\ }}\ ;$$

les produit de ces cos. deux à deux, étant ajoutés donnent

$$\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{P\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

pour le cosinus de P avec la tang^te en A. par conséquent

$$\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

est l'expression de la force P projetée sur la tang^te on aura de même pour la proj^on de P' sur la tang^te en A'

$$\frac{X'dx + Y'dy + Z'dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\ .$$

égalant ces deux Expons on obtient

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = X'\,dx + Y'\,dy + Z'\,dz.$$

si l'on remplace $X, Y, Z, X', Y', Z'$ par leurs valeurs trouvées plus haut, on a

$$\lambda\left(\frac{dL}{dx}\,dx + \frac{dL}{dy}\,dy + \frac{dL}{dz}\,dz\right) = \lambda'\left(\frac{dL}{dx'}\,dx + \frac{dL}{dy'}\,dy + \frac{dL}{dz'}\,dz\right).$$

or en différenciant les coord^es du point milieu, et l'Eq^on

$$f(x, y, z, x', y', z' \ldots) = L = 0$$

il vient

$$dx + dx' = 0 \;;\; dy + dy' = 0 \;;\; dz + dz' = 0 \;;$$

$$\frac{dL}{dx}\,dx + \frac{dL}{dy}\,dy + \frac{dL}{dz}\,dz + \frac{dL}{dx'}\,dx' + \frac{dL}{dy'}\,dy' + \frac{dL}{dz'}\,dz' = 0.$$

combinant ces Eq^ons on a pour résultat

$$\frac{dL}{dx}\,dx + \frac{dL}{dy}\,dy + \frac{dL}{dz}\,dz = \frac{dL}{dx'}\,dx + \frac{dL}{dy'}\,dy + \frac{dL}{dz'}\,dz.$$

et par conséquent $\lambda = \lambda'$ on trouverait de même $\lambda' = \lambda''$ ainsi de suite.

Les conditions d'Equilibre cherchées sont donc

$$\frac{X}{\frac{dL}{dx}} = \frac{Y}{\frac{dL}{dy}} = \frac{Z}{\frac{dL}{dz}} = \frac{X'}{\frac{dL}{dx'}} = \frac{Y'}{\frac{dL}{dy'}} = \frac{Z'}{\frac{dL}{dz'}} = \frac{X''}{\frac{dL}{dx''}} = \text{&c}$$

ce sont les seules nécessaires, car il y a $3n-1$ Eq^ons dans cette suite d'Egalités, et $3n-1$ variables.

---

on voit bien d'après cela que toutes les fois qu'il y a Equilibre dans un système de points liés entre eux par la relation $L = 0$ ces $3n-1$ Eq^ons ont lieu, mais ces Eq^ons ayant lieu, y a-t-il toujours Equilibre c'est ce qu'il serait nécessaire de démontrer, en l'admettant pour

le cas d'une seule condition $L=0$, on pourrait démontrer cette réciproque pour celui où les points sont liés par plusieurs conditions $L=0$, $M=0$, $N=0$ &ca

Cherchons d'abord l'Equilibre d'un système de points $A$, $A'$, $A''$ &ca ... soumis aux liaisons $L=0$, $M=0$, $N=0$, &ca $L, M, N$ étant fons des coordées des points $A$ $A'$ $A''$ ...

Si l'on suppose l'Equilibre exister dans tout le système en vertu des forces $P$ $P'$ $P''$ ... appliquées en $A$, $A'$, $A''$ ... et des liaisons $L=0$, $M=0$, $N=0$ ... l'Equilibre subsisterait encore si l'on venait à rompre ces liaisons et qu'à chaque point on appliquât une force égale et directement opposée à celle qui y est appliquée. Or en vertu de la 1ère liaison $L=0$ les projections de ces forces qui exprimeront la résistance que $L=0$ oppose au mouvement de chaque point, seront

$$\begin{array}{l|l|l} -\lambda \dfrac{\partial L}{\partial x} & -\lambda \dfrac{\partial L}{\partial x'} & -\lambda \dfrac{\partial L}{\partial x''} \\ -\lambda \dfrac{\partial L}{\partial y} \text{ au point } A(x,y,z) & -\lambda \dfrac{\partial L}{\partial y'} \text{ au point } A'(x',y',z') & \vdots \\ -\lambda \dfrac{\partial L}{\partial z} & -\lambda \dfrac{\partial L}{\partial z'} & \end{array} \quad \&ca$$

En vertu de la 2de liaison $M=0$, on aura de même à chaque point des forces qui expt la résistance que $M=0$ oppose au mouvement de ces points, et dont les projons seront

$$\begin{array}{l|l|l} -\mu \dfrac{\partial M}{\partial x} & -\mu \dfrac{\partial M}{\partial x'} & \\ -\mu \dfrac{\partial M}{\partial y} \text{ en } xyz & -\mu \dfrac{\partial M}{\partial y'} \text{ en } x'y'z' & \&ca \\ -\mu \dfrac{\partial M}{\partial z} & -\mu \dfrac{\partial M}{\partial z'} & \end{array}$$

Mais à présent que les liaisons $L=0$ $M=0$, $N=0$ sont remplacées par des forces, pour qu'il y ait Equilibre il faut écrire que la somme des projections à chaque point est nulle, ce qui donnera pour chacun, trois Eqns de cette forme

$$A(x,y,z)\begin{cases} X-\lambda\frac{\partial L}{\partial x}-\mu\frac{\partial M}{\partial x}-\nu\frac{\partial N}{\partial x}-\lambda\omega=0. \\ Y-\lambda\frac{\partial L}{\partial y}-\mu\frac{\partial M}{\partial y}-\nu\frac{\partial N}{\partial y}-\lambda\omega=0 \\ Z-\lambda\frac{\partial L}{\partial z}-\mu\frac{\partial M}{\partial z}-\nu\frac{\partial N}{\partial z}-\lambda\omega=0 \end{cases}$$

$$A'(x,y,z)\begin{cases} X'-\lambda\frac{\partial L}{\partial x'}-\mu\frac{\partial M}{\partial x'}-\nu\frac{\partial N}{\partial x'}-\lambda\omega=0 \\ Y'-\lambda\frac{\partial L}{\partial y'}-\mu\frac{\partial M}{\partial y'}-\nu\frac{\partial N}{\partial y'}-\lambda\omega=0 \\ Z'-\lambda\frac{\partial L}{\partial z'}-\mu\frac{\partial M}{\partial z'}-\nu\frac{\partial N}{\partial z'}-\lambda\omega=0 \end{cases}$$

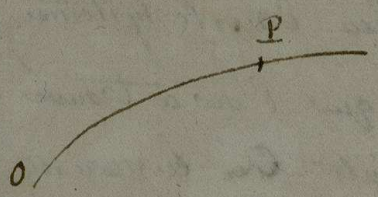
$\vdots$

Supposons qu'il y ait $n$ points et $m$ relations qui les lient il y aura $3n$ Eqns mais il faudra éliminer $m$ quantités indéterminées $\lambda, \mu, \nu \ldots$ il n'y aura donc que $3n-m$ Eqns de condn il n'y a aussi que $3n-m$ variables indépendantes. ces Eqns suffisent donc pour l'Equilibre; alors peut démontrer ici que ces Eqns étant satisfaites l'Equilibre aura lieu dans le système.

En effet ces Eqns sont celles que l'on a trouvé pour l'Equilibre de plusieurs points libres invariables en considérant ici $\lambda\frac{\partial L}{\partial x}$, $\mu\frac{\partial M}{\partial x}$ ----

Comme les projections sur l'axe des x des forces Q, R, S ..... que je puis supposer remplacer P au point A. et de même $-\lambda \frac{\partial u}{\partial x}$, $-\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ $-\nu \frac{\partial u}{\partial z}$ — .. &c — comme les projections sur oy des mêmes forces Q, R, S ——

Considérons de même $-\lambda \frac{\partial u}{\partial x'}$, $-\lambda \frac{\partial u}{\partial x'}$ ... comme les projons sur l'axe des x des forces Q' R' S' — que je suppose remplacer P' au point A' ... et pour écrire les condons d'Equilibre il faudrait écrire les Eqons ci-dessus. donc la réciproque a également lieu. La manière dont on vient de résoudre ce problème suppose une résistance indéfinie à chaque point, mais cela n'a pas lieu, et il suffira de connaître la limite de la résistance opposée par chaque point pour voir si les forces données par les formules ci-dessus ne sont pas trop fortes. — il faudrait tirer des Eqons ci-dessus les valeurs de X, Y, Z du moins connaître les 3n-m Eqons qui les lient. pour cela il faut Eliminer $\lambda$, $\mu$, $\nu$ .. &c — cette Elimination ne se fait commodément qu'au moyen du principe suivant des <u>vitesses virtuelles</u>.




<u>Des vitesses virtuelles</u>. je considère le point A que je suppose se mouvoir dans l'espace suivant une courbe OP. je désigne par x, y, z la position —

que ce point occupe au bout de l'instant $t$, et je compte l'espace qu'il parcourt à partir du point $o$ pris sur cette courbe. je suppose d'abord que le corps a parcouru des espaces égaux en des temps égaux, c'à.d que l'espace croisse proport^t au temps, on pourra mesurer l'espace parcouru pendant l'unité de temps, car supposons que $t$ croisse de $\Delta t$, $s$ de $\Delta s$, et

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{l'espace parcouru pendant l'unité de temps}$$

c'est là ce qu'on appelle la Vitesse du point. ainsi si on la désigne par $w$ on a

$$w = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Mais pendant que le temps augmente, l'espace peut diminuer proport^t. et si $\Delta t$ désigne le temps $-\Delta s$ désigne l'espace et $w = -\frac{\Delta s}{\Delta t}$. ainsi on a généralement

$$w = \pm \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

toutes les fois que l'espace croît proportionnellement au temps.

Si l'espace ne croît plus proport^t au temps, $t$ devenant $t \pm \Delta t$ $s$ devient $s \pm \Delta s$. $\pm \Delta s$ exprime l'espace parcouru pendant le temps $\Delta s$. et $\pm \frac{\Delta s}{\Delta t}$ est ce qu'on appelle la Vitesse moyenne pendant le temps $\Delta t$. si l'on conçoit que $\Delta t$ diminue, $\Delta s$ diminuera aussi, et le rapport

converge vers une limite que j'appelle la vitesse du point A à la fin du temps t. ainsi

$$w = \pm \frac{ds}{dt}.$$

qu'on peut encore écrire

$$w = \frac{\pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}.$$

exprime cette vitesse.

on appelle direction de la vitesse, celle de la tangente à la courbe dans le sens du mouvement. les cosinus des angles de la direction de la vitesse avec les axes sont donc

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, \quad \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

et l'on peut représenter la vitesse par une longueur portée sur cette direction. alors les projections de la vitesse sur les axes sont

$$w\cos z = \frac{dx}{dt}, \quad w\cos x = \frac{dy}{dt}, \quad w\cos y = \frac{dz}{dt}.$$

on appelle <u>mouvement virtuel</u> d'un corps le mouvement qui peut être donné à ce corps sans que ~~tous ses~~ points cessent d'être soumis aux liaisons qui les retiennent. et l'on appelle <u>forces virtuelles</u> celles exercées par les divers points d'un système dans un mouvement virtuel quelconque.

Cela posé : voici comment on peut faire servir ces principes à l'Elimination de $\lambda$ $\mu$ .. $\nu$ dans les Eqons d'Equilibre ci-dessus. je différencie successivt $t=0$ $t=0'$ .... par rapport à $t$. j'ai —

$$\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{dL}{dx'}\frac{dx'}{dt} + \text{—} = 0.$$

$$(A)\quad \frac{dM}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dM}{dy}\frac{dy}{dt} + \text{———————} = 0$$

$$\frac{dN}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dN}{dy}\frac{dy}{dt} + \text{———————} = 0$$

⋮

autant il y aura d'Eqons autant j'aurai d'Eqons semblables.

En multipliant chacun des termes des Eqons que je considère soit par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ --- on aura en vertu des Eqons que je viens de poser —

$$(1)\quad X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} + X'\frac{dx'}{dt} + Y'\frac{dy'}{dt} \cdots = 0$$

imprimant un autre mouvement virtuel, j'aurai une autre Eqon analogue ... ainsi de suite. Ainsi connaissant le nombre d'Eqons d'Equilibre, il suffira comme dans ce cas d'imprimer $3n-m$ mouvements virtuels. et l'on aura $3n-m$ Eqons analogues à (1).

Appon au cas où tous les points sont fixés invariablement les uns par rapport aux autres —

j'imprime d'abord au système un mouvement virtuel parallèle à l'axe des $x$, alors les projections de la vitesse sur ~~les~~ l'axe des $x$ sont ~~toutes~~ $w$, et l'on a

$$wx + wx' + wx'' + x^{a} = 0$$

car les proj^ons sur les autres axes sont nulles.

Eq^on qu'on peut écrire

$$x + x' + x'' + x''' + \text{——} = 0$$

de même

$$y + y' + y'' + y''' + \text{——} = 0$$

$$z + z' + z'' + z''' \text{——} = 0$$

on retrouve ainsi trois Eq^ons par trois mouvements virtuels parallèles aux axes, qui sont les mêmes que celles trouvées directement. Reste encore à trouver les 3 autres Eq^ons d'Equilibre ~~qui expriment que la somme des proj^ons des moments linéaires sur les axes est nulle.~~

Auparavant nous démontrerons la réciproque de la proposition sur les moments virtuels. c.à.d. toutes les fois que l'Eq^on (1)

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} + x'\frac{dx'}{dt} + y'\frac{dy'}{dt} + \&^{a} = 0$$

a lieu, en même temps que les Eq^ons (A) trouvées ci-dessus. l'Equilibre a lieu dans le système.

En effet les Eq^on (A) sont au nombre de $m$, on pourra donc au moyen de ces Eq^ons déterminer $m$ projections des vitesses, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ .... &^a en f^on des autres d'ailleurs (1) en renferme $3n$, il y aura donc $3n-m$ projections de vitesses sur les axes indét. et il faudra qu'en Eliminant $m$ de ces quantités entre ces $m+1$ Eq^ons on arrive à une Eq^on dont tous les termes

devront être nuls qq^e soit $\frac{\partial x}{\partial t}$ $\frac{\partial y}{\partial t}$ &c —

Or pour Eliminer je multiplie les Eq^ons (A) par $\lambda$, $\mu$, $\nu$, &c et je les ajoute avec (1) en colonnes verticales, il vient

$$\left.\begin{aligned}
&\left(X - \lambda\frac{\partial L}{\partial x} - \mu\frac{\partial M}{\partial x} - \nu\frac{\partial N}{\partial x} - \text{——}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \\
&+\left(Y - \lambda\frac{\partial L}{\partial y} - \mu\frac{\partial M}{\partial y} - \nu\frac{\partial N}{\partial y} \text{——}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \\
&+\left(Z - \lambda\frac{\partial L}{\partial z} - \mu\frac{\partial M}{\partial z} - \nu\frac{\partial N}{\partial z} \text{——}\right)\frac{\partial z}{\partial t} + \\
&+\left(X' - \lambda\frac{\partial L}{\partial x'} - \mu\frac{\partial M}{\partial x'} \text{——}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} + \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} = 0$$

il faut que cette Eq^on soit satisfaite qq^e soit $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ il faut donc que

$$X = \lambda\frac{\partial L}{\partial x} + \mu\frac{\partial M}{\partial x} + \nu\frac{\partial N}{\partial x} \text{ — —}$$

$$Y = \text{——————}$$

&c —

Conditions qui indiquent que l'équilibre a lieu dans le système donc toutes les fois que l'Eq^on relative au mouvement virtuel a lieu, il y a Equilibre.

<u>Manières d'écrire cette Eq^on (1)</u>.

On sait que $X = P\cos\alpha$, $Y = P\cos\beta$ $Z = P\cos\gamma$ $X' = P'\cos\alpha' +$ —

On aura donc —

$$P\left(\cos\alpha\frac{\partial x}{\partial t} + \cos\beta\frac{\partial y}{\partial t} + \cos\gamma\frac{\partial z}{\partial t} \cdots\right) + P'\left(\cos\alpha'\frac{\partial x'}{\partial t} + \text{—}\right) = 0$$

forme sous laquelle peut se présenter l'Eq^on du mouv^t virtuel.

On peut encore l'écrire autrement, en remarq^t

que si l'on appelle $w$ la vitesse du $v^e$ point dont les proj$^{ons}$ sur les axes sont $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, on aura pour les cosinus des directions des vitesses

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{w}, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{w}, \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{w}.$$

on sait aussi que les cosinus de la force avec les axes sont

$$\frac{X}{P}, \quad \frac{Y}{P}, \quad \frac{Z}{Q}.$$

le cosinus de l'angle que la force $P$ fait avec direction de la force virtuelle, ~~lorsque~~ je désigne par $\cos(\widehat{P, w})$ sera

$$\cos(\widehat{P, w}) = \frac{X\frac{\partial x}{\partial t} + Y\frac{\partial y}{\partial t} + Z\frac{\partial z}{\partial t}}{Pw}$$

d'où $$X\frac{\partial x}{\partial t} + Y\frac{\partial y}{\partial t} + Z\frac{\partial z}{\partial t} = Pw\cos(\widehat{P, w})$$

c'est ce second membre qu'on appelle moment virtuel de la force virtuelle, on voit qu'aurait de même

$$X'\frac{\partial x'}{\partial t} + Y'\frac{\partial y'}{\partial t} + Z'\frac{\partial z'}{\partial t} = P'w'\cos(\widehat{P', w})$$

par conséquent l'Eq$^{on}$ du mouvement virtuel peut s'écrire

$$Pw\cos(\widehat{P, w}) + P'w'\cos(\widehat{P', w'}) + \text{———} = 0.$$

c.à.d que pour l'Equilibre, il faut que la somme des moments virtuels soit nulle.

App$^{ons}$ de ce principe

Equilibre d'un point libre dans l'espace.

la direction de la vitesse virtuelle est qq$^{e}$ il faut donc que l'Eq$^{on}$

$$X\frac{\partial x}{\partial t} + Y\frac{\partial y}{\partial t} + Z\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \qquad \text{qq}^{es} \text{ soient } \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \ldots$$

c.à.d que $$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

Equilibre d'un point situé sur une surface courbe $L=0$

Si on suppose un Mouvement virtuel appliqué à ce point, il n'aura d'autre effet que de le faire mouvoir sur cette surface, je suppose que la courbe que ce point décrit, soit une courbe plane parallèle à $zy$, dans ce cas $\frac{dz}{dt}=0$. et les Eqns du Mouvt virtuel seront

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}=0 \;;\quad \frac{dL}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=0.$$

qui peuvent se mettre sous la forme

$$X\frac{dx}{dt}=-Y\frac{dy}{dt} \;;\quad \frac{dL}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=-\frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

divisant ces Eqns membre à membre, on a —

$$\frac{X}{\frac{dL}{dx}}=\frac{Y}{\frac{dL}{dy}}$$

ou imprimant au point un mouvement virtuel suivant une courbe plane parallèle à $zy$ et ensuite à $zx$. on aura —

$$\frac{X}{\frac{dL}{dx}}=\frac{Z}{\frac{dL}{dz}} \quad\text{et}\quad \frac{Y}{\frac{dL}{dy}}=\frac{Z}{\frac{dL}{dz}}.$$

Par conséquent les conditions d'Equilibre d'un point sur une surface sont

$$\frac{X}{\frac{dL}{dx}}=\frac{Y}{\frac{dL}{dy}}=\frac{Z}{\frac{dL}{dz}}.$$

Exprimons les conditions d'équilibre d'un système de points liés entre eux d'une manière invariable.

On a vu comment on avait les trois éqns

$$X = 0 \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

d'ailleurs on le voit immédt en employant la formule d'un mouvement virtuel sous la forme suivante

$$P\omega\cos(P,\omega) + P'\omega'\cos(P',\omega') + \text{———} = 0.$$

car on a $\omega = \omega' = \omega'$ quand on suppose que le mouvement virtuel s'fait parallt aux axes, les éqns sont donc

$$P\cos\lambda + P'\cos\lambda' + P''\cos\lambda'' + \text{———} = 0$$

$$P\cos\mu + P'\cos\mu' + \text{———} = 0$$

$$P\cos\nu + P'\cos\nu' + \text{———} = 0$$

reste à trouver les trois autres. je supposerai pour cela qu'on imprime au système un mouvement virtuel autour de l'axe des $z$. Chaque point décrira un arc de cercle dont l'éqn est

$$x^2 + y^2 = \text{const}.$$

or si $\Delta s$ est l'espace que l'un d'eux parcourt pendant le temps $t$, $\Delta s$ sera celui qu'il parcourra pendant l'instant $\Delta t$, d'ailleurs chacun de ces points décrira des arcs compris sous des angles aux centres égaux, ce qui donne lieu aux éqns

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Delta s'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{\Delta s''}{\sqrt{x''^2+y''^2}} = \alpha$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\Delta s}{\Delta t\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Delta s'}{\Delta t\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{\Delta s''}{\Delta t\sqrt{x''^2+y''^2}} = \alpha$$

passant aux limites et observant que $\frac{ds}{dt} = w$ — on a

$$\frac{w}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{w'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{w''}{\sqrt{x''^2+y''^2}} = \&w$$

ce qui veut dire que les vitesses des différents points sont proportionnelles aux distances de ces points à l'axe — résultat que l'on pouvait prévoir.

Si l'on désigne par $\Omega$ la vitesse pour l'unité de rayon, qu'on appelle aussi vitesse angulaire, on aura encore, puisque ces vitesses sont proportionnelles aux rayons

$$\frac{w}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{w'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \&w = \Omega$$

ou chaque point pouvant se mouvoir suivant

$$x^2+y^2 = \text{const.}$$

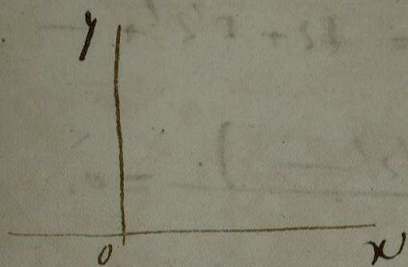
$\frac{dz}{dt} = 0$. Dérivée du cercle ou

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0.$$

ou

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{-y} = \frac{\frac{dy}{dt}}{x} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \pm\frac{w}{\sqrt{x^2+y^2}} = \Omega.$$




je dis qu'il faut adopter le signe + quand le mouvement est direct. car projetons le plan parallèle du cercle sur yx, on voit que $\frac{dy}{dt}$ est de même signe que x. il faut donc prendre le signe + et l'on a $\frac{dy}{dt} = -\Omega x$, $\frac{dx}{dt} = \Omega y$.

On aurait de même $\frac{dy'}{dt} = -\Omega x'$ $\frac{dx}{dt} = \Omega y'$.

substituant ces valeurs dans l'Eq^on du mouvement virtuel et observant que $\Omega$ est facteur commun, on a

$$P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') \text{ — } = 0$$

on trouverait en faisant tourner le système autour des autres axes —

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') \text{ — } = 0$$

$$P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') \text{ — } = 0$$

Eq^ons qu'on a déja trouvées pour l'Equilibre d'un système de points liés entre eux d'une manière invariable.

<u>Equilibre</u> d'un système de points sollicités par des forces verticales ; dans ce cas $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ et Eq^on générale devient

$$P\frac{\partial z}{\partial t} + P'\frac{\partial z'}{\partial t} + P''\frac{\partial z''}{\partial t} + \text{ — } = 0$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\partial(Pz + Pz' + Pz'' + \text{ — })}{\partial t} = 0.$$

or si l'on désigne par $\xi$ l'ordonnée du centre de gravité on a

$$(P + P' + P'' + \text{ — })\,\xi = Pz + P'z' + \text{ —}$$

diff^t. il vient

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial(Pz + P'z' \text{ — })}{\partial t} = 0.$$

ce qui exprime que la proj^on de la vitesse est nulle, c, à, d que la tang^te à la courbe est parallèle à $xy$

29ème Leçon.

# De la Dynamique.

L'inertie d'un corps est la persévérance de ce corps à rester dans le même état, s'il n'est sollicité par aucune force. Si un point matériel se meut sur une ligne droite ou courbe avec une vitesse constante, il persévérera dans son mouvement en vertu de son inertie, et le mouvement est dit uniforme, dans ce mouvt on voit que les espaces croissent propt aux temps. On peut au moyen de ce principe, qui est la base du mouvt uniforme, trouver les Eqons de ce mouvt. appellons $w$ qui est constante, on a

$$\pm \frac{ds}{dt} = w. \quad ds = \pm w\,dt.$$

intégrant cette ~~Eqon~~ à partir de $s = s_0$ qui exprime l'espace correspondant à $t = 0$. on a

$$s - s_0 = \pm wt.$$

telle est l'Eqon du mouvement uniforme.

Concevons qu'un point qui se meut en vertu de la vitesse constante $w_0$ soit sollicité par une force constante qui ne change pas avec le temps, et qui le pousse dans la même Direction. cette force augmentera la vitesse d'une quantité constante en une unité de temps c.à.d que le temps venant à croître l'effet de $P$ sera de faire croître la vitesse, par dégrés insensibles, de quantités égales en temps égaux. si donc $g$ désigne l'accroissement de la vitesse

augmt de la force accélératrice constante pour l'unité de temps, $gt$ sera celui de la vitesse au bout du temps $t$. Et partant au bout du temps $t$ le point matériel se mouvra avec vitesse

$$w_1 = w_0 + gt.$$

Si l'on suppose que la force agisse dans le sens contraire de la vitesse, elle diminuera la vitesse de quantités égales en temps égaux, et l'on aura —

$$w = w_0 - gt.$$

Si le point n'avait d'abord aucune vitesse, ces Eqns seraient

$$w = gt, \quad w = -gt.$$

le 1er mouvement celui pour le quel, la vitesse augmente de quantités égales en des temps égaux se nomme Mouvt uniformément accéléré, celui au contraire pour lequel la vitesse diminue diminue de quantités égales en temps égaux se nomme Mouvt unif.t retardé. tous les deux sont généralement appelés Mouvements uniformément variés.

La pesanteur pour de petites distances de la terre, et vu la grande distance du corps sur la quelle elle agit, au centre de la terre, peut être considérée comme constante, toutefois l'opn se fait dans le vide, d'après cela l'action de la pesanteur est une force accélératrice constante, et le corps, soumis à la pesanteur suivra les lois du Mouvt uniformément varié.

Cela posé : Voici comment on peut trouver les Eqns du mouvement uniformément accéléré. on a vu que

$$w = w_0 + gt, \quad \text{de plus on sait que } \frac{ds}{dt} = w.$$

donc $ds = (w_0 + gt)\,dt$, intégrant cette Eqn cette Eqn à partir de $t=0$, qui correspond à un espace $s = s_0$. on aura

$$\left.\begin{aligned} s - s_0 &= w_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2. \\ w &= w_0 + gt \end{aligned}\right\}$$

qui réunies à

Tout les Eqns du mouvement uniformément accéléré

de même

$$\left.\begin{aligned} s - s_0 &= w_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \\ w &= w_0 - gt \end{aligned}\right\}$$

Tout celles du Mouvt. Unift retardé

Si la vitesse du corps était d'abord nulle on aurait

$$\left.\begin{aligned} w &= gt \\ s - s_0 &= \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\}$$ Tous les Eqns du Mt. unif Varié.

Si on suppose que l'origine du départ du mobile est à l'origine o $s_0 = 0$ et les Eqns peuvent s'écrire ainsi

$$\begin{aligned} w &= gt & s &= \tfrac{1}{2} g t^2 \\ w &= w_0 + gt & s &= w_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2 \\ w &= w_0 - gt & s &= w_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

## Conséquences de ces Eqns

Nous venons de voir qu'un corps soumis à un mouvement uniformt accéléré parcourt un espace $s = \frac{1}{2} g t^2$. pendant un instant $t$. si au bout de ce temps là, toute force accélératrice cesse d'agir sur lui, il se mouvra avec une vitesse constante $gt$. et au bout du temps $t$ il aura parcouru $s = gt^2$. donc l'espace qu'il parcourt dans le 2d temps est double du 1er.

Dans le mouvement uniformément retardé, il y a une force qui agit en sens inverse de la vitesse ; comme la vitesse du point va toujours en diminuant, il y aura un instant, où elle sera nulle, or

$$v = v_0 - gt \quad \text{si} \quad v = 0 \quad \text{on a} \quad v_0 = gt.$$

d'où

$$t = \frac{v_0}{g}$$

tel est le temps nécessaire pour que la vitesse soit nulle. on peut trouver l'espace parcouru par le mobile pendant ce temps $t = \frac{v_0}{g}$. car $s = \frac{1}{2} g t^2$ donc $s = \frac{v_0^2}{2g}$.

On peut d'après cette équation trouver la vitesse qu'il faut donner à un corps qu'on lance dans l'air pour qu'il parcoure un espace $s$, car —

$$s = \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{donne} \quad v_0 = \sqrt{2gs}$$

et $v_0$ exprime cette vitesse cherchée, à ce point la vitesse est nulle, le corps s'arrête et en vertu de l'action de la pesanteur il redescendra.

D'après les équations du mouvement uniformément accéléré on peut trouver la vitesse qu'aura un point matériel après avoir parcouru un espace $s$. car — d'après l'équation

$$v = v_0 + gt$$

qu'on élève au carré, on a —

$$v^2 = v_0^2 + 2 v_0 gt + g^2 t^2$$

ou

$$v^2 = v_0^2 + 2g\left(v_0 t + \frac{gt^2}{2}\right)$$

Mais $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$ donc —

$$w^2 = w_0^2 + 2gs.$$

et si $w_0 = 0$ $w = \sqrt{2gs}$.

on peut trouver cette valeur autrement car d'après l'Eq.on

$$w = w_0 + gt$$

on a en $\partial t$ $\frac{\partial w}{\partial t} = g$. or $w = \frac{\partial s}{\partial t}$.

par conséquent $w\,dw = g\,ds$ intégt, et ayant soin de multiplier d'abord les deux membres par 2 on a

$$2w\,dw = 2g\,ds \quad \text{donc} \quad w^2 - w_0^2 = 2gs.$$

d'où $w^2 = w_0^2 + 2gs$. on trouverait de même

$$w^2 = w_0^2 - 2gs.$$

Donc &c.

Dans ce que nous avons dit nous avons supposé que la force P agissait de la même manière dans le mouvt unift accéléré, que dans le mouvt unift retardé c.à.d que g était égal à g'. on peut se rendre raison de cette égalité, en considérant une sphère matérielle qui se meut avec une vitesse $w_0$ et en vertu d'une force P qui agit sur son centre; elle tendra à le déplacer, dans l'un et l'autre mouvement le centre devrait s'enfoncer de la même quantité par conséq

$\left.\begin{array}{l} w_0 + \frac{1}{2}gt^2 \\ w_0 - \frac{1}{2}g't^2 \end{array}\right\}$ doivent être des quantités égales. donc $g = g'$

30ème Leçon

13 juillet 1823.

Dans les Eqons $\left.\begin{array}{l} w = w_0 \pm gt \\ \frac{ds}{dt} = \pm w \end{array}\right\}$. La force $g$ ne dépend pas seulement de la force $P$ appliquée au corps qu'elle fait mouvoir mais encore de la masse de ce corps. ~~mais~~ or quand une masse $m$ devient $2m$, il faut une force double, pour la mouvoir également, car on peut décomposer $2m$ en $m+m$ et à chacune de ces masses, il faut appliquer une force $P$, donc à $2m$, il faut appliquer $2P$. ~~et peut donc~~ dire généralement que la force varie propt à la masse, nous supposerons qu'à la masse $m$ on ajoute la masse $m'$, la force devient $P+P'$, mais puisque $P$ varie avec $m$. $P = f(m)$. et comme $g$ est constant $P' = f(m')$. donc $P + P' = f(m) + f(m')$, et par conséquent $f(m+m') = P+P'$ d'où $f(m+m') = f(m) + f(m')$. on peut démontrer que cette Eqon n'a lieu qu'autant que $f(x) = ax$. si $x = m$ $y = m'$

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Diffte par rapport à $x$ et ensuite par rapport à $y$, on a

$$\left.\begin{array}{l} f'(x+y) = f'(x) \\ f'(x+y) = f'(y) \end{array}\right\} \text{ d'où } f'(x) = f'(y).$$

ce qui apprend que la dérivée ne change pas qqe soit la variable, si donc $y = 0$ $f'(x) = f'(0) = a$. intégrant $f'(x) = a$. on a $f(x) = ax + b$ et je dis que $b$ doit être nul, car si on fait $y = 0$ dans l'Eqon ci-dessus on a

$$f(x) = f(x) + f(0).$$

donc $f(0) = 0 = b$. il est donc démontré que

$$f(x) = ax \text{ ou } P = am. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

à présent que nous avons démontré que les forces sont proportionnelles aux masses, nous rendrons plus sensible ce principe généralement admis que les vitesses sont proportionnelles aux forces. en effet, g étant la vitesse que la force P fait acquérir au corps pendant l'unité de temps, on a

$g = F(P)$ et pour la vitesse produite en vertu de la force P. de même on aura

$gt = t\,F(P)$.

$g' = F(P')$ $\qquad$ $gt = t\,F(P')$.

pour la vitesse produite par une autre force P'.

Ce principe admis, on appelle $\frac{P}{m} = \varphi$ force accélératrice qui est constante, tant que ce rapport est constant. nous allons voir à quoi elle est égale, lorsque le mouvement est varié, où P n'est plus constant. on appelle unité de force celle qui appliqué à l'unité de masse produit pendant l'unité de temps l'unité de vitesse.

D'après ce que nous venons de voir, que la force est proportionnelle à la masse, et à la vitesse, on a généralement

$$P = a.gm.$$

a étant ce que devient cette Expon quand $g = 1$ $m = 1$. Si nous convenons de prendre $P = a$ pour unité de force, on aura l'Eqon $P = gm$. par conséquent

$$g = \varphi.$$

valeurs qui sont égales et qui seront constantes avec P.

## Du mouvement varié.

un tel mouvement sera produit, si un corps qui a déjà une vitesse $w$, vient à être sollicité par une force $\varphi$ qui varie à chaque instant. Dans ce cas, la force accélératrice $\varphi$ est variable, et dépend de $t$, on peut donc dire que $\varphi = f(t)$. $\varphi$ désignant la force accélératrice au bout du temps $t$. je suppose qu'un corps A qui se mouvait avec une vitesse $w$, parcourait un espace $s$, mu par une force accélératrice $\varphi$ variable à chaque instant, soit sollicité par une vitesse $w + \Delta w$, pour parcourir $s + \Delta s$, avec une force acc. $\varphi + \Delta\varphi$, ou si, $\varphi = f(t)$. $\varphi + \Delta\varphi = f(t + \Delta t)$. or la vitesse $\Delta w$ du corps pour parcourir l'espace $\Delta s$ sera d'autant plus grande que la force accélératrice sera plus considérable, et si $\varphi$ était constant, on aurait $\frac{\Delta w}{\Delta t} = \varphi$. d'après le principe que les vitesses sont proportionnelles aux temps. mais $\varphi$ étant variable, on peut toujours dire que $\Delta w$ est une vitesse plus grande que celle qui serait acquise par le mobile en vertu de la force accélératrice constante $f(t + \theta' \Delta t)$, et plus petite que $f(t + \theta'' \Delta t)$ parcourant qu'elle est comprise entre

$$\Delta t\, f(t + \theta' \Delta t).$$

$$\Delta t\, f(t + \theta'' \Delta t)$$

on peut donc dire que

$$\Delta w = \Delta t\, f(t + \theta \Delta t).$$

ce 2d membre étant un moyen entre les vitesses acquises

par les forces accélératrices max et min. pendant l'instant $\Delta t$. on déduit de là

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = f(t + \theta \Delta t).$$

d'où en passant aux limites $\frac{\partial w}{\partial t} = f(t) = \varphi$.

si au lieu de supposer une augmentation de vitesse, on avait supposé une Diminution, on aurait eu $-\frac{\partial w}{\partial t} = \varphi$. on peut donc dire que l'on a $\frac{\partial w}{\partial t} = \pm \varphi$.

cette Eq^on réunie à l'Eq^on commune à tout m^t $\frac{\partial s}{\partial t} = \pm w$ sont ce qu'on appelle les Eq^ons du Mouv^t varié.

qq^e fois on met l'une de ces Eq^ons sous la forme

$$w\,dw = \pm \varphi\, ds.$$

ces Eq^ons sont celles qui conviennent au M^t varié.

on a trouvé que $\frac{P}{m} = \varphi$. or $\varphi = \pm \frac{\partial w}{\partial t}$, on a donc

31^ème Leçon
15 juillet.

$$P = \pm \frac{\partial w}{\partial t} m.$$

et par suite $m w\, dw = \pm P\, ds$.

multipliant cette dernière Eq^on par 2 et intégrant à partir de $t=0$ où je suppose que $w = w_0$. on a

$$(1) \quad m w^2 - m w_0^2 = \pm 2 \int_{s_0}^{s} P\, ds.$$

$m w^2$ est ce qu'on appelle force vive, il ne faut y attacher d'autre sens que le produit de la masse par le carré de la vitesse.

Cette Eq^on Exprime la valeur de l'variation de la force vive pendant le tems $t$.

Si l'on divise par m l'éq^on (1). on a —

$$w^2 - w_0^2 = \pm 2\int_{s_0}^{s} g\,ds.$$

qui donne la valeur de $w^2 - w_0^2$ quand on suppose g constant.

## app^ons des formules relatives à ce mouv^t

Nous les appliquons d'abord au cas où le mouvement est uniformément varié, g étant constant, on a donc —

$$\frac{dw}{dt} = \pm g. \quad \text{et} \quad w = \pm \frac{ds}{dt}. \quad \text{d'où} \quad w\,dw = g\,ds.$$

intégrant on a (1) $w^2 = w_0^2 + 2gs$.

Qui est une éq^on du mouv^t unif^t varié. intégrant

$dw = g\,dt$ on a

(2) $w - w_0 = gt$

et (1) et (2). sont les éq^ons trouvées plus haut, et en effet si $w_0 = 0$, on a

$$w^2 = 2gs, \quad w = gt.$$

qui peuvent s'écrire

$$w = gt, \quad s = \frac{gt^2}{2}. \quad \text{éq^ons connues.}$$

---

Multipliant l'éq^on (1) par m. on a —

$$mw^2 - mw_0^2 = 2gms.$$

s'il s'agit d'un corps grave qui tombe, le 2^d membre doit être pris avec le signe +, le 1^er exprime la force vive acquise par le corps, elle est donc d'après cette éq^on égale au double de son poids par l'espace parcouru.

On a trouvé que à la latitude de Paris, et à la surface de la terre, $g = 9^m.8088$. en prenant pour unité de temps la seconde sexagésimale.

Dans le mouvement des corps graves dans le vide, on peut considérer la force accélératrice de la pesanteur comme constante, lorsque les espaces parcourus sont très petits comparativement au rayon de la terre, mais si les espaces sont assez considérables, il faut considérer la force de la pesanteur comme agissant en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre.

Proposons-nous de trouver une relation entre la vitesse et l'espace parcouru par un point matériel $m$ situé à une distance $om = r_0$ du centre de la terre qui tombe à la surface de la terre dont le rayon est $R$.

je suppose qu'il descende jusqu'en $A$, l'espace parcouru étant $s$ et $g$ exprimant l'action de la pesanteur, à la surface de la terre, et $\varphi$ celle qu'elle a en $A$ on a

$$\varphi : g :: R^2 : (r_0 - s)^2.$$

d'où $\varphi = \dfrac{gR^2}{(r_0 - s)^2}$. mais d'après l'éq.on $\dfrac{ds}{dt} = w$.

et $w\,dw = \varphi\,ds$, on a en y substituant la valeur de $\varphi$.

$$w\,dw = \frac{gR^2}{(r_0 - s)^2}\,ds.$$

intégrant, on a en supposant que pour $t=0$ $w=0$, c.à.d que le corps $m$ descende en vertu de son seul poids.

$$w^2 = 2\int_0^s \frac{gR^2\,ds}{(r_0 - s)^2} \quad \text{d'où}$$

$$w^2 = 2gR^2\left\{\frac{1}{r_0 - s} - \frac{1}{r_0}\right\}.$$

qui donne

$$w^2 = \frac{2gR^2}{r_0}\left\{\frac{s}{r_0 - s}\right\}.$$

faisant $\dfrac{2gR^2}{r_0} = a^2$. on a $w^2 = \dfrac{a^2 s}{r_0 - s}$.

qui est la relation cherchée.

Si $s = r_0 - s$, $w^2 = w_0^2$ mais alors $s = \frac{1}{2} r_0$ donc — a exprime la vitesse acquise par le mobile quand il a parcouru la moitié de la distance de la position primitive au centre de la terre.

Cherchons actuellement la relation qui existe entre la vitesse et le temps relativement au corps qui tombe à la surface de la terre.

on a $\frac{ds}{dt} = w$, et $w^2 = \frac{a^2 s}{r_0 - s}$.

d'après la relation ci-dessus. au lieu de substituer dans la 1ère la valeur de w, on intégre d'abord l'éq$^{on}$ $dt = \frac{ds}{w}$ à partir de $t = 0$, on a —

$$t = \frac{1}{w} s + \int \frac{s\, dw}{w dz} = \frac{s}{w} + r_0 \int \frac{dw}{w^2 + a^2}.$$

d'où $$t = \frac{r_0 w}{w^2 + a^2} + \frac{r_0}{a} \text{arc tang } \frac{w}{a} + \text{const}^{te}.$$

or ici la constante est nulle, car pour $w = 0$ les deux termes s'évanouissent on a donc

$$t = r_0 \left\{ \frac{w}{w^2 + a^2} + \frac{1}{a} \text{arc tang } \frac{w}{a} \right\}.$$

telle est la relation entre le temps et la vitesse, on conclura de cette relation, et de celle trouvée entre la vitesse et l'espace la relation qui doit exister entre l'espace et la vitesse.

On peut chercher comment ces éq$^{ons}$ se modifient quand le point m est très rapproché de la terre, alors $a^2 = 2gR$ car $\frac{R}{r_0} = 1$ sensiblement. et $w^2 = 2gs$ 1ère éq$^{on}$ du mouvement uniformément varié. la valeur de t devient $t = \frac{w}{g}$. 2de éq$^{on}$ de ce mouv$^{t}$ =

Considérons maintenant le mouvement d'un corps grave abandonné à l'action de la pesanteur, et soumis en même tems à la résistance de l'air qui agit en sens inverse de la Pes$^{r}$. j'appelle t le tems que le corps met à descendre en A, w, $\varphi$ — la vitesse et la force accélératrice du mobile au bout du tems t, et g l'action de la pesanteur à la surface de la terre. la résistance de l'air dépend de la vitesse du mobile, on peut dire qu'elle est égale à $f(w)$. la force qui sollicite le mobile est donc $P = mg - f(w)$. or $\frac{P}{m} = \varphi$. donc — donc $\varphi = g - \frac{1}{m} f(w)$. or $\frac{ds}{dt} = w$. donc —

$$\frac{dw}{dt} = (g - \tfrac{1}{m} f(w)).\delta.$$

32ème Leçon

17 juillet.

L'exp^ce a Montré que généralement la résistance de l'air diminue l'intensité de la pesanteur proportionnelle au carré de la vitesse. admettons cette hypothèse, et la 1ère Eqn ci-dessus se réduit à

$$\frac{dw}{dt} = g - \frac{K}{m} w^2.$$

si $f(w) = Kw^2$. pour intégrer cette Eqn je fais $\frac{K}{m} = ga^2$.

vient $g\,dt = \frac{dw}{1-a^2w^2}$. Multipliant par a, vient

$$ag\,dt = \frac{a\,dw}{1-a^2w^2} = \frac{1}{2} a\,dw \left( \frac{1}{1+aw} + \frac{1}{1-aw} \right).$$

intégrant, il vient

$$2agt = l(1+aw) - l(1-aw) + C.$$

on trouve C en supposant que $w_0$ est la vitesse initiale du mobile, quand $t=0$, et alors.

$$2agt = l\left(\frac{1+aw}{1-aw}\right) - l\left(\frac{1+aw_0}{1-aw_0}\right)$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$2agt = l\left( \frac{1+aw}{1-aw} \cdot \frac{1-aw_0}{1+aw_0} \right).$$

par conséquent

$$\frac{1-aw_0}{1+aw_0} \cdot e^{-2agt} = \frac{1-aw}{1+aw}.$$

d'où $1-aw = be^{-2agt}(1+aw)$. si $b = \frac{1-aw_0}{1+aw_0}$.

on tire de là

$$aw = \frac{1 - be^{-2agt}}{1 + be^{-2agt}}$$

telle est la relation qui existe entre la vitesse et le temps pour un corps qui tombe dans un milieu résistant.

Si le temps devient très considérable — on voit sensiblement — $w = \frac{1}{a}$ qui exprime que la vitesse est constante, donc le corps finit par tomber d'un mouvement uniforme.

Cherchons maintenant la relation entre la vitesse et l'espace qu'un corps parcourt en tombant dans un milieu résistant.

On a trouvé $\frac{dw}{dt} = g - \frac{K}{m} w^2$. et $\frac{ds}{dt} = w$.

Multipliant en croix, on aura, en posant comme ci-dessus $\frac{K}{m} = g a^2$.

$$w\,dw = g(1 - a^2 w^2)\,ds. \quad \text{d'où}$$

$$g\,ds = \frac{w\,dw}{1 - a^2 w^2}.$$

Multipliant $2a^2$, on a

$$2a^2 g\,ds = \frac{2a^2 w\,dw}{1 - a^2 w^2}.$$

intégrant, il vient

$$2a^2 g s = -l(1 - a^2 w^2) + c.$$

Mais si on exécute l'intégration à partir de $t = 0$, en supposant que la vitesse initiale soit $w_0$ on a

$$-2a^2 g s = l\left(\frac{1 - a^2 w^2}{1 - a^2 w_0^2}\right).$$

Donc

$$1 - a^2 w^2 = (1 - a^2 w_0^2)\, e^{-2a^2 g s}.$$

telle est la relation cherchée. Si on éliminait $w$ entre cette Eq^on et celle trouvée ci-dessus, on aurait la relation qui existe entre l'espace et le temps.

Dans cette Eq^on on voit encore que si $s$ est très considérable on a $w = \frac{1}{a}$. Donc le mouvement finit par être uniforme

Si le mouvement avait lieu de bas en haut, la pesanteur s'ajouterait à la résistance pour s'opposer à l'ascension du corps, il faut donc dire que la force motrice $P$ a pour valeur

$$P = -mg - f(w).$$

par suite

$$w\,dw = \left(-g - \frac{K}{m} w^2\right) ds. \quad \text{or } \frac{K}{m} = g a^2.$$

d'où donc

$$g\,dt = -\frac{dw}{1 + a^2 w^2}, \text{ et } g\,ds = -\frac{w\,dw}{1 + a^2 w^2}.$$

multipliant par $a$, —

$$a g\,dt = -\frac{a\,dw}{1+a^2w^2}.$$

intégrant à partir de $t=0$ où je suppose que la vitesse initiale soit $w_0$ — il vient

$$agt = -\operatorname{arctang}(aw) + \operatorname{arctang}(aw_0).$$

1ère relation entre le temps et la vitesse.

intégrant l'Eqon $g\,ds = -\frac{w\,dw}{1+a^2w^2}$, on a —

$$-2a^2gs = -l(1+a^2w^2) + l(1+a^2w_0^2).$$

qui peut s'écrire

$$\frac{1+a^2w^2}{1+a^2w_0^2} = e^{-2a^2gs}$$

relation entre l'espace et la vitesse d'un mobile qu'on lance de bas en haut dans un milieu résistant.

Si l'on fait dans cette Eqon $w=0$ on aura

$$s = \frac{1}{2a^2g}\,l(1+a^2w_0^2)$$

qui désignera la plus grande hauteur à laquelle le corps s'élevera. —

Dans les questions que nous venons de résoudre, on prenait le poids du corps, tel qu'on le trouve en le calculant dans le vide, mais on sait qu'il déplace de l'air, et qu'il perd ainsi un poids égal au volume d'air qu'il déplace.

Si donc $\mu$ est la masse d'air déplacée, son poids sera $g\mu$. celui du corps sera donc $g(m-\mu)$. et dans la formule, on aura —

$$\frac{dw}{dt} = g\left(\frac{m-\mu}{m}\right) - \frac{k}{m}w^2.$$

on voit qu'il suffit dans les résultats ci-dessus de ~~remplacer~~ noter $g\left(\frac{m-\mu}{m}\right)$ ~~par~~ $g'$. et d'y remplacer $g$ par cette Expon ~~dans~~.

Reprenons la formule qui exprime la relation entre la vitesse et le temps que met à parcourir un espace donné un corps A qui n'a pas de vitesse initiale, —

elle est,
$$aw = \frac{1 - e^{-2agt}}{1 + e^{-2agt}}.$$

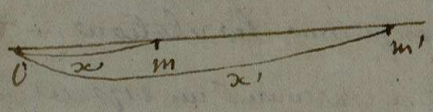
La quantité $a$ qui est ici inconnue, peut s'éliminer au moyen de la vitesse finale $\Omega$ qu'on peut calculer par exp$^{ce}$ car alors on a $\Omega = \frac{1}{a}$; remp$^t$ $a$ par sa valeur, on a
$$\frac{w}{\Omega} = \frac{1 - e^{-2\frac{g}{\Omega}t}}{1 + e^{-2\frac{g}{\Omega}t}} = 1 - 2\frac{e^{-2\frac{g}{\Omega}t}}{1 + e^{-2\frac{g}{\Omega}t}}.$$
relation entre la vitesse et le tems.

Newton en faisant des exp$^{ces}$ a trouvé que l'on avait sensiblement $\Omega = g$. on a donc dans ce cas.
$$\frac{w}{\Omega} = 1 - 2\frac{e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}.$$
si donc on fait $t = 2''$. on a — pour la valeur de $2\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$ une exp$^{on}$ comprise entre $\frac{2}{e^4}$ et $\frac{1}{e^4}$. or $e = 2,7$ donc cette fraction est très petite, on voit donc qu'au bout d'une seconde la vitesse commencera à être uniforme car on aura sensib$^t$ $\frac{w}{\Omega} = 1$.

## Attractions et répulsions de deux corps.

je prends la ligne qui joint ces deux points matériels $m$ et $m'$ pour axe des $x$, soient $x$ et $x'$ les distances de ces masses à l'origine, et $P$ la force d'attraction ou de répulsion de ces deux corps.

nous considérerons que $+P$ est la force d'att$^{on}$ dans les résultats obtenus par $+P$ de changer $+P$ en $-P$. si l'on considérait $P$ comme une force répulsive.




au point $m$ on a — pour la force accélératrice $\varphi = \frac{P}{m}$ or $\varphi = \frac{dw}{dt}$. on aura donc
$$m\frac{dw}{dt} = \pm P.$$
pour la relation qui lie les forces qui font mouvoir le point $m$

ou $w = \pm \frac{dx}{dt}$. on aura donc en Diff.t $\frac{dw}{dt} = \pm \frac{d^2x}{dt^2}$.

par substitution

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \pm P.$$

On met ici le signe $\pm$ parceque la vitesse $w$ doit être de même que $P$, et qu'on doit mettre $+$ devant $P$ quand elle est dirigée dans le même sens que la vitesse, et le signe — quand elle est dirigée en sens inverse.

Pour l'autre point $m'$ on aura une valeur de $P$ égale mais de signe contraire parce qu'il marchera toujours dans un sens opposé

$$m' \frac{d^2x'}{dt^2} = \mp P.$$

si l'on ajoute ces deux Eq.ons on a

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \mp m' \frac{d^2x'}{dt^2} = 0.$$

Eq.on qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^2(mx + m'x')}{dt^2} = 0.$$

où $mx + m'x'$ est le Moment du centre de gravité des deux points $m$ et $m'$ par rapport au plan des $zy$. et l'on sait que

$$mx + m'x' = (m + m')\xi$$

en désignant par $\xi$ l'abscisse du centre de gravité. substituant cette valeur on a

$$(m + m')\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0.$$

donc $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$ d'où $\frac{d\xi}{dt} = \text{const.}$

on voit donc que dans ce mouvement de deux corps qui s'attirent ou se repoussent, le centre de gravité de leur ensemble reste toujours

On peut déterminer cette vitesse $\Omega_0$ du centre de gravité. Car si je différentie l'Eqon

$$mx \pm m'x' = (m+m')\,\xi.$$

on a $$m\frac{dx}{dt} \pm m'\frac{dx'}{dt} = (m+m')\frac{d\xi}{dt}.$$

par conséquent $$mw \pm m'w' = (m+m')\,\Omega_0.$$

où cette vitesse $\Omega_0$ étant constante est la même que celle qui a lieu en vertu des forces initiales $w_0$ et $w'_0$. et qu'on a

$$mw_0 \pm m'w'_0 = (m+m')\,\Omega. \quad (1)$$

on a donc $$\pm mw \pm m'w' = \pm mw_0 \pm m'w'_0.$$

telle est la relation qui lie les masses et les vitesses des deux points matériels, et (1) donne la valeur cherchée de la vitesse constante du centre de gravité.

Lorsque les deux points se mouvront ensemble. $w = w'$, et la relation deviendra

$$\pm(m+m')\,w = \pm mw_0 \pm mw'_0.$$

d'où $$w = \frac{\pm mw_0 \pm mw'_0}{m+m'}.$$

on voit donc que la vitesse finale sera précisément celle du centre de gravité, ce qui devait avoir lieu puisqu'alors le centre de gravité se meut simultanément avec les corps.

Pour déterminer la loi du mouvement qui a lieu entre ces deux points matériels, on ne peut par intégrer directement les Eqons

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \pm P, \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = \mp P.$$

parceque P est seulement fonction de t mais encore de la distance $r = x' - x$ qui sépare les deux points. je multiplie la 1ère de ces Eqns par $dx$, et la 2de par $dx'$, et j'ajoute, ou a

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t} dx + m' \frac{\partial^2 x'}{\partial t} dx' = \pm P (dx - dx') \frac{dt}{dt} = \mp P dr.$$

or on sait que $w = \frac{dx}{dt}$ ; et $w dw = \varphi ds$. par conséquent

$$w dw = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx \quad \text{puisque } s = x, \text{ et que } \varphi = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

de même on a

$$w' dw' = \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} dx'.$$

dans le cas de l'attraction on aura donc en remplaçant ces valeurs dans l'Eqn ci-dessus,

$$m w dw + m' w' dw' = - P dr$$

intégrant à partir de $r_0$ et $r$ on a

$$m w^2 + m' w'^2 - (m w_0^2 + m' w_0'^2) = - 2 \int_{r_0}^{r} P dr$$

cette Eqn nous fait voir que la somme des forces vives augmente dans le cas d'attraction, et diminue dans le cas de répulsion, car dans un cas $r_0 > r$ et dans l'autre $r_0 < r$. elle fait voir de plus que si $w_0$ et $w_0'$ sont nuls, les forces vives augmenteront, soit qu'il y ait attraction, soit qu'il y ait répulsion.

SORBONNE

ECOLE
POLYTECHNIQUE

COURS
D'ANALYSE

1822—23