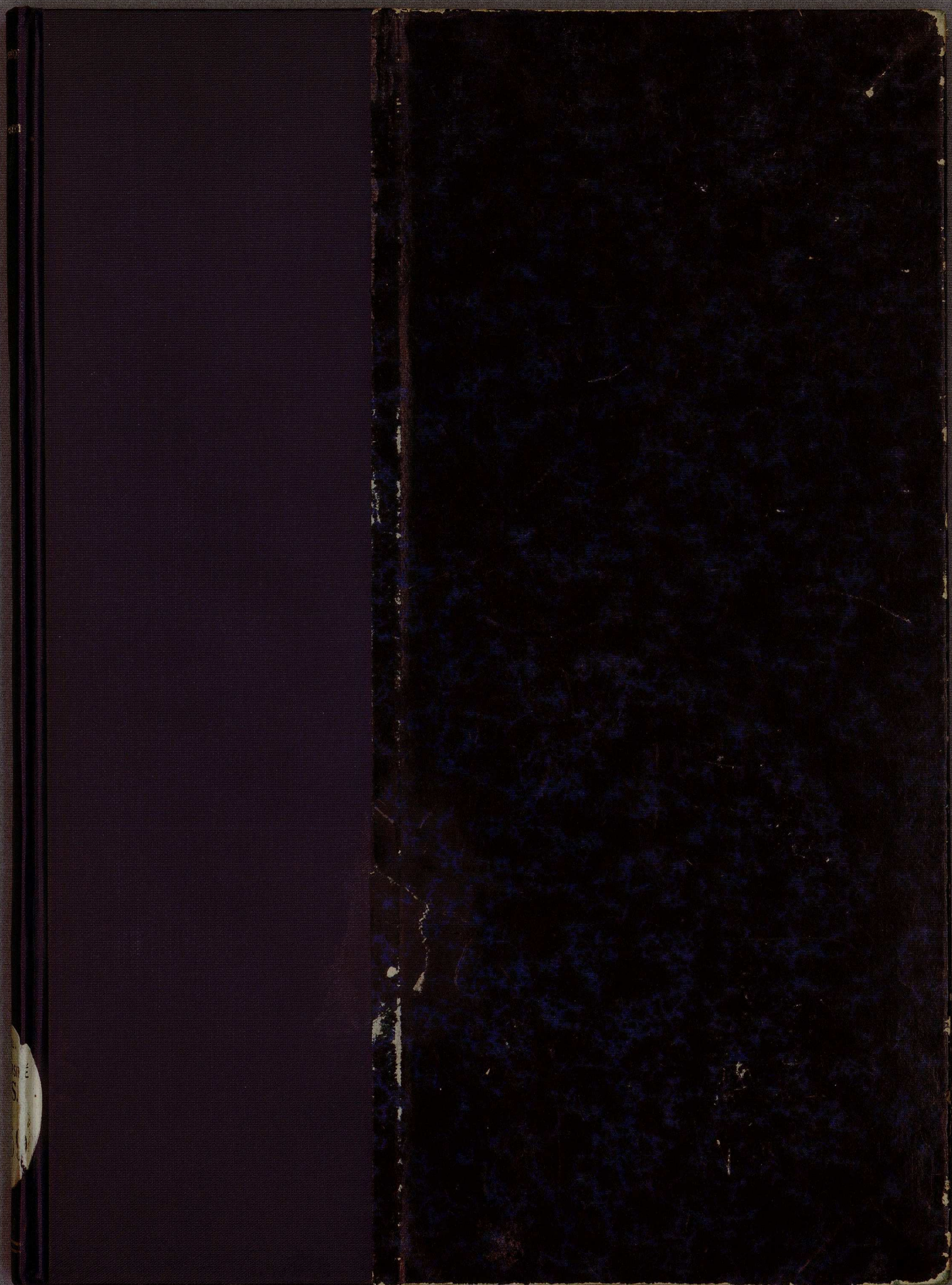






No 1759

Cauchy

fol 2 à 9

Formules pour la Resolution des equations  
1837

fol 10 à 18

Suite de la methode de fonctions interpolaires  
1837





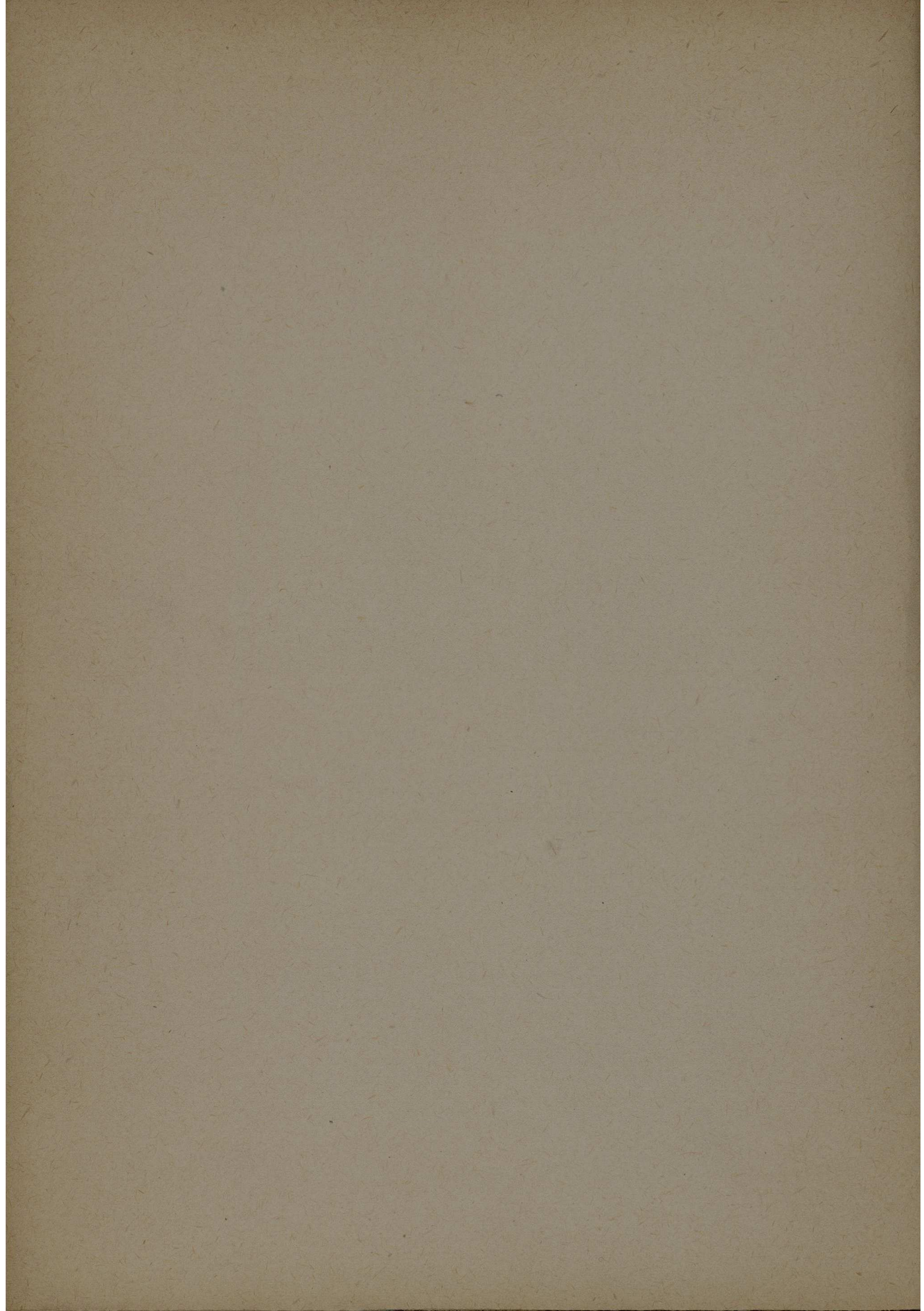








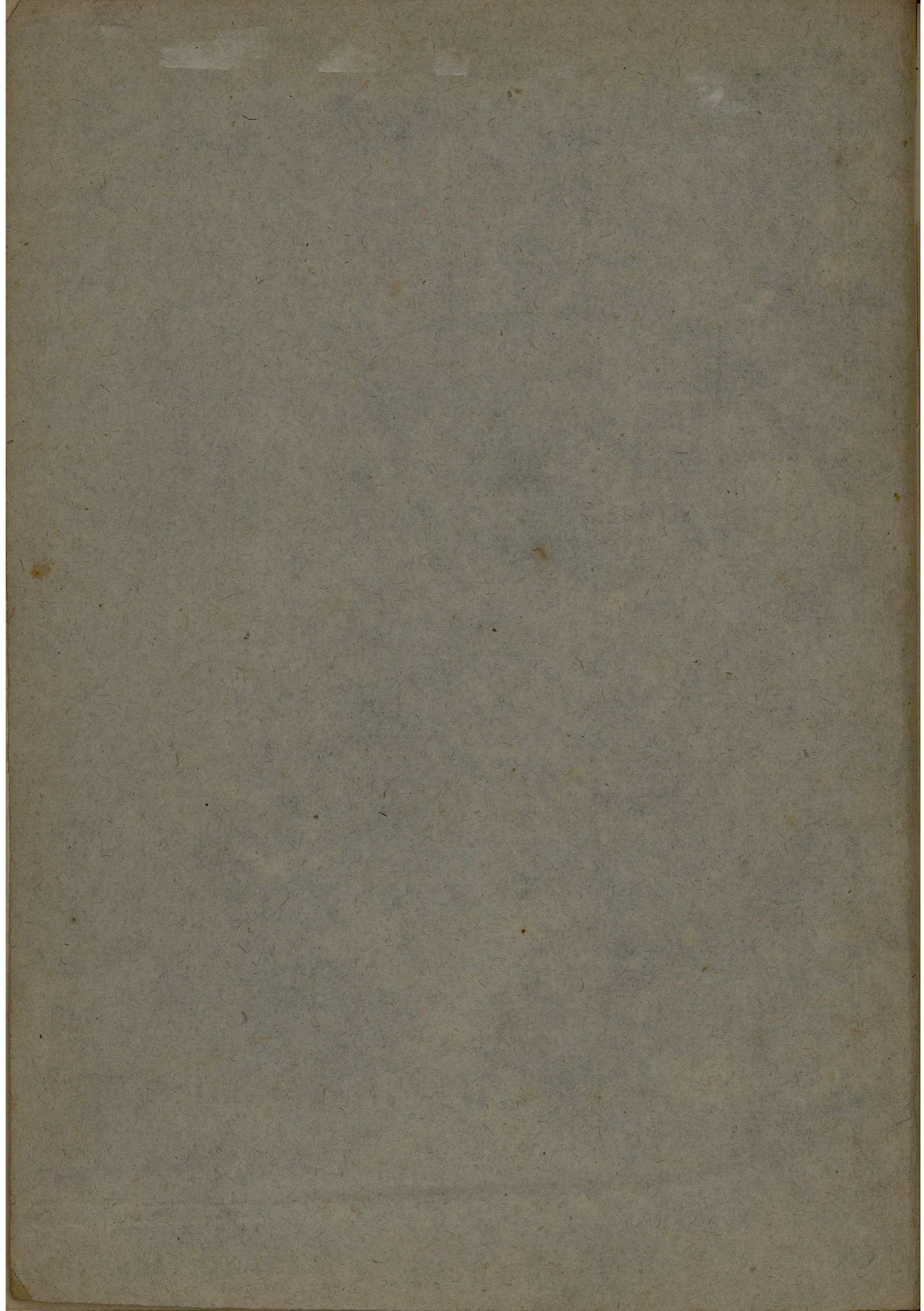














de mémoire: Formules pour la résolution des équations  
est relatif à leur résolution approchée - et a été complété  
aux 2 notes de C. R. t. V (18 septembre et 23 octobre 1857)  
dont l'une seul est insérée - avec pour la 2<sup>e</sup> une  
allusion à l'emploi de fonctions intégrales d'analyse.  
Le texte complété des notes (non imprimées) se trouve  
dans les 2 derniers pages.



Jules Drach

Une partie de ces résultats sont les figures  
de mémoire: Suite inf. numériques de — CR t. XI, 23 nov. 1850  
p. 829







# Resolution Is égité



1<sup>re</sup> Représentation.

1<sup>re</sup> Théorème Considérons une série multiple composée de termes réels et positifs, dont les uns sont constants, les autres proportionnels à des puissances entières d'une variable réelle et positive  $t$ . Nous pouvons toujours décomposer ces termes en proportionnels à la  $n$ <sup>me</sup> puissance de  $t$ , et supposer que le nombre de termes de chaque ordre est toujours fini. Soit ainsi

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$$

les termes constants, les  $S_1$  proportionnels à  $t$ , les  $S_2$  à  $t^2$ , etc., de telle manière que chaque terme entre dans un seul  $S_n$  et que le nombre  $S_n$  restant constant de termes d'un ordre quel on suppose  $n$ . Soient les

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}, \dots$$

Soient donc les termes constants, les  $S_1$  proportionnels à  $t$ , les  $S_2$  à  $t^2$ , etc., de telle manière que chaque terme entre dans un seul  $S_n$  et que le nombre  $S_n$  restant constant de termes d'un ordre quel on suppose  $n$ .

(1)  $S_0, S_1, S_2, \dots$

Soient les termes constants, les  $S_1$  proportionnels à  $t$ , les  $S_2$  à  $t^2$ , etc., de telle manière que chaque terme entre dans un seul  $S_n$  et que le nombre  $S_n$  restant constant de termes d'un ordre quel on suppose  $n$ .











De n, et la p<sup>re</sup>mière condition est l'équilibre de la  
somme des p<sup>re</sup>mières

$$S_0 + S_1 + \dots = S_n$$

juste à l'équilibre qu'il subira, il convient de  
changer la mode de distribution, pas plus que variation  
compte de l'un ou de l'autre des p<sup>re</sup>mières à l'équilibre  
toute p<sup>re</sup>mière. On a alors la série (1) suivante  
divergente.

2<sup>e</sup> Théorème. Admettons une série convergente compte de  
l'un ou de l'autre des p<sup>re</sup>mières, les autres  
p<sup>re</sup>mières et de la p<sup>re</sup>mière entière d'une variable  
sont nulles

$$(2) \quad S_0, S_1, S_2, \dots$$

Des p<sup>re</sup>mières p<sup>re</sup>mières l'un ou l'autre des p<sup>re</sup>mières de  
telle manière que chaque p<sup>re</sup>mière est dans un seul  
des p<sup>re</sup>mières, et qu'il n'y a pas de p<sup>re</sup>mière de l'un ou  
de l'autre des p<sup>re</sup>mières à n. Elles sont

$$(3) \quad S_0, S_1, S_2, \dots$$

les

$S_n$

la somme des p<sup>re</sup>mières de l'un ou de l'autre des p<sup>re</sup>mières

de



L. le Tourneur

(1)  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$

At convergente, nos grand<sup>es</sup> en des autres D. C. et C. en. un subit  
opposée au moment de la fin (12), nous att. l'année  
d'après convergente, et enfin l'année C. C. en. nous pas la  
au même en l'opposée à l'année l'année de distribution  
D. C. et C. en. nous pas la

 $\rho, \rho_1, \rho_2, \dots$ 

Deuxième. En effet, lorsque dans une courbe donnée  
l'angle  $\phi$  est très petit, on peut approximer la courbe  
par une droite, la droite (1) ne pouvant être convergente sans  
être aussi une tangente à la courbe en ce point sans

After converging, large in size, a wide distribution,

et de restriction. Das tun die von Lebesgue'sche  
(v. la 1<sup>re</sup> theorie). Ist 3. cplex. common —

(v. l. c. the river) (2) et tunc quod convergenti autem dicitur

*Turnula arctica* Bergström (2) p. citata

~~Les~~ ~~autres~~ ~~en~~ ~~donne~~ ~~un~~ ~~exemple~~ ~~que~~ ~~la~~ ~~summe~~ ~~de~~  
plusieurs termes d'une <sup>offre toujours</sup> ~~et~~ ~~donne~~ ~~quelque~~ ~~affinité~~ ~~entre~~  
un module intervenant à la somme de leurs modules, les  
modules de polynômes

$$S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3}, \dots$$

*Sorbus intermedia* *can poly americana*

$$S_{\tau 1}, S_{\tau 1} + S_{\tau 2}, \dots$$



$$S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

Lesque in p. Mon. De cas ou

My

Or is there not ~~an~~ <sup>an</sup> interest

Chaque ~~une~~ relation ~~en~~ fait un ~~premier~~  
et elle sera ~~consignée~~ dans l'analyse  
algébrique ~~indiquée~~ immédiatement ~~comme~~  
nous ~~le~~ ~~verrons~~.



de Thémis. Aut

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

Donnera de coefficients ont les termes généraux

$$A_n \text{ et } T_n.$$

P. d'ailleurs + une variable qui s'écrit pour module  $I$ .

Si la détermination

$$\xi = A_1 I + A_2 I^2 + \dots$$

$$v = T_1 \xi + T_2 \xi^2 + \dots$$

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = A_1 I + A_2 I^2 + \dots \\ v = T_1 \xi + T_2 \xi^2 + \dots \end{cases}$$

obtenant des valeurs finies de  $\xi$  et de  $v$ , alors, en posant

$$(4) \quad x = a + at + at^2 + \dots$$

et

$$(5) \quad u = u_1 x + u_2 x^2 + \dots$$

on pourra développer  $u$  suivant les puissances ascendantes de  $t$ ,



~~on suppose d'abord que~~

$$(6) \quad u = a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

les valeurs de  $b_1, b_2, \dots$  sont déterminées

$$(7) \quad b_1 = a_1 u, \quad b_2 = a_1^2 u^2 + a_2 u, \quad b_3 = a_1^3 u^3 + 2a_1 a_2 u^2 + a_3 u, \dots$$

Démonstration. En effet, on a d'après le théorème précédent  
les formes usuelles de  $u$  ont le module de  
inférieur à  $\frac{1}{2}$  et l'équation (4) nous donne  
une équation de degré  $n$  en  $u$ .

la racine de l'équation (4) est une racine de l'équation

(4) en  $u$  (voir l'analyse algébrique)

$$(A_1 I + A_2 I^2 + \dots)^n = A_1^n I^n + 2A_1 A_2 I^{n+1} + (A_2^2 + 2A_1 A_3) I^{n+2} + \dots$$

etc

en comparant, à l'équation

$$(a_1 t + a_2 t^2 + \dots)^n = a_1^n t^n + 2a_1 a_2 t^{n+1} + (a_2^2 + 2a_1 a_3) t^{n+2} + \dots$$

etc

Démonstration. En effet, on a d'après l'analyse  
algébrique en vertu du théorème, l'équation (4)  
trouve une valeur particulière de  $u$

dont le module est inférieur à  $\frac{1}{2}$ , et l'équation (8)

une valeur déterminée de  $u$  dont le module sera



inférieur à  $n$ . D'après, comme nous l'avons vu (l'analyse algébrique)

$$(A_1 I + A_2 I^2 + \dots)^n = A_1^n I^n + n A_1^{n-1} A_2 I^{n+1} + (n A_1^{n-2} A_2^2 + \frac{n(n-1)}{2} A_1^{n-2} A_2^2) I^{n+2} + \dots$$

on en conclut à tortiori

$$(a_1 t + a_2 t^2 + \dots)^n = a_1^n t^n + n a_1^{n-1} a_2 t^{n+1} + (n a_1^{n-2} a_2^2 + \frac{n(n-1)}{2} a_1^{n-2} a_2^2) t^{n+2} + \dots$$

On a vu que les termes puissances de  $n$  sont développés, comme une variable suivant le même ordre que les puissances ascendantes de  $t$ . Or, en substituant les développements ainsi obtenus dans le second membre de l'équation (4), et ayant égard au théorème 2, qui garantit de trouver ces puissances dans une même colonne partielle tant les termes multipliés par une même puissance de  $t$ , on obtient précisément l'équation (6).

Remarque. On donne. D'après ce que nous venons de voir, on sait les puissances ascendantes et entières de  $t$ , sont affectés de termes proportionnels à  $t$ , la même chose est proportionnel à  $t$ , et l'on voit que les valeurs numériques de différents termes développés sont formés exactement comme une série convergente. Les séries propres sont convergentes.



les mêmes convergent, par suite du 2<sup>e</sup> théorème.

Ce qui est écrit  $1, 1, 1, \dots = (1, 1, 1, 1, \dots)$

$x, y, z, \dots$

les sommes des deux séries sont, et

$x, y, z, \dots$

convergent en même temps, lors qu'on substitue  
à chaque terme ses valeurs numériques. Par conséquent une série  
multiple ordonnée suivant les puissances ascendantes

des  $x, y, z, \dots$  est convergente, si elle l'est en substituant

des valeurs numériques à  $x, y, z, \dots$  et si elle l'est en substituant

les puissances ascendantes de  $t$ , il suffira qu'on

obtienne une série convergente en remplaçant dans

la série multiple chaque coefficient par son

module et les variables

$x, y, z, \dots$

par les quantités positives

$x, y, z, \dots$

Note. Certainement, dans lequel la série intégrée

peut aussi être développée en puissances

croissantes, la même conclusion se trouve.



Il semble à priori avoir que si  $n, y, \dots$  sont développables  
 suivant le premier ascendant de  $t$ , les autres  
 ascendants développables sont les premiers ascendants de  
 $n, y, \dots$ , cette même fonction a tous ses premiers développables  
 suivant les premiers ascendants de  $t$ ; mais on peut  
 vérifier et démontrer sans qu'il soit besoin  
 d'aucune supposition dans les théorèmes précédents. Mais  
 pour reconnaître le nombre des conditions, il suffit de  
 prendre

$$u = \frac{1}{2-n}, \quad n = 2t - 2t^2.$$

Alors on est développable suivant les premiers ascendants  
 de  $n$ , tout quel qu'il soit.

$$u \geq 0 \Rightarrow n \leq 2.$$

De plus le nombre de  $n$  est infini à 2, et se  
 réduit à 1 unitaire, lorsque pour  $t=1$ , dans l'équation

$$n = 2t - 2t^2.$$

Cependant on peut dire que les tests de  $n$  que

$$\frac{1}{2-2t+2t^2}$$

sont développables pour  $t=1$ , au sein d'un système  
 ordonné sont les premiers ascendants de  $t$ .

Par conséquent il n'y a que deux cas. Car on a



$$\frac{1}{1-2t+2t^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}t+t^2} = \frac{1}{2} (1-\frac{1}{2}t)^{-1} (1-t)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \dots \right] \left[ 1 + t + t^2 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} + (1+\frac{1}{2})t + 2(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})t^2 + \dots$$

Calculer le développement de

$$2^{n-1} \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} t^n$$

Il est clair d'ailleurs que l'ensemble de la série  
représente un nombre de  $t$  inférieurs à  $\frac{1}{2}$ , non  
seulement à l'unité, mais à la fraction  $\frac{1}{2}$ . Donc.

Remarquons que, si l'on pose  $x = \frac{1}{2}$ , le nombre de  $t$   
représenté par la série sera le même que le nombre de  $n$  termes de la suite géométrique (1)  $x^n$  quand on

prend

$$x = 2t - 2t^2$$

quand on substitue la dérivée de  $x$  par rapport à  $t$ , on aura

$$x = 2I + 2I^2$$

Or puisque  $x$  tend vers  $\frac{1}{2}$ , il faut prendre  
ici  $I = \frac{1}{2}$ , donc, en vertu du 1<sup>er</sup> théorème précédent



$$\frac{1}{1-2t+2t^2}$$

Indéveloppable étant la puissance absolue de  $t$  pour  
 $t < \frac{1}{2}$ , ce qui est effectivement exact.

1<sup>re</sup> Théorème Put

~~$$L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$~~

(8)  $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots$

un fonction qui donne une suite pour un nombre de  $n$   
 inférieur à  $\frac{1}{2}$ , et comme les des etc. l'opérateur

$$L(x)$$

Le même développement. On a vu que les dérivées

~~$$L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$~~

un fonction Si on substitue  $L(x)$  on remplacera  
 l'opérateur  $n$  par un

Est maintenant

$$L(x)$$

un fonction de  $n$  qui, pour un très petit nombre de  
 nombres de  $n$  est développable en une suite convergente  
 dont la puissance absolue de  $n$  pour  
 une suite de base

(8)  $L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$



Si, dans l'écriture  $L(x)$  on remplace  $x$  par  
une expression numérique

$$\bar{x} = ve^{1/\sqrt{v}} = v / (e\sqrt{v} + \sqrt{e}v)$$

On le rendra dit  $v$ , en posant en luttant le  
modèle existant avec  $v$  ou  $1/v$ , mais le  
modèle de l'écriture  $L(\bar{x})$  acquerra seulement  
diverses valeurs. On le plus grande sera  
l'écriture  $v$

$$L(\bar{x}).$$

On pose, maintenant sans peine la proposition suivante

1<sup>re</sup> thèse. Supposons que l'écriture  $L(x)$  soit

un développement en série entière du modèle de son

développement soit développable en série convergente

pour un modèle de  $n$  inférieur à la quantité

positive  $\xi$ ; les coefficients de  $x^n$  dans le

développement seront les coefficients de  $x^n$  dans

le développement de  $x^n$  dans le coefficient de  $x^n$  dans

$L(x)$  sera un modèle inférieur à l'impulsion

$$\frac{1}{v^n} L(\bar{x}) \text{ ou } L\left(\frac{\bar{x}}{v^n}\right),$$

restera le même de  $v$  et de  $v$  l'écriture



leamde de  $\bar{n}$ , et leamde etat interm  $\bar{n}$ . 8 9

Demonstration. Supposons les developpables pour un triangle  
modulées, ainsi convergentes, arrivées de l'équation (8); et  
soit  $Q(x)$  le développement de la fonction de la série

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots$$

et soit  $Q(x)$  la fonction

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

Remarque

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$z = r e^{i\theta}, \quad \bar{z} = r e^{-i\theta} = r z.$$

Conclusion

$$Q(\bar{z}) = a_0 + a_1 r z + a_2 r^2$$







Suite de la méthode des fonctions interpolaires  
(note du 18 sept. 1837)

Reproduit en partie dans un Mémoire

CR t. XI, 23 nov. 1840

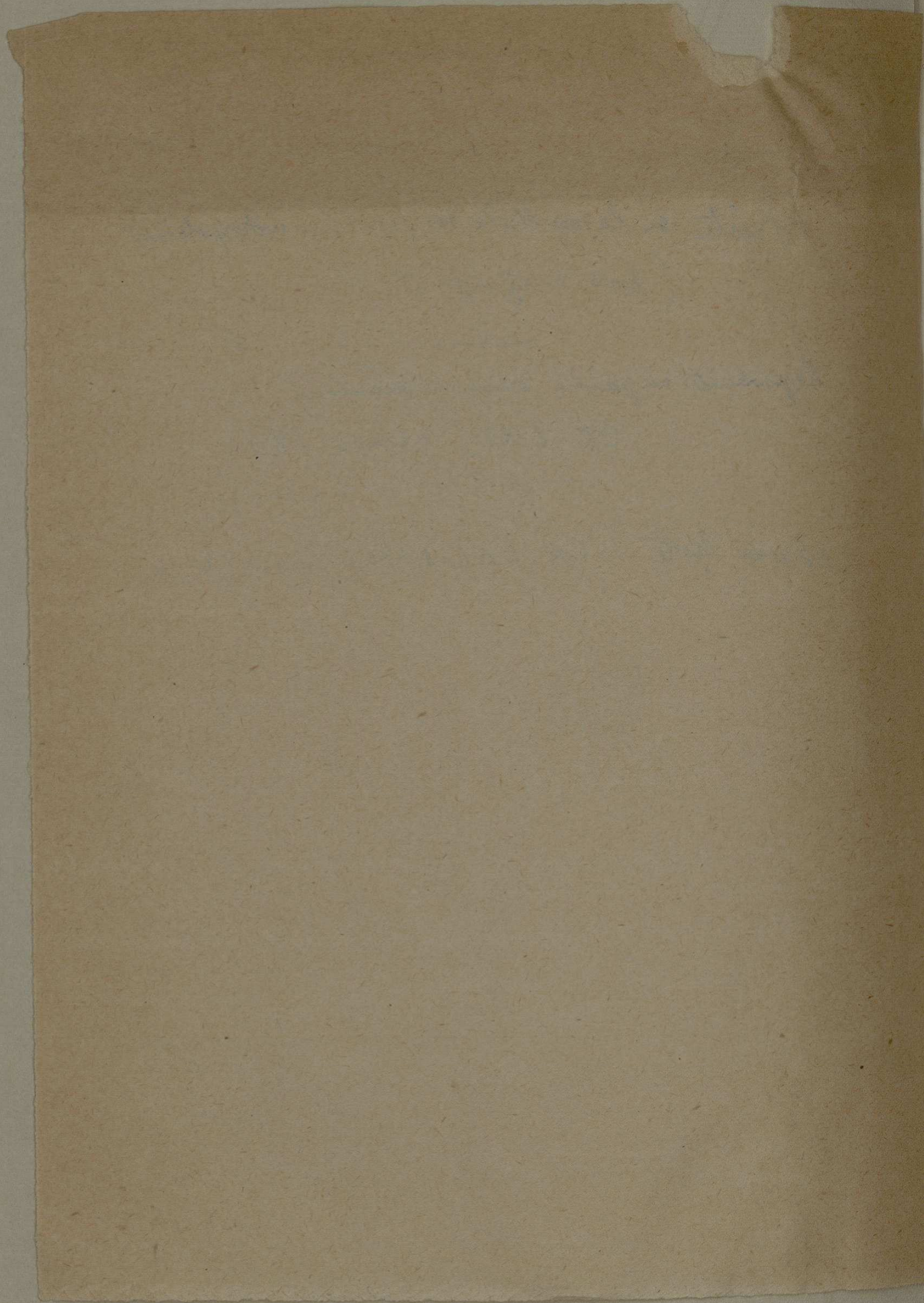
— p. 829 —

et une Note. CR. t. XI, p. 776 (16 nov. 1840)



90







Conte Interprétation de l'écriture italyenne (Lettre du 19 Sept. 1827)

Dubod, de la commune

et de

les plus petite et la plus grande des valeurs que l'on  
 $\frac{1}{2} \mathcal{L}''(n)$  puisse acquiesce entre la limite

$$n = n_0, \quad n = X,$$

on trouve en effet deux quantités dont la première est  
 inférieure à la plus petite des valeurs, la seconde supérieure à  
 la plus grande, l'équation

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}''(n) = \mathcal{H}_-(v, \mathcal{V})$$

donne la formule (H) introduisant les nouvelles

$$(I) \quad \mathcal{L}(n) = \mathcal{H} \left[ \mathcal{L}(a) + (n-a) \mathcal{L}(a, b) + v(n-a)(n-b), \mathcal{L}(b) + (n-b) \mathcal{L}(a, b) + \mathcal{V}(n-a)(n-b) \right]$$

Partant de là, comme on a vu précédemment, et en opérant sur  
 l'expression précédente pour avoir  
 etc.

$$(J) \quad \mathcal{I}_{a, b} = a - \frac{\mathcal{L}(a)}{\mathcal{L}(a, b)} = b - \frac{\mathcal{L}(b)}{\mathcal{L}(a, b)}$$

on aura évidemment, et quel que soit  $n$ ,

$$(K) \quad \mathcal{L}(a) + (n-a) \mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b) + (n-b) \mathcal{L}(a, b) = (n - \mathcal{I}_{a, b}) \mathcal{L}(a, b)$$

puis, en opérant la formule (G) donne

$$(L) \quad \mathcal{L}(n) = \mathcal{H} \left[ (n - \mathcal{I}_{a, b}) \mathcal{L}(a, b) + v(n-a)(n-b), (n - \mathcal{I}_{a, b}) \mathcal{L}(a, b) + \mathcal{V}(n-a)(n-b) \right]$$

puis, en posant successivement  $a = n_0, b = X$ , on trouve



$$f(x) = \frac{1}{2} \{ (x - [n_0, X]) f(n_0, X) + v(n - n_0)(n - X), (n - [n_0, X]) f(n_0, X) + v(n - n_0)(n - X) \}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \{ (x - [n_0, X]) f(n_0, X) + v(n - n_0)(n - X), (n - [n_0, X]) f(n_0, X) + v(n - n_0)(n - X) \}$$

Or, comme, dans cette dernière <sup>équation</sup> ~~fonction~~, les deux fonctions de  $n$  comparées entre les accolades se réduisent l'une et l'autre à la même fonction  $f(x)$  pour  $n = n_0$ , [en vertu de la condition (B)]  $= f(x_0)$  pour  $n = n_0$ , à  $f(x)$  pour  $n = X$ , on tire de cette même équation jointe à la même 2

1<sup>re</sup> thèse. Soit

$$(1) \quad f(x) = 0$$

une équation dont le premier membre n'est fonction continue de  $x$  dans que l'intervalle de  $n_0$  à  $X$  et de second ordre entre les limites

$$n = n_0, n = X > n_0.$$

Montrons que les plus petites, et les plus grandes valeurs quelconques  $\frac{1}{2} f''(x)$  prises dans cet intervalle ont il s'agit, en lieu d'une seule quantité la première inférieure à la plus petite de ces valeurs, la seconde supérieure à la plus grande, et en outre quelconque valeur du second degré.

$$(2) \quad (n - [n_0, X]) f(n_0, X) + v(n - n_0)(n - X) = 0, (n - [n_0, X]) f(n_0, X) + v(n - n_0)(n - X) = 0$$

Supposons d'ailleurs que, dans l'intervalle de  $n_0$  à  $X$ , on suppose entre les limites  $n_0, X$  vérifiant l'équation (1), soit l'équation (1), soit les équations (2) ou seulement l'une d'elles.



elle, comme

$\xi$  et  $\bar{\xi}$  les plus petite et le plus grande des racines  
pour l'équation (1)

$n_1$  et  $\bar{X}_1$  les plus petite et le plus grande racine de l'équation  
(2), autre

$n_1, n_1 + \delta_1, \bar{X}_1 - \varepsilon, \bar{X}_1$  les quatre racines de l'équation (2)  
rangées par ordre de grandeur, laquelle  
est toute réelle et comprise entre les limites  
 $n_0, \bar{X}_0$ .

Pour l'équation (1) admet effectivement de racines réelles comprises  
entre les limites  $n_0, \bar{X}_0$ , l'existence de ces racines  
entraîne l'existence de nouvelles limites

$$n_1, \bar{X}_1$$

qui pourront être substituées avec avantage aux limites  
anciennes

$$n_0, \bar{X}_0$$

attendu qu'on aura

$$(h) \quad n_0 < n_1 < \xi, \quad \bar{\xi} < \bar{X}_1 < \bar{X}_0$$

les deux racines  $\xi, \bar{\xi}$  peuvent être admises l'une de  
l'autre ou ordonnées à une seule. D'ailleurs les  
nouvelles racines limites  $n_1, \bar{X}_1$  vérifient, comme toujours,  
l'une la première l'autre la seconde de l'équation (2),  
à la quantité

$$\pm(x_0), \pm(\bar{X}_0)$$



est affectée de signe contraire, c'est-à-dire si l'on

$$(5) \quad \frac{f(x)}{f(x_0)} < 0,$$

tandis que si l'on

$$(6) \quad \frac{f(x)}{f(x_0)} > 0,$$

les deux limites  $n, x$  vérifient l'une et l'autre  
conditions, alors on obtient de la relation (2)  
selon que l'on a la limite

$$(7) \quad f(n, x) = f(x_0, x)$$

soit négative soit positive. Démontrons maintenant que  
la relation (1) a deux effectivement des racines telles  
qu'elles satisfont aux limites  $n, x$ , si la condition (5)  
se vérifie, et si, les deux qqs la formule (5) est  
remplacée par la formule (6), la même racine des  
équations (2) satisfait et s'inscrit entre  $n, x$ .  
Dans le premier cas, l'équation (1) offre un nombre  
supérieur de racines comprises entre les limites  $n, x$ ,  
et dans le second cas un nombre pair de racines  
comprises entre  $n, x$ , le plus petit et le plus grand  
des racines étant telles qu'elles vérifient dans le  
premier cas la condition (5), et dans le second cas la  
condition







Composé entre  $n_0$  et  $X$   
 représenté par les points  $n_0, n_1, \dots, n_p$ , on pourra toujours  
 choisir  $n$  de manière à vérifier la condition:

$$L(x_0, X, n, n) = L(u, u, u, u) = \frac{P'''(u)}{1.2.0}$$

Corollaire 2<sup>ème</sup>. L'expression obtenue  $L$  lors d'un choix  
 indéterminé

$$Q(n), - X(n)$$

est la même que la fonction interpolée:

$$Q(n_0, X, n), - X(x_0, X, n)$$

et est fonction continue de  $n$  entre les limites  $n_0, X$ ,  
 et sont les premières tangentes orizontales, les deux tangentes  
 passant entre ces limites. D'où l'on a

$$n_0 < n < X$$

entraînant la suite

$$Q(n_0, X, n_0) < Q(n_0, X, n) < Q(n_0, X, X),$$

$$X(n_0, X, n_0) < X(n_0, X, n) < X(n_0, X, X),$$

et en conséquence l'expression

$$L(n_0, X, n) = Q(n_0, X, n) - X(n_0, X, n)$$

sera, supérieure à  $0$  pour les valeurs de  $n$  comprises entre les limites  $n_0, X$ , supérieure à  $0$   
 ou inférieure à  $0$ , si l'expression

$$(10) \quad v = Q(n_0, X, n_0) - X(n_0, X, X), \quad v = Q(n_0, X, X) - X(n_0, X, n_0)$$



Du alors, on pourra dans l'éthérée 1<sup>er</sup> état un  $\alpha$  et à  $\alpha$  les valeurs qui fournissent l'équation (10).

Si, les limites  $\alpha_0, \beta$  sont des quantités positives, l'équation (10) a pour premier membre une fonction entière de  $\alpha$ , on pourra prendre pour  $Q(x)$  la somme de termes positifs et pour  $-Y(x)$  la somme de termes négatifs. Effectif,  $Q(x)$  la somme  $\alpha$  est positif, si l'on prend pour  $Q(x)$  la somme des termes positifs, on pourra en dire autant d'une puissance quelconque de  $\alpha$  et par suite d'un polynôme  $Q(x)$  dont tous les termes sont positifs, on aura d'ailleurs d'un polynôme d'un polynôme d'ordre  $Q'(x), Q''(x), Q'''(x)$ . Donc aussi la somme de la fonction

$$Q(\alpha_0, \beta, n)$$

qui est la somme des puissances de  $\alpha$  admet, lorsqu'on

$$\frac{dQ(\alpha_0, \beta, n)}{dn} = Q(\alpha_0, \beta, n, n) = Q'''(\alpha)$$

On suppose un premier terme la quantité  $\alpha_0$  et  $\beta$  sont positifs avec ces trois quantités, et la fonction elle-même

$$Q(\alpha_0, \beta, n)$$

existe depuis  $n = \alpha_0$  jusqu'à  $n = \beta$ . On montrera avec une induction, en montrant que la propriété ici attribuée à la fonction  $Q(\alpha_0, \beta, n)$  sera généralement établie, si l'on suppose qu'elle l'est dans la



on définit  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$  à un seul terme ou même  
à une puissance autre de  $n$ . Or, si l'on pose

$$\mathcal{L}(n) = n^n$$

la fonction  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$  sera le même que précédemment  
particulièrement qu'on peut trouver avec  $n=2$  l'écriture  
générale de l'écriture dont deux sont à l'écriture  
trois qu'on trouve  $n, \mathcal{E}, n$ , et si l'écriture qu'on trouve  
sont positives, deux de ces qu'on trouve partielles dans  
une qu'on trouve certaine ou certaine avec  $n$ .  
On suppose  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$  à l'écriture  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$   
actuel de la fonction  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$  partielles ou  
de la fonction  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$ , on trouve dans la  
probabilité de la fonction  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$ , on trouve  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$ , on  
trouve dans la fonction  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$  on trouve  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$ , on  
trouve dans la fonction  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$  on trouve  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$ , on  
trouve dans la fonction  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$  on trouve  $\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n)$ .

Corollaire 2 Approuver valeurs de  $v, \mathcal{E}$  déterminées  
Représenter la règle numérique dans les corollaires  
1 et 2, et après toute autre règle en vertu de la  
quell, le même

$$\mathcal{L}(n, \mathcal{E}, n) = \mathcal{L}(v, \mathcal{E})$$

et est vérifiée pour toute valeur de  $n$  comprise  
entre  $n, \mathcal{E}$ , les limites  $v, \mathcal{E}$  s'approchant  
l'une de l'autre <sup>en même temps que</sup> les limites  $n, \mathcal{E}$ .



Apprenons d'ailleurs qu'il s'agit de (1)  $\alpha$  ou en plusieurs  
 autres valeurs entre les limites  $n_1$ ,  $X_1$  et  $n_2$  de  
 $\alpha$  ou en plusieurs l'existence d'une nouvelle limite  
 d'après par  $n_1$ ,  $X_1$ ; et  $n_2$  l'existence par

(1)  $n_1, n_2, n_3, \dots$

(2)  $X_1, X_2, X_3, \dots$

Donc si on a deux desquelles l'existence d'une  
 limite d'après, l'existence d'une limite, et  
 une limite d'après de premier; l'existence d'une  
 limite d'après (1) s'approche indéfiniment de la valeur  $\alpha$ , et  
 l'existence d'une limite d'après (2) d'après  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{1}{n}$  et  $\frac{1}{n}$   
 sont les plus petites et les plus grandes de la valeur d'  
 l'existence. Cette proposition, analogue à celle qui  
 suppose la existence d'une limite d'après  $\alpha$  ou en  
 plusieurs l'existence d'une limite d'après  $\alpha$  ou en

Si l'existence (1) n'offrent point d'existence d'après  
 entre  $n_1$ ,  $X_1$ , alors les existence d'après  $\alpha$  ou en  
 d'après d'une valeur d'après entre  $n_1$ ,  $X_1$  et  $n_2$  ou en  
 peut considérer comme d'une nouvelle limite

$n_1, X_1$

ou les termes d'une suite (1) finissent par s'approcher  
 d'une limite (2).

Exemple 1<sup>er</sup>. Apprenons l'existence  $\frac{1}{n}$  (ou)  $\frac{1}{n}$





affection du même type entre les limites  $x = x_0, x_2, x$ . On  
arrête de corollaire  $v$ , on peut prendre

$$\frac{f(x_0, x) - f'(x_0)}{x - x_0} \text{ et } \frac{f'(x) - f(x, x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x_0, x, x_0) = \frac{f(x_0, x) - f'(x_0)}{x - x_0} \text{ et } f(x_0, x, x) = \frac{f'(x) - f(x, x_0)}{x - x_0}$$

pour valeurs de  $x$  et de  $x_0$ , en regardant les équations (2)  
ansuantes

$$(10) \begin{cases} (x - [x_0, x]) f(x_0, x) + (x - x_0)(x - x) f(x_0, x, x_0) = 0, \\ (x - [x_0, x]) f(x_0, x) + (x - x_0)(x - x) f(x_0, x, x) = 0. \end{cases}$$

Supposons maintenant la fonction  $f$  en deux points  
indépendants

$$Q(x), -X(x)$$

On la dérivée de 3<sup>e</sup> ordre,

$$Q'''(x), -X'''(x)$$

attendant l'existence continue de  $x$ , entre les limites  
 $x = x_0, x_2, x$ , et sont les premiers termes croissants,  
les deux termes décroissants entre ces limites. Les  
deux différences

$$(11) \quad Q'''(x_0) - X'''(x), \quad Q'''(x) - X'''(x_0)$$

sont les premiers inférieurs à la plus petite, la  
seconde supérieure à la plus grande des valeurs  
qu'acquiert entre ces limites la fonction

$$f'''(x) = Q'''(x) - X'''(x).$$







Corollaire Lorsque l'équation (1), étant de 2<sup>e</sup> degré, a pour premier terme  $n^2$ , on a toujours cette équation réduite de 2<sup>e</sup> degré

$$L'''(x) = 6x$$

et il est évident que les limites  $n_0, X$  sont des quantités finies du 2<sup>e</sup> degré, puisqu'on a l'équation  $L'''(x)$  cubique. On peut alors le même degré que les limites. Dans l'équation (1) étant de 2<sup>e</sup> degré, et le coefficient de  $n^2$  est à 1, les limites  $n_0, X$  ne peuvent être que des quantités finies. On a donc l'équation réduite de 2<sup>e</sup> degré en posant  $x = n - n_0$  ou  $x = X - n$ . On a alors les formules (15), lesquelles, mises dans l'équation (1), donnent les limites  $n_0, X$ .

$$L(a, b, n) = x + a + b$$

pour les limites  $n_0, X$  on a

$$(16) \quad \begin{cases} n - [n_0, X] + \frac{2n_0 + X}{L(n_0, X)} (n - n_0) (n - X) = 0 \\ n - [X, n_0] + \frac{2X + n_0}{L(X, n_0)} (n - X) (n - n_0) = 0 \end{cases}$$

Corollaire 6<sup>e</sup> Comme que l'équation (1) soit une équation de 2<sup>e</sup> degré, l'équation n'ait pas de racines réelles, et réduise le coefficient de  $n^2$  à 1. On a

$$L'''(x) = 12x^2$$

et on a l'équation réduite de 2<sup>e</sup> degré en posant  $x = n - n_0$  ou  $x = X - n$ . On a alors les formules (17) pour les limites  $n_0, X$ .

le 21 septembre 1827

un peu à l'ancienne



18

Puis on veut dire

Corollaire 7. Soit  $\lambda = \frac{1}{L(n, \bar{x})}$ , (17)  $h = [n, \bar{x}]$

(18)  $\lambda = \frac{1}{L(n, \bar{x})}$ ,  $\frac{1}{L(n, \bar{x})} = \frac{1}{L(n, \bar{x})}$ ,  $\frac{1}{L(n, \bar{x})} = \frac{1}{L(n, \bar{x})}$

Les limites (18). Soient

(19)  $n-h + \lambda(n-n_0)(n-\bar{x}) = 0$ ,  $n-h + \mu(n-n_0)(n-\bar{x}) = 0$

Si on suppose  $\lambda$  est une limite  $n, \bar{x}$ , les limites  $n, \bar{x}$  qui convergent vers  $n-h$  et  $n-h$

(20)  $n_0 < n < \bar{x} < \bar{x}$

montrant, avec l'aide, la première et la seconde de la formule (19). Alors aussi les quantités

$L(n_0), L(\bar{x})$

soient affectées de signes contraires, et donne la formule

(21)  $h = [n, \bar{x}] = n_0 - \frac{L(n_0)}{L(n, \bar{x})} = \bar{x} - \frac{L(\bar{x})}{L(n, \bar{x})}$

analogue à la formule (5). On aura

(22)  $\frac{n_0 - h}{L(n_0)} = \frac{\bar{x} - h}{L(\bar{x})} = \frac{1}{L(n, \bar{x})}$

il est clair que les différences  $n_0 - h, \bar{x} - h$  sont elles mêmes affectées de signes contraires, et que  $n_0 - h$  est positif.

(23)  $h = M(n, \bar{x})$ .

Si d'ailleurs les limites  $n, \bar{x}$  sont très voisines l'une



Del centre, la racine & différence trois fois de deux d'elles  
 triangles sont rectangles et presqu'ent de h; d'autre  
 part n est égale à n, et X, n au

$$(18) \quad (n-n_0)(X-n) = \left(\frac{X-n_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{X+n_0}{2} - n\right)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{X-n_0}{2} \right)^2$$

Donc, en vertu de l'équation (18), la différence

$$n_1 - h, \quad X_1 - h$$

est plus petite que la différence

$$X - h$$

offrant des valeurs numériques inférieures à celle de  
 l'indéterminé

$$1 - \left(\frac{X-n_0}{2}\right)^2, \quad 1 - \left(\frac{X-n_0}{2}\right)^2$$

Donc, si l'on suppose R les plus grandes des valeurs numériques  
 des implications (18) pour les plus grandes valeurs numériques  
 on a donc, si  $\lambda + \mu$  est des quantités finies, la différence  
 $X - n$ , et on aura  $X - h \approx R \left( \frac{X-n_0}{2} \right)^2$  comme quantité  
 très petite de premier ordre, la différence  $X - h$  sera  
 représentable comme proportionnelle au carré de  $X - n_0$   
 par conséquent de second ordre.

$$(22) \quad \dots \approx R \left( \frac{X-n_0}{2} \right)^2$$

On arriverait au même résultat en supposant  
 la différence  $X - h$  d'ordre plus de l'unité  $\lambda + \mu$   
 mais si l'on suppose que l'ordre de l'unité  $\lambda + \mu$  est plus petit  
 d'ordre que l'unité  $\lambda + \mu$  d'ordre plus de l'unité  $\lambda + \mu$   
 on s'appuie sur la formule identité

$$\pm (n_1 - h) \pm (n_1 - h) + (n - h)(n - h) \pm (n - h)$$

$$\pm (n_1 - h) = \pm (n_0 - h) + (n - h) \pm (n_1 - h) + (n - h) \pm (n_1 - h, n)$$

$$= (n - h) \pm (n_1 - h) + (n - h)(n - h) \pm (n_1 - h, n)$$







4. 1. 10 Dajci zapisat Jedni na vodu dje

(2, 4, 2)





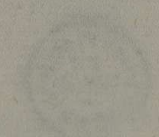
*Sauvage Blanc*

29



22

1881





















BIBLIOTHÈQUE

DE

L'UNIVERSITÉ

CAUCHY - FORMULES POUR LA RÉOLUTION DES EQUATIONS

BIBL.  
DE  
UNIVERSITÉ  
M S.

750

1857