

H. J. r. 9^o 10 4^o

ΘΕΟΔΟΣΙΟΥ ΤΡΙ-

ΠΟΛΙΤΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΑ. Γ.

Theodosij Tripolitæ

SPHÆRICORVM, LIBRI TRES,

NVNQVAM ANTEHAC GRÆCE
excusi.

Iidem latinè redditi per Ioannem
Penam Regium Mathematicum,

AD

ILLVSTRISSIMVM PRINCIPEM CAROLVM
LOTHARINGVM CARDINALEM.

S. X.

α. 233.

Lib. Elisy



PARISIIS,

Apud Andream Wechelum, sub Pegaso,
in vico Bellouaco: Anno Salutis,

1558.

CVM PRIVILEGIO REGIS.

PRIVILEGII SENTENTIA.

CAutum est authoritate Regia, nequis alius
præter Andream Wechelum, iuratum in
alma Parisiensi Academia Librarium, hos
Theodosij Tripolitæ, Sphæricorum libros
Ioanne Pena Mathematico regio interprete,
antè decennium ab æditione proximum in hoc
Francorum regno imprimat, néue alibi im-
pressos vendat. Ac si Regij diplomatis senten-
tia, operis initio præfigatur, finíue postpo-
natur, vt omnibus clarum, notum, indictum
habeatur. Secùs qui faxit, & libris ipsis, & mille
librarum Paris. multâ pœnas pendito. Dátum
Rhemi, Regio consensu subsignatum, Do. Vil-
lamoro supplicum libellorum magistro præ-
sente. 3. Id. Iun. 1557.



Ioannis Penæ Regij

MATHEMATICI IN THEO-
DOSII SPHÆRICA, PRÆFATIO.

Ad illustrissimum Principem Carolum
Lotharingum Cardinalem.



IN communi gratulatione & lætitia (Princeps & Cardinalis illustrissime) qua Franci omnes Caleticam fratris tui victoriam celebrāt, mutus esse non potui, quin è mathematica professione quamvis puluere & radio cōtentā nec verbis ad ornandā tantæ rei gloriam satis idoneā, attamen signum aliquod exultationis meæ tollerem. Cātabunt graues & ornati Poëtæ, narrabunt Annales & historiæ afflictis Francorum & prope desperatis rebus, bellis gerendis alienissimo hyemis tempore, Caletorum vrbes (ad quas expugnandum vix Europæ vires satis esse viderentur) Francisci Lotharingi ducis Guisiani consilio, diligentia, virtute, fœlicitate, expugnatas & captas esse, Francosque ab Anglis veteri possessione recepta tandem aliquando liberos, & vero gentis nomine Francos esse. Ego verò (vt cōferam parua magnis) ad germanæ huius & frater-

næ celebritatis memoriã id saltẽ adferam, Theodo-
 siũ auspiciis Caroli Lotharingi Cardinalis, in Ma-
 thematicas scholas eo tempore rediisse, quo tẽpore
 Caleti ad Frãcos duce Guisiano rediẽre. Hanc enim
 temporis notam, præclarissimi facti notam (vt spe-
 grata & liberali cõfidimus) apud omnes gẽtes per-
 petuam Theodosius efficiet. Est enim de Mathema-
 tificis antiquis vnus longe clarissimus, & posteritatis
 iudicio vehementer approbatus, quem quo no-
 mine potius commendem, quàm quòd eius Sphæ-
 ricis Mathematicorum præstantissimi magno suo
 commodo semper vsi fuerunt? Hinc enim & Ptole-
 mæus pleraq; accepit, & reliqui qui Ptolemæum se-
 quuti sunt, vt Pappus, Proclus, & Theon demõstra-
 tionũ firmamẽta sumpserunt. Quinetiam his lógẽ
 posteriores Arabes rem Mathematicã sphericorum
 doctrinã carere nõ posse rati, Theodosiũ in Arabi-
 cam linguã verterunt, tandemque aliquãdo Latini,
 ante annos (vt oppinor) quadringẽtos, cũ seriò cœ-
 lũ cõtemplari vellẽt, hunc authorẽ asciuerũt, vt iam
 omniũ ætatum consensu appareat quanti apud nos
 Theodosius esse debeat. Quanquã autẽ veterũ au-
 thoritas hunc authorẽ cõmendat, multiplex tamen
 utilitas, qua vnũquenque maximè moueri par est,
 eũ nobis chariorẽ reddet. Quẽ enim penitioris Ma-
 thematicæ pars est, quæ non è sphericis opẽ sumat?
 In confesso est Astronomiã (vt hinc incipiam) sine
 sphericis nihil posse, perspectũ (inquã) est præcipuas
 rerum cœlestium demõstrationes hinc peti. Itaque
 Theon in explicatione Phænomenorũ Euclideanũ,
 integras

integras passim demonstrationes è Theodosio sumit, quas quia interdū etiā mutilat, eas nunquā intelliget qui Theodosium non viderit. Sed omitto Astronomiā, ne videar rei per se clarę insistere. Quid Geographiam, quis sine sphaericis percipiet? Totum Geographicū negociū vertitur in circulis maximis, minoribus, parallelis, obliquis, tangentibus, secantibus, & reliquis eiusmodi, quorū imperitus, qua fronte se audebit Geographū profiteri? extreme id quidē demētiae esset. Quocirca sigillatim admonet Strabo, ei versandum in sphaericis, qui Geographiæ peritiam assequi velit. Sed & Gnomonice ars, quæ ex umbrarum ad umbilicos ratione horas venatur, ars inquam, quæ horologiorum horizontalium, verticalium, pendulorum, lateralium, & cæterorū quadrantum (ita enim vulgò appellantur solaria omnia) constructionem edocet, quid faciet sine Sphaericis? Vidimus horologiorū compositiones à Mathematicis haud vulgaris nominis & scriptas & æditas, in quibus sphaericorum ignoratio plurimas descriptiones falsas pro veris pepererat. Horum descriptiones sequitur vulgus, atque ita fit vt cæci cū suis ducibus in eandē errorum foueam incurrant. Huic morbo vnus Theodosius mederi poterat, nisi stulta & artibus exitiosa credulitas veræ scientiæ & causarum desiderium extinxisset. Iam si te ad Opticæ Catoptricęnue cōuertas, rationes passim è sphaericis petitas inuenies. Docent Optici de globo quē vnico oculo cernas, integrum semissem non cerni, docent globum eminūs spectatum circulum vide-

PRÆFATIO.

ri, ob idque Solem, Lunam, planetas, & reliqua astra
 quanquā solida & globosa sint, plana tamen & cir-
 cularia apparere. Docent de globo cuius diameter
 sit æqualis lineæ amborum oculorū centra nec tēti,
 semissem spectari: quòd si diameter sit breuior, plus
 semisse: si longior, minus semisse de globo cerni, in-
 deque ostendunt dimidias syderum partes nunquā
 videri. Horum tamē miraculorum explicationē &
 caussas vix aliunde sumunt quā è sphæricis. Qua
 propter Vitellio cū Optica describeret, nihil prius
 habuit quā vt bonā partē sphæricorū Theodosij
 suppresso nomine, vsurparet, è quibus tanquā prin-
 cipiis progressus, ea Catoptricum & Dioptricorum
 miracula explicauit, ob quę tota posteritas eum mi-
 rabitur. Sed omnes sphæricorum cōmoditates recē-
 fere nec facile est, nec necessarium, cū ex his reli-
 quas, tanquā leonem ex vnguibus, æstimare liceat.
 Harum cupidi maiores nostri, ante annos quadrin-
 gentos (vti dixi) Theodosium latinè reddiderunt.
 Sedenim quod impensè sitiētibus vsu venire solet,
 vt dum sitim explere cupiunt, aquam si nō aliunde
 possint, è cœno & volutabris hauriant: id ipsum iis
 qui Theodosium fecerunt latinum, accidisse video.
 Cū enim sphæricam doctrinā vehementer appe-
 terent, nec haberent (vt opinor) græcum exēplar, ad
 Arabicam versionem cōfugerunt, & Theodosium
 qui græcè scripserat, non è græco & genuino fonte,
 sed ex Arabico & alieno in latinum verterunt, imo
 etiam eam versionē annis ab hinc quadraginta Ve-
 netiis excuderunt, quam à Platone Tiburtino factā
 fuisse

PRÆFATIO.

fuisse asseuerat author libelli De speculis vſtoriiſ, quifquis ille ſit. Atqui ſi quis illum Theodoſium ex Arabico verſum & Venetiis excuſum, cum Græco cōferat, incredibile diſcrimen nō modo facilitatis ſed etiam breuitatis inueniet. Primo enim Theodoſius ſex ſeptē mve definitionibus tantum contentus fuit. At Arabes alias ſeptem eaſque ferē ſuperuacaneas adiecerunt. Theodoſius multitudinē, theorematum conſultō vitauit, & totum Sphæricum negotium ſexaginta propoſitionibus abſoluit. At Arabes hunc numerum triēte auxerunt, & pro ſexagenis octogenas cumularunt. Theodoſius ſingula theoremata ita monſtrauit, vt nullam demōſtrationis partem omiſerit: At Arabes adeo Theodoſij demonſtrationes decurtarunt, vt neceſſaria pleraq; reliquerint. Ac vt ſemel dicam Arabes hunc authorē tam diuerſum fecerunt, vt vix vllam eius ſpeciem retinuerint, ſed præſtantiffimi & clariffimi Mathematici doctrinam facillimam, variis ambagibus obſcurarint. Quamobrem ex illa difficultate nata ſunt ea incommoda, quæ Aſtronomiā prope modum oppreſſerunt. Aſtronomiæ ſtudioſi tantā obſcuritatē nō tulerunt, ſed reiecto Theodoſio cœleſtiū circulorum cauſſas ignorare, quàm è tam intricatis tricis petere maluerūt, atq; ita quidquid vel Sacroboſeiſ vel Cāpanus vel quilibet alius ſphæræ deſcriptor protuliſſet, nudē ac ſine demonſtratione credere cœperunt, opinionem denique, & credulitatem pro ſcientia & cognitione habuerunt. Atqui id in humanioribus diſciplinis fortaiſſis ferendum

fuerit: Mathematicum verò credulum, nec demonstrationum momenta quærentem quis fuerat? Has ergo obscuritates quæ Mathematicarum studiosos remorabantur amputauimus, Theodosio genuino & græco (qui à Pópei Magni temporibus hucusq; in bibliothecis delituerat) typis ædito, ac ne quid requiri posset latinum fecimus, vt iis etiam, qui in græcis haud magnopere versati sunt, cōsuleremus. Hunc verò quantumcunque laborem tibi tanto Principi dicare visum est, non modò vt tibi nostri ocij ratio constaret, sed etiã vt harũ artium candidati autoritate & splendore illustrissimi nominis tui, Theodosium auidius reciperent. Imo verò vt anno superiore (qui Regiæ professionis & iudicio & beneficio tuo mihi mandata & credita primus fuit) præclara illa Euclidis opera Optica, Catoptrica, Harmonica, quæ tot seculis delituerant, in tuo nomine edidimus, ita modo (quod initiò professus sum, ad fraternæ victoriæ gratulationem quo possumus argumento declarandam, Theodosium tuis auspiciis eo tempore publicamus, quo tempore infiniti gaudij plausus Franciâ totâ publicatur.

Vale.

Θ Ε Ο Δ Ο



ΘΕΟΔΟΣΙΟΥ ΤΡΙ-

ΠΟΛΙΤΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ.

ΣΦΑΪΡΑ, ὅστις ὀγκος στερεόν, ἔστω μιᾷ ἐπιφανείᾳ περιε-
χόμενον, πρὸς ᾧ ἀφ' ἐνὸς σημείου τῆς ἐντὸς τῆς ὀγκοῦ καί-
μένων, πᾶσαι αἱ περὶ πᾶσαι δι' αὐτοῦ, ἴσαι ἀμείναις εἰσὶν.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ.

Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας, δι' ὁποῦτο σημεῖον ὀκν.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ.

Ἀξων δὲ τῆς σφαίρας, ὅστις δι' αὐτοῦ πᾶσαι δι' αὐτοῦ τῆς κέντρος ἡμίσφαι-
ρας, πρὸς ᾧ ἐπὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας,
πρὸς ᾧ μόνον δι' αὐτοῦ ἡ σφαῖρα σφύρεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΣ.

Πόλις δὲ τῆς σφαίρας, εἰσὶ τὰ πέρατα τῆς ἁπλούς, διλαδὴ τῆς
διαμέτρου.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΕΜΠΤΟΣ.

Κύκλος πόλις ἐν σφαίρᾳ, ὅστις σημείον ὡς τῆς ἐπιφανείας τῆς
σφαίρας, ἀφ' οὗ πᾶσαι περὶ πᾶσαι δι' αὐτοῦ πρὸς πᾶσι τῶν κύκλων
περιφέρεια, ἴσαι ἀμείναις εἰσὶν.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΚΤΟΣ.

Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλῖσθαι λέγεται, καὶ ἑπε-
ροῦ πρὸς ἑπερον, ὅταν τῇ κοινῇ ὁμῇ τῆς ἐπιπέδων αἱ πρὸς ὁρμαὶ
ἀγόμεναι δι' αὐτοῦ ἐν ἑκατέρῳ τῆς ἐπιπέδων πρὸς τοῖς αὐτοῖς ση-
μείοις ἴσας γωνίας περιέχωσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

Ἐάν σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ τετμήθῃ, ἢ γενομένη ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γραμμὴ, κύκλος πᾶσι φέρεται ἐστίν.

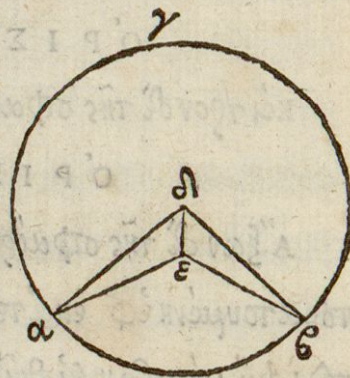
Σφαιρικὴ γὰρ ἐπιφάνεια, ἐπιπέδῳ τινὶ τετμήθω, ποιείτω δὲ καὶ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὴν $\alpha\beta\gamma$ γραμμὴν. λέγω ὅτι ἡ $\alpha\beta\gamma$ γραμμὴ, κύκλου πᾶσι φέρεται ἐστίν. Εἰ μὲν οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου ᾖ τῆς σφαίρας, φανερόν ὅτι ἡ $\alpha\beta\gamma$ γραμμὴ, κύκλου πᾶσι φέρεται ἐστίν. αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν προσπίπτουσι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. καὶ ἐστὶν ἡ $\alpha\beta\gamma$ γραμμὴ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν $\alpha\beta\gamma$ γραμμὴν προσπίπτουσι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. καὶ ὑπόκειται τὸ $\alpha\beta\gamma$ ἐπίπεδον διὰ κέντρου τῆς σφαίρας ὄν. ὥστε ἡ $\alpha\beta\gamma$ γραμμὴ, κύκλος πᾶσι φέρεται ἐστίν, ἥς κέντρον τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τῆς σφαίρας.

Πόρισμα
πρῶτον.

καὶ ἐκ τούτου φανερόν, ὅτι τοῦ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὄντος κύκλου, τὸ αὐτὸ κέντρον ᾖ καὶ τῆς σφαίρας.

ἀλλὰ διὰ μὴ ἔσω τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ δὲ κέντρον τῆς σφαίρας ἔσω τὸ δ σημεῖον. καὶ ἀπὸ τοῦ δ σημείου ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον κάθετος ἦχθω ἡ $\delta\epsilon$, καὶ συμβαλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ϵ σημεῖον, καὶ προσπίπτωσαν ἀπὸ τοῦ ϵ σημείου πρὸς τὴν $\alpha\beta\gamma$ γραμμὴν εὐθεῖαι αἱ $\epsilon\alpha$, $\epsilon\beta$, καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ $\delta\alpha$, $\delta\beta$. καὶ ἐπεὶ ἴση ᾖ τῇ $\alpha\delta$ τῇ $\delta\beta$. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $\alpha\delta$, ἴσα τὰ ἀπὸ $\alpha\epsilon$, $\epsilon\delta$. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $\delta\beta$, ἴσα τὰ ἀπὸ τῆς $\beta\epsilon$, $\epsilon\delta$ (ὁρῶν γὰρ ᾖ τὴν ἑκατέρωθεν τῶν πρὸς τὸ ϵ γωνιών) τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς $\alpha\epsilon$, $\epsilon\delta$, ἴσα ᾖ τὴν $\alpha\epsilon$, $\epsilon\delta$, ἴσα ᾖ τὴν $\beta\epsilon$, $\epsilon\delta$. κοινὸν ἀφαιρήσω τὸ ἀπὸ τῆς $\delta\epsilon$. ἴση ἄρα ᾖ τῇ $\alpha\epsilon$ τῇ $\beta\epsilon$.

Ὀμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ ϵ πρὸς τὴν $\alpha\beta\gamma$ γραμμὴν προσπίπτουσι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ἡ ἄρα $\alpha\beta\gamma$ γραμμὴ, κύκλου πᾶσι φέρεται ἐστίν, ἥς κέντρον τὸ ϵ .



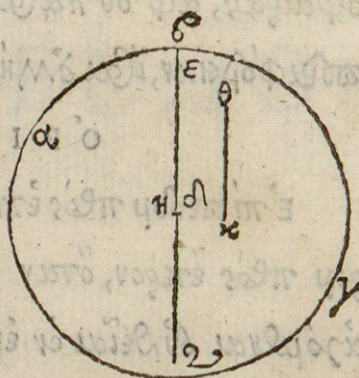
Πόρισμα δεύτερον.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἔαν ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἢ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἢ ἀπὸ ἑτέρου καθεὶς ἀγομένη, ἐπὶ τὸ κέντρον πεσῇ τοῦ κύκλου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον δέρεται.

Ἐπὶ δοθεῖσα σφαῖρα. δεῖ δὲ τὸ αὐτῆς κέντρον εὑρεῖν. τετμήτω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τινὶ. ποιείτω δὲ τὴν $\alpha\beta\gamma$ κύκλον. ποιείτω τὴν $\alpha\beta\gamma$, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον καὶ ἔσω τὸ δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ δ σημείου τῷ τοῦ $\alpha\beta\gamma$ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς, ἀνεσῆτω ἡ $\delta\epsilon$, καὶ ἐκβεβλήτω, καὶ συμβαλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ ϵ , ζ , καὶ τετμήτω ἡ $\epsilon\zeta$ δίχα κατὰ τὸ η σημεῖον. λέγω ὅτι τὸ η σημεῖον, κέντρον ᾖ τῆς σφαίρας. μὴ γὰρ, ἀλλ' εἴ δυνατόν, ἔσω τὸ θ , καὶ ἀπὸ τοῦ θ , ἐπὶ τὸ τοῦ $\alpha\beta\gamma$ κύκλου ἐπίπεδον, κάθετος ἦχθω, καὶ συμβαλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ κ σημεῖον. τὸ ἄρα κ σημεῖον, κέντρον ᾖ τοῦ $\alpha\beta\gamma$ κύκλου. ἀλλὰ καὶ τὸ δ ὅπερ



ὅπερ

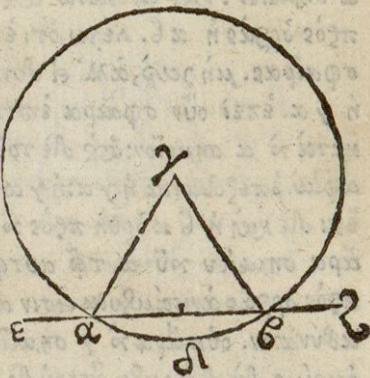
ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ θ σημεῖον, κοίτηρον ἔστι τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δείξω-
μεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο, πλὴν τὸ η. καὶ ἄρα σημεῖον, κοίτηρον ἔστι τῆς σφαίρας.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἡ σφαῖρα κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κοίτηρου αὐτοῦ τῷ πόρτισμα.
ἐπιπέδῳ αὐτοῦ πρὸς ὁρθὰς εὐθεῖα ἀνασθῇ, ἐπὶ τῆς ἀναστροφῆς τὸ κοίτηρον ἔστι τῆς
σφαίρας.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α γ'.

Σφαῖρα ἐπιπέδῳ μὴ τέμνοντος οὐκ ἀπίζεται κατὰ πλείονα ση-
μεῖα, ἢ ἑ.

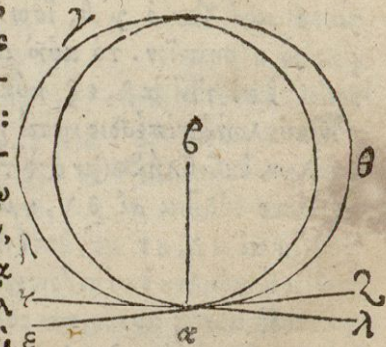
Εἰ γὰρ δυνατόν, σφαῖρα ἐπιπέδῳ μὴ τέμνοντος ἀπείδω κατὰ πλείονα σημεῖα, τὰ α,
β, καὶ εἰλήφθω τὸ κοίτηρον τῆς σφαίρας, τὸ γ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, β γ, καὶ
ἐκβεβλήθω τὸ διὰ τῶν α γ, β γ, ἐπίπεδον, καὶ μὴ δὴ ποιήσῃ
ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κύκλου περιφέρειαν. ἐν
δὲ τῷ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖαν. ποιεῖτω οὖν ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ
τῆς σφαίρας, τὸν δ α β κύκλον. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖαν
τὴν ε α β ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον οὐ τέμνῃ τὴν σφαῖραν,
ἔστι δὲ ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας ὁ κύκλος, ἐν δὲ
τῷ ἐπιπέδῳ ἡ εὐθεῖα, οὐδὲ τὸν δ α β κύκλον ἄρα τέμνῃ
ἡ ε α β ζ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ δ α β ἐπὶ τῆς περι-
φερείας εἰληπῇαι δύο σημεῖα τυχόντα τὰ α, β, ἢ ἄρα ἀπὸ τῆς
α ἐπὶ τὸ β, ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα, ὅπως πεσεῖται τοῦ κύ-
κλου δ α β, ἀλλὰ καὶ ἐκτός. ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. σφαῖρα
ἄρα ἐπιπέδῳ μὴ τέμνοντος οὐχ ἀπίζεται κατὰ πλείονα ση-
μεῖα, ἢ ἑ.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α δ'.

Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ ἀπῆται μὴ τέμνοντος, ἢ ἀπὸ τῆς κέντρου
τῆς σφαίρας ὑπὲρ τὴν ἀφῶν ἐπιζυγνυμένη δύ' εἰς καθετος ὅσιν
ὑπὲρ τὸ ἐπίπεδον.

Σφαῖρα γὰρ ἐπιπέδῳ τινὸς ἀπῆται μὴ τέμνοντος,
κατὰ τὸ α σημεῖον. καὶ εἰλήφθω τὸ κοίτηρον τῆς σφαίρας,
τὸ β σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β α. λέγω ὅτι ὁρθή ἐστι πρὸς
τὸ ἐπίπεδον. ἐκβεβλήθω γὰρ διὰ τῆς α β, ἐπίπεδον, το-
μὴν δὲ ποιήσῃ, ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, κύκλον,
ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖαν. ποιεῖτω οὖν ἐν μὲν τῇ ἐπιφα-
νείᾳ τῆς σφαίρας τὸν α γ δ κύκλον. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ
τὴν ε α ζ εὐθεῖαν. πάλιν δὲ διὰ τῆς α β, ἕτερον ἐπίπεδον,
ἐκβεβλήθω, καὶ ποιεῖτω τὴν καμὴν, ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ
τῆς σφαίρας τὸν α θ κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ, τὴν κ α λ
εὐθεῖαν. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, καὶ
ἡ ε α ζ ἄρα εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ α γ δ κύκλου. ἐπεὶ
οὖν κύκλου τοῦ α γ δ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ ε α ζ. κατὰ τὸ α σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ α
ἐπὶ τὸ κοίτηρον ἐπέζυγκται ἡ α β, ἢ α β ἄρα καθετός ἐστι ἐπὶ τὴν ε α ζ. καὶ φανερόν ὅτι

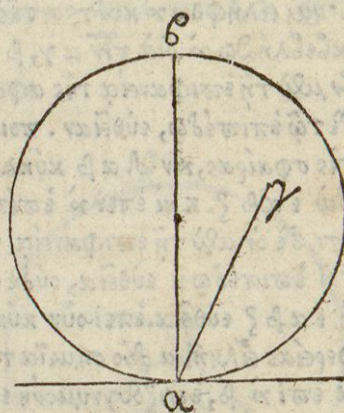


τὸ β σημεῖον, κέντρον ἔστι τοῦ α γ δ κύκλου, ἐπεὶ δὴ περ ἐκβέβηται διὰ τῆς β α, οὕσης ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπίπεδον τὸ τοῦ α γ δ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐπὶ πλὴν κ α λ, κέντρος ἔστιν ἡ β α. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ β α δύο εὐθείαι τῶν ε ζ, κ λ, τεμνούσας ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς ὀρθὴ ἐφείσηκε. καὶ τῶν δὲ αὐτῶν ἀρα ἐπιπέδω πρὸς ὀρθὰς ἔστιν ἡ β α. τὸ δὲ διὰ τῶν ε ζ, κ λ, ἐπίπεδον, ἔστι τὸ ἐφαπτόμενον· ἡ α β ἀρα ὀρθὴ ἔστι πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Ε΄.

Εἴαν σφαῖρα ἐπιπέδου ἀπῆται μὴ τέμνοντος, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς ὡς ἐπιπέδω πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθῇ δι' αἰθέρα, ὑπὸ τῆς ἀνασταθείσης ἔσται δὲ κέντρον τῆς σφαίρας.

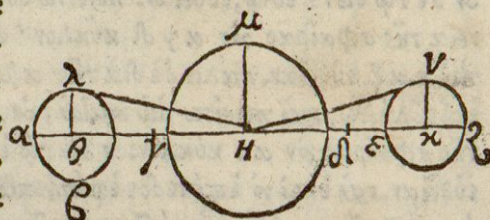
Σφαῖρα γὰρ ἐπιπέδου ἀπῆται μὴ τέμνοντος, κατὰ τὸ α σημεῖον· καὶ ἀνεσώτω ἀπὸ τοῦ α σημείου τῶν ἐπιπέδω πρὸς ὀρθὰς ἡ α β. λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς α β, ἔστι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ γ, καὶ ἐπεζεύχτω ἡ γ α. ἐπεὶ οὖν σφαῖρα ἐπιπέδου ἀπῆται μὴ τέμνοντος, κατὰ τὸ α σημεῖον· ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ πλὴν ἀφῆν ἐπέζωκεται ἡ γ α· ἡ γ α ἀρα ὀρθὴ ἔστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἔστι δὲ καὶ ἡ β α ὀρθὴ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. ἀπὸ τῆς αὐτοῦ ἀρα σημείου τοῦ α, τῶν αὐτῶν ἐπιπέδω ὑποκειμένη, δύο πρὸς ὀρθὰς ἀνιστάμεναι εἰσιν αἱ α β, α γ εὐθεῖαι, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἀρα τὸ γ σημεῖον, κέντρον ἔστι τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο, πλὴν τὸ ἐπὶ τῆς β α ἐπὶ τῆς β α ἀρα ἔστι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.



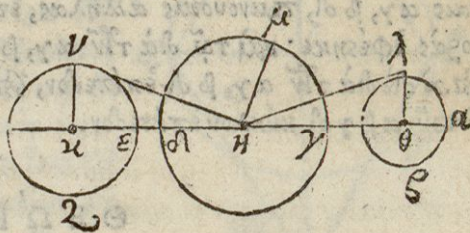
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Σ΄.

Τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων, οἱ μὲν διὰ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, μέγιστοί εἰσι· τῶν δ' ἄλλων, αἱ μὲν ἴσων ἀπέχοντες ἐκαστὴν ὡς τὸ κέντρον, ἴσοι εἰσίν· οἱ δὲ μείζον, ἐλάσσονες.

Ἐστωσαν ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ α β, γ δ, ε ζ. καὶ ὁ μὲν γ δ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· οἱ δὲ α β, ε ζ, πρὸτερον ἴσων ἀπέχωνται ἀπὸ τοῦ κέντρου. λέγω ὅτι μέγιστος μὲν ἔστιν ὁ γ δ, ἴσοι δὲ εἰσιν οἱ α β, ε ζ. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ η σημεῖον. τὸ αὐτὸ ἀρα ἔστι καὶ τοῦ γ δ κύκλου. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ η σημείου, ἐπὶ τῶν α β, ε ζ κύκλων ἐπίπεδα, καθετοὶ αἱ η θ, η κ, καὶ συμβαλέτωσαν τοῖς τῶν κύκλων ἐπίπεδοις κατὰ τὰ θ, κ σημεία. τὰ θ, κ, ἀρα σημεία κέντρα ἔστι τῶν α β, ε ζ κύκλων. ἐκβεβλήτωσαν ἀπὸ τῶν θ, η, κ, ἐπὶ τῆς σφαίρας εὐθεῖαι αἱ θ λ, η μ, κ ν, καὶ ἐπεζεύχωνται αἱ η λ, η ν. καὶ ἐπεὶ ἡ η θ ὀρθὴ ἔστι πρὸς τοῦ α β κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσαις ἀρα τὰς ἀπλομοίαις αὐτῆς, καὶ οὕτως ἐν τῶν τοῦ α β κύκλου ἐπιπέδω, ὀρθὰς γωνίας ποιεῖ. ἀπῆται δὲ αὐτῆς ἡ θ λ, οὕτως ἐν τῶν α β ἐπιπέδω· ὀρθὴ ἀρα ἔστιν ἡ ὑπὸ λ θ η γωνία. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ η κ ν ὀρθὴ ἔστι. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἔστιν ἡ ὑπὸ η θ λ· ἐλάσσων ἀρα ἔστιν ὀρθή·



θῆς ἢ ὑπὸ λ η θ. μείζων ἄρα ἔστιν ἢ ὑπὸ λ η θ τῆς ὑπὸ λ η θ. πλὴν ἄρα ἢ λ η, πλὴν
 ἄς τῆς λ θ, ἔστι μείζων καὶ ἔστιν ἢ λ η τῇ η μ ἴση, διὰ τὸ, τὸ η σημαῖον, κέντρον εἶναι τῆς
 σφαίρας, καὶ προσεπιπνεύουσαι ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, τὰς λ η, η μ.
 καὶ ἢ η μ ἄρα τῆς λ θ μείζων ἔστι καὶ ἢ μὲν η μ ἐκ τῆς κέντρος τοῦ γ δ κύκλου. ἢ δὲ
 λ θ ἐκ τοῦ κέντρος τοῦ α β κύκλου μείζων ἄρα ἔστιν ὁ γ δ κύκλος τοῦ α β κύκλου. ὁ-
 μοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ πάντων τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων καὶ μὴ ὄντων διὰ τοῦ κέν-
 τρου τῆς σφαίρας. λέγω δὲ ὅτι καὶ οἱ α β, ε ζ κύκλοι εἰσὶν ἴσοι. Ἐπεὶ γάρ οἱ α β, ε ζ κύ-
 κλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς κέντρος τῆς σφαίρας ἴση ἄρα ἔστιν ἢ η θ τῇ η κ. καὶ ἐπεὶ τὸ η
 σημαῖον, κέντρον ἔστι τῆς σφαίρας, ἴση ἔστιν ἢ η λ τῇ η ν. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς λ η τῶ ἀπὸ
 τῆς η ν. ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς λ η, ἴσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν λ θ, θ η. τῶ δὲ ἀπὸ τῆς η ν ἴσα
 ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν η κ, κ ν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν λ θ, θ η ἄρα, ἴσα ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν η κ, κ ν. ὦν τὸ ἀπὸ
 τῆς θ η, ἴσον ἔστι τῶ ἀπὸ τῆς η κ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς θ λ λοιπὸν τῶ ἀπὸ τῆς κ ν ἴσον
 ἔστιν. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ θ λ τῇ κ ν. καὶ ἔστιν ἢ μὲν θ λ ἐκ τοῦ κέντρος τῆς α β κύκλου. ἢ δὲ
 κ ν ἐκ τοῦ κέντρος τοῦ ε ζ κύκλου. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ ἐκ τοῦ κέντρος τοῦ α β, τῇ ἐκ τοῦ
 κέντρος τῆς ε ζ κύκλου. ἴσος ἄρα ὁ α β κύκλος, τῶ ε ζ κύκλῳ. Ἀλλὰ δὲ πάλιν μείζων
 ἀπέχεται ὁ α β κύκλος τοῦ κέντρος τῆς σφαίρας,
 ἢ περὶ ὁ ε ζ. λέγω ὅτι ἐλάσσων ἔστιν ὁ α β κύκλος
 τοῦ ε ζ κύκλου. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέν-
 των, ἐπεὶ μείζων ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρος τῆς σφαί-
 ρας ὁ α β κύκλος, ἢ περὶ ὁ ε ζ. μείζων ἄρα ἔστιν ἢ
 θ η τῆς η κ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἢ η λ τῇ η ν (τὸ γὰρ
 η σημαῖον, κέντρον ἔστι τῆς σφαίρας, καὶ τὰ λ, ν,
 πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ) ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς η λ τῶ
 ἀπὸ τῆς η ν, τοῦτ' ἔστι, τὰ ἀπὸ τῶν λ θ, θ η, τοῖς
 ἀπὸ τῶν η κ, κ ν. ὦν τὸ ἀπὸ τῆς θ η τοῦ ἀπὸ τῆς
 κ η μείζων ἔστι. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς λ θ, λοιπὸν
 τοῦ ἀπὸ τῆς ν κ ἐλάσσων ἔστιν. ἐλάττων ἄρα ἔστιν ἢ
 λ θ τῆς ν κ. καὶ ἔστιν ἢ μὲν θ λ ἐκ τοῦ κέντρος τοῦ α β κύκλου. ἢ δὲ ν κ ἐκ τοῦ κέντρος
 τοῦ ε ζ κύκλου. τῶν ἄρα ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρος τῆς σφαίρας,
 μέγιστοι εἰσὶ τῶν δὲ ἄλλων οἱ μὲν ἴσον ἀπέχοντες ἀπὸ τοῦ κέντρος τῆς σφαίρας ἴσοι εἰσὶν.
 οἱ δὲ μείζων, ἐλάσσονες. δεῖξομεν δὲ ἀντιτρόπως, ὅτι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν
 μέγιστοι, διὰ τοῦ κέντρος εἰσὶ τῆς σφαίρας. τῶν δὲ ἄλλων, οἱ μὲν ἴσοι, ἴσον ἐκαστέρωθεν
 ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρος. οἱ δὲ ἐλάσσονες, μείζων. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέν-
 των, ἔσω ὁ γ δ κύκλος μέγιστος. λέγω ὅτι ἔσαι διὰ τοῦ κέντρος τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ δυνα-
 τὸν, ἔσω μὴ διὰ τοῦ κέντρος. καὶ ἐπεὶ δεῖξομεν, ὅτι ὁ διὰ τοῦ κέντρος, μείζων ἔστι πάντων
 τῶν μὴ διὰ τοῦ κέντρος κύκλων. ὁ ἄρα διὰ τοῦ κέντρος μείζων ἔσαι τοῦ γ δ. ὁ ἄρα γ δ
 κύκλος οὐκ ἔσαι μέγιστος. ὅπερ ἀτοπὸν. ὑποκείμεναι γὰρ μέγιστος. ὁ ἄρα γ δ κύκλος μέγι-
 στος, διὰ τοῦ κέντρος ἔστι τῆς σφαίρας. πάλιν ἔσωσαν οἱ α β, ε ζ κύκλοι, ἴσοι. λέγω ὅτι ἴσον
 ἀπέχουσι τοῦ κέντρος τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γὰρ ἴσοι εἰσὶν, ἴση ἄρα ἔστιν ἢ θ λ τῇ κ ν. ἴση δὲ
 καὶ ἢ η λ τῇ η ν καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς η λ ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν λ θ, θ η. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς η ν,
 ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν η κ, κ ν. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς λ θ, ἴσον τῶ ἀπὸ τῆς ν κ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ
 τῆς η θ λοιπὸν τῶ ἀπὸ τῆς η κ ἴσον ἔστιν. ἢ ἄρα θ η τῇ η κ ἴση ἔστιν. ἴσον ἄρα ἀπέχουσι τοῦ
 κέντρος τῆς σφαίρας οἱ ἴσοι κύκλοι. Ἀλλὰ δὲ πάλιν ἐλάσσων ἔσω ὁ α β κύκλος τοῦ ε ζ
 κύκλου. λέγω ὅτι μείζων ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρος τῆς σφαίρας ὁ α β κύκλος, ἢ περὶ ὁ ε ζ.
 ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἔστιν ὁ α β τοῦ ε ζ. ἢ ἄρα θ λ τῆς κ ν ἔστιν ἐλάσσων. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς η λ τοῖς ἀπὸ τῶν λ θ, θ η ἴσον ἔστι. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς η ν, τοῖς ἀπὸ τῶν ν κ, κ η. τὰ ἄρα ἀπὸ
 τῶν λ θ, θ η, τοῖς ἀπὸ τῶν ν κ, κ η, ἴσα ἔστιν. ὦν τὸ ἀπὸ τῆς λ θ ἐλάσσων ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς ν κ.
 λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς θ η τοῦ ἀπὸ τῆς η κ μείζων. ἢ ἄρα θ η, τῆς η κ μείζων ἔστιν. οἱ ἄρα
 ἐλάσσονες κύκλοι μείζων ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρος τῆς σφαίρας.

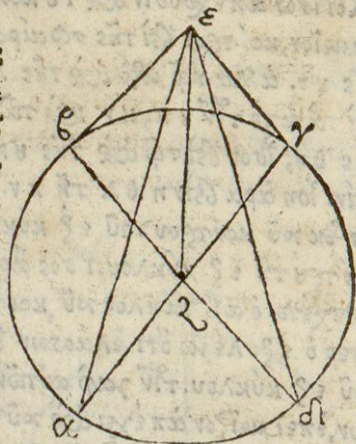


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ζ'.

Εάν ἢ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τῆς κέντρος τῆς σφαίρας ὡδὲ δ'

κέντρον αὐτῷ ἐπιζυγῆται οὐδεὶς, ἢ ἐπιζυγῆται ὁρθῇ ὅτι πρὸς
τὸν κύκλον.

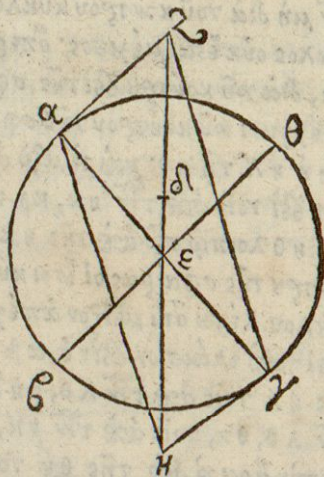
Ἐστὶν σφαῖρα κύκλος ὁ αβγδ, καὶ τὸ μὲν κέντρον τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ ε σημεῖον.
τὸ δὲ τοῦ κύκλου τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχω ἡ εζ. λέγω ὅτι ἡ εζ ὁρθή ἐστι πρὸς τὸν αβγδ κύ-
κλον. διήχθωσαν γάρ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου αἱ αεγ, βδε, καὶ ἐπεζεύχωσαν αἱ
βε, εδ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βδε τῇ εδ, κοινὴ δὲ ἡ εζ.
δύο δὴ αἱ βε, δε, δυοὶ ταῖς δε, εδ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω
ἑκατέρω καὶ βάσις ἡ βε, βάσις τῇ εδ ἐστὶν ἴση (τὸ γὰρ ε
σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, καὶ τὰ β, δ πρὸς τῇ
ἐπιφανείᾳ) γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βδε, γωνία τῇ ὑπὸ δεε, ἐστὶν
ἴση. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖται τὰς ἐφεξῆς γωνίας
ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὁρθὴ ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν. ὁρ-
θὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ βδε, δεε. ἡ εζ ἄρα τῇ βδ
ἐστὶ πρὸς ὁρθὰς. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ τῇ αγ, ἐπιζυ-
γῆσθω τῇ αε, γε. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ εζ, δυοὶν εὐθείαις
ταῖς αγ, βδε, τεμνούσαις ἀλλήλας, ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς
ὁρθὰς ἐφύεσθαι. καὶ τῷ διὰ τῶν αγ, βδε, ἐπιπέδῳ ὁρθή
ἐστὶ. τὸ δὲ διὰ τῶν αγ, βδε, ἐπίπεδον, ἐστὶν ὁ αβγδ κύκλος. καὶ ἡ εζ ἄρα ὁρθή ἐστι πρὸς
τὸν αβγδ κύκλον ἐπίπεδον.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α κ'.

Ἐάν τις σφαῖρα κύκλος, ἀπὸ δὲ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας ἐπὶ
αὐτὸν κἀκετος ἀχθῇ, καὶ ἐμβληθῇ ἐπ' ἀμφοτέρω τὰ μέρη, ἐπὶ τοῖς
πᾶσι πεσεῖται τῷ κύκλῳ.

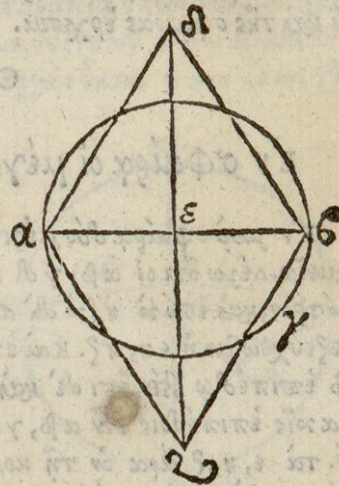
Ἐστὶν σφαῖρα κύκλος ὁ αβγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ δ σημεῖον,
καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ δ σημείου ἐπὶ τὸν αβγ κύκλον ἐπίπεδον, καθετος ἡ δε, καὶ συμ-
βαλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ε σημεῖον. τὸ ε ἄρα σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύ-
κλου, καὶ ἐκβεβλήθω ἡ δε ἐπ' ἀμφοτέρω τὰ μέρη, καὶ συμβαλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς
σφαίρας κατὰ τὰ ζ, η σημεῖα. λέγω ὅτι τὰ ζ, η σημεῖα, πό-
λοι εἰσὶ τοῦ αβγ κύκλου. διήχθωσαν γάρ αἱ αεγ, βεθ,
καὶ ἐπεζεύχωσαν αἱ αζ, ζγ, αη, ηγ. καὶ ἐπεὶ ἡ δε ὁρ-
θὴ ἐστὶ πρὸς τὸν αβγ κύκλον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς
ἐπιτομὰς αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὖσας ἐν τῷ τοῦ αβγ κύ-
κλου ἐπιπέδῳ, ὁρθὰς ποιήσει γωνίας. ὁρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκα-
τέρω τῶν ὑπὸ ζεα, ζεγ, ζεβ, ζεθ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση
ἐστὶν ἡ αε τῇ ηγ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὁρθὰς ἡ εζ. βάσις
ἄρα ἡ αζ, βάσις τῇ γζ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν,
ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ ζ σημείου πρὸς τῶν αβγ πόδε-
φύεσθαι προσηπύσασαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. τὸ ζ
ἄρα σημεῖον, πόλος ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου. ὁμοίως δὲ
δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ η σημεῖον, πόλος ἐστὶ τοῦ αβγ κύ-
κλου. τὰ ζ, η, ἄρα σημεῖα, πόλοι εἰσὶ τοῦ αβγ κύκλου. ἐάν τις σφαῖρα κύκλος, ἀπὸ
δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὰ ἐξῆς.



ΘΕΩΡΗΜΑ 9.

Ἐάν ἢ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ ἑνὸς τῶν πόλων αὐτοῦ εἰς αὐτὸν κείσθαι ὁδὸς διὰ γραμμὴν ἀχθῇ, ὑπὸ δὲ κέντρου περσῇται τὸ κύκλου, καὶ περσεβαλλομένη, ὑπὸ τὸν ἕτερον πόλον περσῇται τὸ κύκλου.

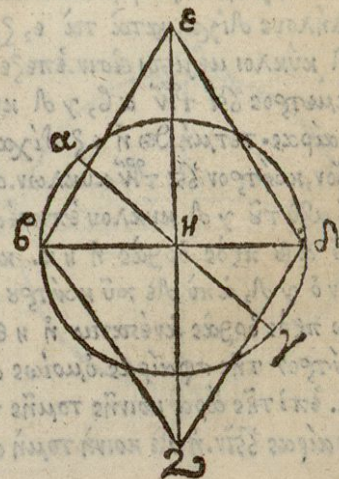
Ἐστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ αβγ, ἀπὸ δὲ τίνος τῶν πόλων αὐτοῦ τὸ δ, κάθετος ἦχθω ἐπ' αὐτὸν, ἢ δε, καὶ συμβαλέτω τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ε σημεῖον, καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ δε, καὶ συμβαλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ ζ σημεῖον. λέγω ὅτι τὸ μὲν ε σημεῖον, κέντρον ἔστι τοῦ αβγ κύκλου. τὸ δὲ ζ, ὁ ἕτερος πόλος ἔστι τοῦ κύκλου. διήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, αἰ εα, εβ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἰ αδ, δβ, αζ, βζ. καὶ ἐπεὶ ἡ δε ὀρθὴ ἔστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον· καὶ πρὸς πάσαις ἀρα τὰς ἀπλομόνας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὖσαι ἐν τῷ αβγ κύκλῳ, ὀρθὰς ποιήσει ἡ γωνίας. ἀπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρω τῶν αε, εβ, οὖσαι ἐν τῷ τοῦ αβγ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἀρα ἔστιν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ δεα, δεβ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ αδ τῇ δβ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αδ, ἴσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν δε, εα· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δβ ἴσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν βε, εδ· κοινὸν ἀφαιρέσθω τὸ ἀπὸ τῆς εδ. λοιπὸν ἀρα τὸ ἀπὸ τῆς αε, ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς εβ λοιπῷ. ἴση ἀρα ἡ αε τῇ εβ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ ε σημεῖος πρὸς τὸν αβγ κύκλον προσπίπτουσι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ. τὸ ε ἀρα σημεῖον, κέντρον ἔστι τοῦ αβγ κύκλου. λέγω δὲ ὅτι καὶ τὸ ζ, σημεῖον, ὁ ἕτερος πόλος ἔστι τῷ αβγ κύκλῳ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἔστιν ἡ αε τῇ εβ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ εζ. βάσει ἀρα ἡ αζ βάσει τῇ βζ ἴση ἔστιν. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ ζ σημείου πρὸς τῷ αβ γραμμῷ προσπίπτουσι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ. τὸ ζ ἀρα σημεῖον, πόλος ἔστι τοῦ αβγ κύκλου. τὸ δὲ δ, ὁ ἕτερος πόλος.



ΘΕΩΡΗΜΑ 1.

Ἐάν ἢ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἢ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ ἀγόμενῃ ὁδῷ, ὁρῇ δὲ πρὸς τὸν κύκλον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ περσῇται τῆς σφαίρας ἐλδύσεται.

Ἐστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ αβγδ, πόλοι δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν τὰ ε, ζ, σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ διὰ τῶν πόλων ἀγόμενῃ, καὶ ἔστω ἡ εζ. λέγω ὅτι ἡ εζ, ὀρθὴ ἔστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς σφαίρας, ἐλεύσεται. συμβαλέτω γὰρ τῷ τοῦ αβγδ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η σημεῖον ἡ εζ, καὶ ἀπὸ τοῦ η σημείου διήχθωσαν αἰ αηγ, βηδ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἰ βε, εδ, βζ, ζδ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ βε τῇ εδ, κοινὴ δὲ ἡ εζ. δύο δὲ αἰ βε, εζ, δυοῖς ταῖς ζε, εδ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ βάσει ἡ βζ, βάσει τῇ ζδ ἔστιν ἴση· γωνία ἀρα ἡ ὑπὸ βεζ, γωνία τῇ ὑπὸ δεζ ἴση ἔστι. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ βε

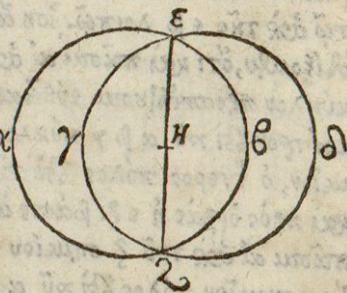


τῇ εδ, κοινὴ δὲ ἡ εη. δύο οὖν καὶ εη, αὐταὶς εη, εδ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ β ε η, γωνία τῇ ὑπὸ δ ε η ὅτι ἴση. βάσις ἄρα ἡ β η, βάσις τῇ η δ ὅτι ἴση, καὶ τὸ ε β η τρίγωνον, τῷ ε δ η περιγώνῳ ἴσον ὅτι, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσονται ἴσται, ὅφ' αἱ αἴσται πλὴν αὐτῶν ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ β η ε γωνία, τῇ ὑπὸ δ η ε γωνία. ὁρθὴ ἄρα ὅτιν ἐκάτερα τῶν ὑπὸ β η ε, δ η ε γωνιών. ἡ εη ἄρα τῇ β δ πρὸς ὁρθὰς ὅτιν. ὁμοίως δὲ δεῖχθήσεται, ὅτι ἡ εη τῇ α γ πρὸς ὁρθὰς ὅτιν. ἡ εη, καὶ τῷ διὰ τῶν β δ, α γ ἄρα ἐπιπέδῳ, τούτῳ τῷ α β γ δ κύκλῳ πρὸς ὁρθὰς ὅτιν. ἡ ε ζ ἄρα ὁρθὴ ὅτιν πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. λέγω δὲ ὅτι καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς σφαίρας ἡ ε ζ. ἐπεὶ γάρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὅτιν ὁ α β γ δ, ἀπὸ δὲ τινος τῶν πόλων αὐτοῦ ἐπ' αὐτὸν καθεύδου ἡ κτμ ἡ εη, καὶ συμβάλλει τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η σημεῖον: τὸ η ἄρα κέντρον ὅτιν τοῦ α β γ δ κύκλου. λέγω δὲ ὅτι καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὅτιν ὁ α β γ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τοῦ η, τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ὁρθὴ ἀνίσταται ἡ εη ζ. ἐπὶ τῆς εη ζ ἄρα ὅτιν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. ἡ ε ζ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου ὅτιν τῆς σφαίρας. ἡ ε ζ ἄρα ὁρθὴ ὅτιν πρὸς α β γ δ κύκλον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς σφαίρας ἔρχεται.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ια'.

Ἐν σφαίρᾳ οἱ μέγιστοι κύκλοι, δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους.

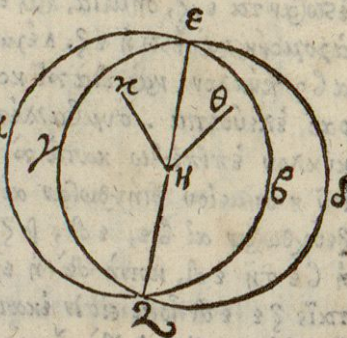
Ἐν γάρ σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ α β, γ δ, τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ ε, ζ σημεῖα. λέγω ὅτι οἱ α β, γ δ κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους. εἰλήφθω γάρ αὐτῶν τὸ κέντρον, καὶ ἔσω τὸ η (τὸ δὲ αὐτὸ ὅτιν καὶ τῆς σφαίρας) καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ εη, η ζ. καὶ ἐπεὶ τὰ ε, η, ζ σημεῖα, ἐν τῷ α β ἐπιπέδῳ ὅτιν. ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ γ δ ἐπὶ ἀμφοτέροις ἄρα τοῖς ἐπιπέδοις τῶν α β, γ δ κύκλων, τὰ ε, η, ζ σημεῖα ὅτιν. τὰ ε, η, ζ ἄρα ἐν τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ὅτιν. πάντως δὲ δύο ἐπιπέδων ἡ κοινὴ τομὴ εὐθεῖα ὅτιν. εὐθεῖα ὅτιν ἄρα ἡ εη ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ η σημεῖον, κέντρον ὅτιν τοῦ α β κύκλου: ἡ ε ζ ἄρα διάμετρος ὅτιν αὐτοῦ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ε α ζ, ε β ζ ἡμικύκλιον ὅτιν. πάλιν ἐπεὶ τὸ η σημεῖον, κέντρον ὅτιν τοῦ γ δ κύκλου: ἡ ε ζ ἄρα, διάμετρος ὅτιν αὐτοῦ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ε γ ζ, ε δ ζ ἡμικύκλιον ὅτιν. οἱ α β, γ δ ἄρα κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ιβ'.

Ἐν σφαίρᾳ οἱ δίχα τέμνοντες ἀλλήλους κύκλοι, μέγιστοι εἰσὶν.

Ἐν γάρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ α β, γ δ τεμνέτωσαν ἀλλήλους δίχα, κατὰ τὰ ε, ζ, σημεῖα. λέγω ὅτι οἱ α β, γ δ κύκλοι μέγιστοι εἰσιν. ἐπεζεύχθω γάρ ἡ ε ζ. ἡ ε ζ ἄρα, διάμετρος ὅτιν τῶν α β, γ δ κύκλων. λέγω δὲ ὅτι καὶ τῆς σφαίρας. τεμήτω ἡ ε ζ δίχα κατὰ τὸ η. τὸ η ἄρα σημεῖον, κέντρον ὅτιν τῶν κύκλων. ἀνέστω ἀπὸ τοῦ η σημεῖου α τῷ μὲν τῷ γ δ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἡ η θ, τῷ δὲ τοῦ α β πρὸς ὁρθὰς ἡ η κ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὅτιν ὁ γ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τῷ τῷ γ δ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἀνίσταται ἡ η θ. ἐπὶ τῆς η θ ἄρα ὅτιν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς η κ. ἐπὶ τῆς ἄρα κοινῆς τομῆς τῶν η θ, η κ, τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ὅτιν. ἡ δὲ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ὅτιν τὸ η σημεῖον. τὸ η ἄρα σημεῖον, κέντρον ὅτιν τῆς σφαίρας.

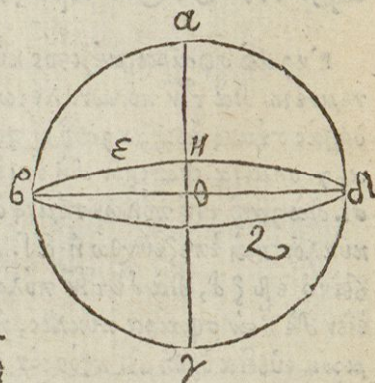


σφαίρας. ἔστι δὲ καὶ τῶν $\alpha\beta, \gamma\delta$ κύκλων κέντρον τὸ η σημεῖον, οἱ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντες τῆς σφαίρας κύκλοι, μέγιστοι εἰσὶν. ἢ σφαίρα ἄρα δίχα τέμνοντες ἀλλήλους κύκλοι, μέγιστοι εἰσὶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΥ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον ἵνα πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, δίχα αὐτὸν τέμνῃ καὶ διὰ τῶν πόλων.

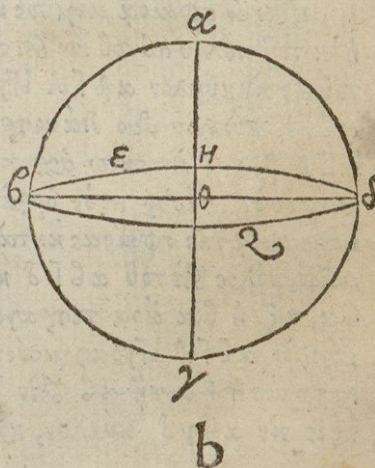
Ἐν γὰρ σφαίρᾳ, μέγιστος κύκλος ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν $\epsilon\beta\zeta\delta$ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω. λέγω ὅτι δίχα αὐτὸν τέμνῃ. καὶ διὰ τῶν πόλων. ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἡ $\beta\delta$, καὶ εἰλήφθω κέντρον τοῦ $\alpha\beta\gamma\delta$ κύκλου τὸ η σημεῖον. τὸ δὲ αὐτὸ ἔστι καὶ τῆς σφαίρας. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ η σημείου ἕως τῷ $\beta\delta$ κάθετος ἡ $\eta\theta$, καὶ ἐκβεβλήθω ἕως ἀμφοτέρω τὰ μέρη, καὶ συμβαλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ α, γ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα ὀρθὰ ἔστι πρὸς ἀλλήλας, τό τε τοῦ $\alpha\beta\gamma\delta$ κύκλου, καὶ τὸ τῆς $\epsilon\beta\zeta\delta$, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν, τῇ $\beta\delta$, πρὸς ὀρθὰς ἤκται ἡ $\theta\alpha$ ἐν ἐνὶ τῇ ἐπιπέδων οὖσα τῷ $\alpha\beta\gamma\delta$. ἡ $\alpha\gamma$ ἄρα καὶ τῷ $\epsilon\beta\zeta\delta$ ἐπιπέδῳ ἔστι πρὸς ὀρθὰς. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἔστιν ὁ $\epsilon\beta\zeta\delta$, ἀπὸ δὲ τῆς κέντρον τῆς σφαίρας ἕως αὐτὸν κάθετος ἤκται ἡ $\eta\theta$, καὶ συμπίπτει τῷ τῆς $\epsilon\beta\zeta\delta$ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ θ σημεῖον. τὸ θ ἄρα σημεῖον, κέντρον ἔστι τῆς $\epsilon\beta\zeta\delta$ κύκλου, ἑκάτερον ἄρα τῶν $\beta\epsilon\delta, \beta\zeta\delta$ ἡμικύκλιον ἔστιν. ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$ ἄρα κύκλος, τὸν $\epsilon\beta\zeta\delta$ κύκλον δίχα τέμνῃ. λέγω δὲ ὅτι καὶ διὰ τῶν πόλων. ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἔστιν ὁ $\epsilon\beta\zeta\delta$, ἀπὸ δὲ τῆς κέντρον τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἤκται ἡ $\eta\theta$, καὶ ἐκβεβλήται ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ α, γ . ἔαν δὲ ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ τοῦ κέντρον τῆς σφαίρας ἕως αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἐκβεβλήθῃ ἕως ἀμφοτέρω τὰ μέρη, ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου. τὰ α, γ ἄρα σημεῖα, πόλοι εἰσὶ τοῦ $\epsilon\beta\gamma\delta$. ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$ ἄρα κύκλος τὸν $\epsilon\beta\zeta\delta$ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνῃ. ἐτεμνε δὲ αὐτὸν καὶ δίχα, ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$ ἄρα κύκλος τὸν $\epsilon\beta\zeta\delta$ κύκλον δίχα τε καὶ διὰ τῶν πόλων τέμνῃ.



ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΔ'.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον ἵνα τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ μέγιστον ὄντα δίχα τέμνῃ, πρὸς ὀρθὰς τε αὐτὸν τέμνῃ, καὶ διὰ τῶν πόλων.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ, μέγιστος κύκλος ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ μέγιστον ὄντα τὸν $\epsilon\beta\zeta\delta$, δίχα τεμνέτω. λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς τε αὐτὸν τέμνῃ, καὶ διὰ τῶν πόλων. ἐπιζεύχθω γὰρ αὐτῶν ἡ κοινὴ τομὴ ἡ $\beta\delta$. καὶ ἐπεὶ ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$ κύκλος, τὸν $\epsilon\beta\zeta\delta$ κύκλον δίχα τέμνῃ. ἑκάτερον ἄρα τῶν $\beta\epsilon\delta, \beta\zeta\delta$ ἡμικύκλιον ἔστιν. ἡ $\beta\delta$ ἄρα διάμετρος ἔστι τοῦ $\epsilon\beta\zeta\delta$ κύκλου. τετμήσθω οὖν ἡ $\beta\delta$ δίχα κατὰ τὸ θ σημεῖον. τὸ θ ἄρα σημεῖον, κέντρον ἔστι τοῦ $\epsilon\beta\zeta\delta$ κύκλου. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $\alpha\beta\gamma\delta$ κύκλου τὸ η σημεῖον. τὸ δὲ αὐτὸ καὶ τῆς σφαίρας ἔστι. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $\eta\theta$ ἐκβεβλήθω ἐφ'

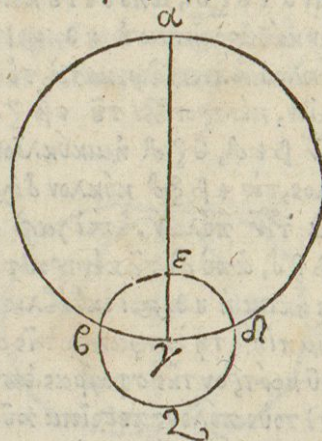


ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ α, γ σημεία. καὶ ἐπεὶ ὁ σφαῖρα κύκλος ἔστιν ὁ ε β ζ δ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπέζωκεται εὐθεῖα ἡ η θ. ἡ θ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ε β ζ δ. καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς η θ ἐπιπέδων, ὀρθὰ ἔστι πρὸς τὸν ε β ζ δ. ἐν δὲ τῇ διὰ τῆς η θ ἐπιπέδων ὁ α β γ δ κύκλος. καὶ ὁ α β γ δ ἄρα κύκλος, ὀρθὸς ἐστι πρὸς τὸν ε β ζ δ. ὁ α β γ δ ἄρα κύκλος, τὸν ε β ζ δ κύκλον πρὸς ὀρθὰς τέμνει λέγω δὴ ὅτι καὶ διὰ τῶν πόλων. Ἐπεὶ γὰρ ὁ σφαῖρα κύκλος ἔστιν ὁ ε β ζ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ η θ, καὶ ἐκβέβηκε ἐπ' ἀμφοτέρω τὰ μέρη, καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ α, γ σημεία τὰ α, γ ἄρα σημεία, πόλοι εἰσι τοῦ ε β ζ δ. ὁ α β γ δ κύκλος ἄρα τὸν ε β ζ δ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει ἔτεμνε δὲ αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς. ὁ α β γ δ ἄρα κύκλος τὸν ε β ζ δ κύκλον πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ διὰ τῶν πόλων.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΕ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον ἵνα τῇ ἐν τῇ σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων τέμνη, δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνη.

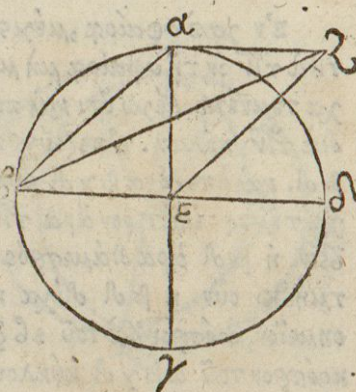
Ἐν γὰρ σφαίρᾳ, μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ, κύκλον τινὰ τῇ ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ε β ζ δ, τέμνεται διὰ τῶν πόλων. λέγω ὅτι δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνη. ἔστω γὰρ οἱ πόλοι τοῦ ε β ζ δ κύκλου, τὰ α, γ σημεία. φανερόν δὴ ὅτι ἐπὶ τοῦ α β γ δ κύκλου εἰσὶ διὰ γὰρ τῶν πόλων τέμνη ὁ α β γ δ κύκλος τὸν ε β ζ δ κύκλον καὶ ἐπεζεύχω ἡ α Γ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἔστιν ὁ ε β ζ δ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτοῦ εὐθεῖα ἦκται ἡ α Γ. ἐὰν δὲ ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἐλεύσεται. ἡ α γ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ε β ζ δ κύκλον. καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς α γ ἐπιπέδων, ὀρθὰ ἔστι πρὸς τὸν ε β ζ δ. ἐν δὲ τῇ διὰ τῆς α γ ἐπιπέδων ἔστιν ὁ α β Γ δ κύκλος. ὁ α β γ δ ἄρα κύκλος, ὀρθὸς ἐστι πρὸς τὸν ε β ζ δ κύκλον. ὁ α β Γ δ ἄρα κύκλος τὸν ε β ζ δ πρὸς ὀρθὰς τέμνει καὶ δίχα δὲ αὐτὸν τέμνει. ὁ α β Γ δ ἄρα κύκλος τὸν ε β ζ δ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνων, δίχα τε αὐτὸν τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΣ.

Ἐὰν ἡ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος, ἡ ἐκ τῶν πόλων αὐτῆς ἴση ᾖ τῇ τῷ τετραγώνῳ πλδρᾷ, τῇ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου.

ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β Γ δ. λέγω ὅτι ἡ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλδρᾷ, τοῦ εἰς τὸν κύκλον α β Γ δ ἐγγραφομένου. ἡ γὰρ τῇ α β Γ δ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀκλήλαιοι αἱ α Γ, β δ, καὶ ἀνεσῆται ἀπὸ τοῦ ε σημείου τῷ τοῦ α β Γ δ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ε ζ, καὶ συμβαλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ ζ σημείον. τὸ ζ ἄρα σημείον, πόλος ἔστι τοῦ α β Γ δ κύκλου. καὶ ἐπεζεύχωσαν αἱ β α, α ζ. ἡ β α ἄρα τετραγώνου ἐστὶ πλδρᾷ, τοῦ εἰς τὸν κύκλον α β Γ δ ἐγγραφομένου. ἡ δὲ ζ α ἐκ τοῦ πόλου ἔστι. λέγω ὅτι ἡ ζ α τῇ β α ἔστιν ἴση. ἐπεὶ γὰρ ἡ ζ ε, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπομείνας αὐτῆς, καὶ οὕτως ἐν τῷ τοῦ

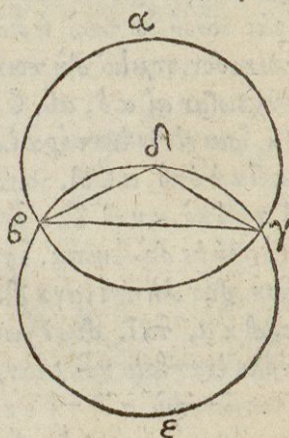


τοῦ αβγδ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθῶς ποιήσει γωνίας. ἡ ζε ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς ἐκάστην τῶν αε, βε, δε. καὶ ἐπεὶ τὸ ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εζ. κοινὴ δὲ ἡ εα. δύο δὲ αἱ βε, εα, δυσὶ ταῖς αε, εζ ἴσαι εἰσιν, ἐκαστέρα ἐκαστέρα· καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ βεα, ὀρθὴ τῇ ὑπὸ αεζ ἴση ἐστὶ. βάσεις ἄρα ἡ βα, βάσι τῇ αζ ἴση ἐστὶ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν αζ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ αβγδ κύκλου· ἡ δὲ βα πλοῦρά τοῦ τετραγώνου τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. ἡ ἄρα ἐκ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, κύκλου, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλοῦρᾳ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΖ'.

Εάν τις ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ δὲ ἐκ τῶν πόλων αὐτοῦ ἴση ἢ τῇ τῷ τετραγώνου πλοῦρᾳ, τῷ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένῳ καὶ αὐτὸς μέγιστος ἔσται.

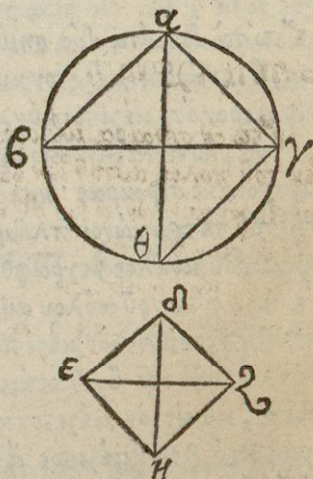
Ἐστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ αβγ, πόλος δὲ αὐτοῦ τὸ δ σημεῖον. ἡ δὲ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἡ δγ, ἴση ἔστω τῇ τετραγώνου πλοῦρᾳ τῷ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. λέγω ὅτι ὁ αβγ, μέγιστος ἔστιν. ἐκβεβλήτω δὲ αὐτῆς δγ, καὶ τοῦ κέντρος τῆς σφαίρας ἐπίπεδον. τομὴν δὲ τινὰ ποιήσει μέγιστον κύκλον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ποιεῖται τὸν βδγε, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ βγ, καὶ ἐπεζεύχω ἡ δβ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ δγ τῇ δβ. καὶ ἐκαστέρα ἄρα τῶν δγ, δβ, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλοῦρᾳ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. ἡμικυκλίου ἄρα ἐστὶ πρὸς ἀμφοτέρω αὐτῇ βδγ. διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βγ τοῦ βδγε κύκλου. καὶ ἐπεὶ τὸ δ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου. ὁ δβγ ἄρα κύκλος τὸν αβγ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ ὁ δβγ κύκλος τὸν αβγ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθῶς τέμνει, καὶ αὐτῶν κοινὴ κομὴ ἐστὶν ἡ βγ, ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου ἐστὶ δὲ καὶ τῆς σφαίρας. μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ αβγ κύκλος.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΗ'.

Τοῦ δοθέντος ἐν σφαίρᾳ κύκλου τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἔκθεσθαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ αβγ, δεῖ δὲ τοῦ αβγ κύκλου τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἔκθεσθαι. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας τυχόντα σημεῖα τὰ α, β, γ, καὶ ἐπεζεύχωσαν αἱ αβ, βγ, γα· καὶ ἐκ τριῶν εὐθεῶν τριγώνον συνασάτω τὸ δεζ ἴσην ἔχον πρὸς τῇ αβ, πρὸς δὲ εζ τῇ βγ, πρὸς δὲ ζδ τῇ αγ. καὶ ἄρ' μὲν τοῦ ε σημείου τῇ εδ πρὸς ὀρθῶς ἦχθω ἡ εη. ἄρ' δὲ τῇ ζδ πρὸς ὀρθῶς ἦχθω ἡ ζη, καὶ ἐπεζεύχω ἡ διη. ἦχθω δὲ καὶ διάμετρος τοῦ αβγ κύκλου, ἡ αθ. λέγω ὅτι ἡ διη, ἴση ἐστὶ τῇ αθ. ἐπεζεύχω δὲ ἡ γθ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ ἴσαι εἰσιν ἐκαστέρα ἐκαστέρα· καὶ βάσεις ἡ αγ, βάσι τῇ διη, ἴση ἐστὶ. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία τῇ ὑπὸ δεζ ἴση ἐστὶν. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ αβγ τῇ ὑπὸ αθγ ἴση ἐστὶν· ἡ δὲ ὑπὸ δεζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ διηζ· καὶ ἡ ὑπὸ αθγ ἄρα τῇ ὑπὸ διηζ ἴση ἐστὶν. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αγθ, ὀρθὴ τῇ ὑπὸ διηζ, ἴση· δύο δὲ τρίγωνα ἐστὶ τὰ αθγ, διηζ ταῖς δύο γωνίαις ταῖς ὑπὸ αγθ, γθα ταῖς δυσὶ γωνίαις ταῖς ὑπὸ διηζ, ζηδ.



b ij

ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλοῦρὰν μιᾷ πλοῦρᾳ ἴσην, πῶς ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, πῶς α γ τῇ δ ζ. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλοῦρας ταῖς λοιπαῖς πλοῦρας ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρα. ἢ α θ ἄρα τῇ δ η ἴση ἔστι. καὶ ἔστιν ἡ α θ, διάμετρος τοῦ κύκλου. ἢ δ η ἄρα ἴση ἔστι τοῦ κύκλου διαμέτρῳ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΘ'.

τῆς δοθείσης σφαίρας τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἐκδέσθαι,

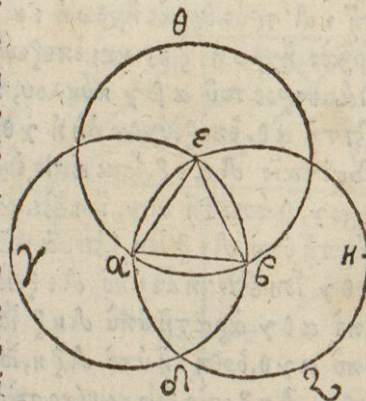
Νοοῦντο γὰρ ἡ σφαῖρα, ἥς δὲ τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἐκδέσθαι· καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δύο τυχόντα σημεῖα τὰ α, β· καὶ πόλῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ α β, κύκλος γεγράφθω ὁ β γ δ. δυνατὸν ἄρα ἔστι τοῦ β γ δ κύκλου τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἐκδέσθαι. ἐκ τριῶν οὖν εὐθεῶν, αἱ εἰσὶ, δύο μὲν ταῖς ἐκ τοῦ πολοῦ τοῦ β γ δ ἴσαι, μία δὲ τῇ διαμέτρῳ, τρίγωνον συνιστάτω ὁ ε ζ η, ὥς ἴσην εἶαι ἑκατέραν τῶν ε ζ, ε η, ἑκατέραν τῇ ἐκ τοῦ πολοῦ τοῦ α. πῶς δὲ ζ η τῇ διαμέτρῳ καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν ζ, η, ταῖς ζ ε, ε η εὐθείαις πρὸς ὁρθὰς γωνίας εὐθεῖαι γραμμαὶ αἱ ζ θ, η θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε θ. λέγω ὅτι ἡ ε θ ἴση ἔστι τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. νοοῦντο γὰρ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡ α κ, καὶ διὰ τῆς α κ ἐπίπεδον. τομὴν δὲ ποιήσει μέγιστον κύκλον. ποιείτω τὸν α δ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, α β, β δ, δ κ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ α β, β δ, δύο ταῖς ε ζ, ζ η ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα· βάσεις δὲ ἡ α δ, βάσις τῇ ε η, ἴση ἔστι, γωνία ἡ ὑπὸ α β δ, γωνία τῇ ὑπὸ ε ζ η ἴση ἔστιν· ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ α β δ τῇ ὑπὸ α κ δ ἔστιν ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ ε ζ η, τῇ ὑπὸ ε θ η ἴση, ὥς ὅν τῳ πρὸ τούτου δέδεικται. ἔστι δὲ καὶ ὁρθὴ ἡ ὑπὸ α δ κ, ὁρθὴ τῇ ὑπὸ ε η θ ἴση. δύο δὲ τρίγωνα ἔστι τὰ α κ δ, ε θ η τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ α δ κ, δ κ α, ταῖς δυοῖ γωνίαις ταῖς ὑπὸ ε η θ, η θ ε ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλοῦρὰν μιᾷ πλοῦρᾳ ἴσην, πῶς ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, πῶς α δ τῇ ε η. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλοῦρας ταῖς λοιπαῖς πλοῦραις ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρα. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ α κ τῇ ε θ· καὶ ἔστιν ἡ α κ, διάμετρος τῆς σφαίρας. ἢ ε θ ἄρα ἴση ἔστι τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α κ'.

Διὰ δύο δοθέντων σημείων, ἃ ἔστιν ὑπὸ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, μέγιστον κύκλον γράψαι.

Ἐῶν τὰ δοδόντα δύο σημεῖα τὰ α, β, ἃ ἔστιν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας. δεῖ δὲ διὰ τῶν α, β σημείων, μέγιστον κύκλον γράψαι. εἰ μὲν τὰ α, β κατὰ διάμετρον ἔστι τῆς σφαίρας· φανερόν ὅτι μέγιστοι κύκλοι ἄπειροι διὰ τῶν α, β σημείων γραφήσονται. μὴ ἔσω δὲ τὰ α, β σημεῖα κατὰ πῶς διάμετρον τῆς σφαίρας· καὶ πόλῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τετραγώνου πλοῦρᾳ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον γραφομένου, κύκλος γεγράφθω ὁ γ δ ε. μέγιστος ἄρα ἔστιν ὁ γ δ ε. ἢ γὰρ ἐκ τοῦ πολοῦ αὐτοῦ ἴση ἔστι τῇ τοῦ τετραγώνου πλοῦρᾳ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. πάλιν πόλῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τετραγώνου πλοῦρᾳ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, κύκλος γεγράφθω ὁ ζ ε η. μέγιστος ἄρα ἔστιν ὁ ζ ε η κύκλος. ἢ γὰρ ἐκ τοῦ πολοῦ αὐτοῦ ἴση ἔστι τῇ τοῦ τετραγώνου πλοῦρᾳ, τοῦ



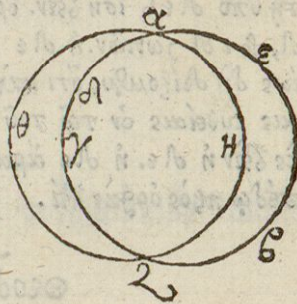
γραφομένη.

γραφομένου εἰς τὸν μέγιστον κύκλον. καὶ ἐπεξεύχωσαν ἀπὸ τοῦ ε σημείου ἐπὶ τὰ α, β, εὐ-
θεῖαι αἱ αε, εβ. ἑκατέρα ἄρα τῶν εα, εβ, ἴση ἔστι τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, καὶ εἰς
τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. ἴση ἄρα ἡ εα τῇ εβ ἔστιν. ὁ ἄρα πῶλον μὲν τῶ ε, δια-
στήματι δὲ τῶ εβ, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τοῦ α, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν εα τῇ
εβ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ αβθ. μέγιστος ἄρα ἔστιν ὁ βαθ κύκλος. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου
αὐτοῦ ἴση ἔστι τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, καὶ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένη. διὰ δύο
ἄρα δοθέντων σημείων τῶν α, β (ἃ ἔστιν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας) μέγιστος κύκλος γέ-
γραπται ὁ αβθ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α κα'.

τοῦ δοθέντος ἐν σφαίρᾳ κύκλου τὸν πόλον εὐρεῖν.

ἔστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ αβγ, δεῖ δὴ τοῦ αβγ κύκλου τὸν πόλον εὐρεῖν. Ἐ-
λήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς πᾶσι περιφέρειας αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον τὸ δλ, καὶ ἀπειλήφωσαν δύο ἴσας
περιφέρειαι αἱ δλα, αε. ἡ δὲ λοιπὴ δε δίχα τεμένεσθαι κατὰ τὸ ζ σημεῖον. ὁ δὲ αβγ
κύκλος ἢ τοῖς μέγιστος ἔστιν, ἢ οὐ. ἔστω πρῶτον μὴ μέγιστος, καὶ διὰ δύο δοθέντων σημείων τῶν
ζ, α, ἃ ἔστιν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ζαθ. καὶ ἐπεὶ ἴση
ἔστιν ἡ δλα περιφέρειᾳ, τῇ αε περιφερείᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ δζ τῇ ζε ἴση. ὅλη ἄρα ἔστιν ἡ
αδζ ὅλη τῇ αεζ ἴση. ὁ ζαθ ἄρα κύκλος τὸν αβγ
κύκλον δίχα τέμνει. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ
αζθ, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ μέγιστον ὄντα δί-
χα τέμνει, πρὸς ὁρθὰς τε αὐτὸν τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων. ὁ
ζθα ἄρα τὸν αβγ πρὸς ὁρθὰς τε, καὶ διὰ τῶν πόλων τέ-
μνει. τετμήσθω ἡ ζα περιφέρειᾳ δίχα κατὰ τὸ η σημεῖον.
τὸ η ἄρα σημεῖον, πόλος ἔστι τοῦ αβγ κύκλου. ἀλλὰ δὴ
πάλιν ὁ αβγ κύκλος, μέγιστος ἔστω. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν,
ὅτι ἴση ἔστιν ἡ αδζ περιφέρειᾳ, τῇ αεζ περιφερείᾳ. τετ-
μήσθω δὲ ἡ αγζ περιφέρειᾳ δίχα κατὰ τὸ γ σημεῖον. ἑκα-
τέρα ἄρα τῶν αγ, γζ περιφερειῶν, τεταρτημόρια ἔστιν. ὁ
ἄρα πῶλον μὲν τῶ γ, διαστήματι δὲ τῶ γζ κύκλος γρα-
φόμενος, ἥξει καὶ διὰ τοῦ α σημείου. ἐπεὶ περ τὸ α τῶ ζ κατὰ διάμετρον ἔστιν. ἐρχέσθω,
καὶ ἔστω ὡς ἡ ζαθ. ὁ ἄρα ζαθ κύκλος μέγιστος ἔστιν. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ, ἴση τῇ τῶ
τετραγώνου πλευρᾷ ἔστι, καὶ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ τὸ γ σημεῖον,
πόλος ἔστι τῶ ζαθ κύκλου, ὁ αβγ ἄρα κύκλος τὸν ζαθ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει.
ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ζαθ διὰ
τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τέμνει καὶ πρὸς ὁρθὰς. ὁ αβγ ἄρα κύκλος ὁρθὸς ἔστι πρὸς
τὸν ζαθ κύκλον. καὶ ὁ ζαθ ἄρα κύκλος ὁρθὸς ἔστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον. ἐπεὶ οὖν ἐν
σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ζαθ, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν αβγ πρὸς ὁρθὰς
τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων. ὁ ζαθ ἄρα κύκλος τὸν αβγ κύκλον δί-
χα τε καὶ διὰ τῶν πόλων τέμνει. τετμήσθω ἡ ζα περιφέρειᾳ δίχα κατὰ τὸ η σημεῖον. τὸ
η ἄρα σημεῖον, πόλος ἔστι τοῦ αβγ κύκλου.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α κβ'.

Εἴαν ἐν σφαίρᾳ διδιδῶν τις Διὰ τῆς κέντρους οὔσης, διδιδῶν τινὰ μὴ
Διὰ τῆς κέντρους οὔσαν δίχα τέμνη, καὶ πρὸς ὁρθὰς αὐτῇ τεμνῇ. καὶ
εἴαν πρὸς ὁρθὰς αὐτῇ τέμνη, καὶ δίχα αὐτῇ τεμνῇ.

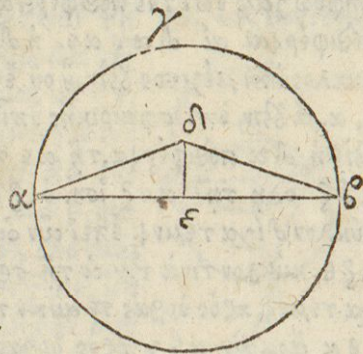
Ἡ ἀπόδειξις ὡς ἐν τοῖς κυκλικοῖς. Εἴαν γὰρ διὰ τῆς διαμέτρου διὰ τοῦ κέντρου οὔ-
σης τῆς σφαίρας, καὶ τῆς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσης ἐπίπεδον ἐκβληθῇ, κομῶν ποιήσουσι,

γραμμὴν κύκλον· καὶ ἔστι ἐν κύκλῳ εὐθεΐαις διὰ τοῦ κέντρου οὐσαι, εὐθεΐαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὐδὲν δίχα τέμνουσα, ὥστε καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. καὶ ἂν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ κγ'.

Ἐὰν ἢ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἅπ' δὲ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας ὑπὸ τῷ κέντρῳ τῷ κύκλου ἐπιζυχθεῖται ὁ κύκλος· ἢ ἐπιζυχθεῖται, καὶ ἴσος ἔσται ὑπὸ τῷ κύκλῳ.

Ἐῶν γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ αβγ, καὶ τὸ μὲν κέντρον τῆς σφαίρας ἔστω τὸ δ σημεῖον, τὸ δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε. λέγω ὅτι ἡ δε ὀρθὴ ἔστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον. διήχθω γάρ τις διὰ τοῦ κέντρου ε ὡς ἐτυχεν εἰς αὐτὸν εὐθεΐα ἡ αεβ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δεα, δεβ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ αετῇ εβ, κοινὴ δὲ ἡ εδ. δύο δὲ αἱ αε, εδ, δυοῖν ταῖς βε, εδ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, καὶ βάσις ἡ αδ, βάσις τῇ δεβ ἴση ἔστι. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αεδ, γωνία τῇ ὑπὸ δεβ ἴση ἔστιν. ὀρθὴ ἄρα ἔστιν ἑκατέρωθεν τῶν ὑπὸ αεδ, βεδ γωνιών. ἡ δε ἄρα τῇ αβ ἔστι πρὸς ὀρθὰς. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πάσαις ταῖς διὰ τοῦ ε ἀπομύουσαις εὐθείαις ἐν τῷ αβγ κύκλῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν ἡ δε. ἡ δε ἄρα εὐθεΐα τῶν τοῦ αβγ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστι.



Θεοδοσίῳ τῷ α' τῇ σφαιρικῇ
πέλος.



ΘΕΟΔΟΣΙΟΥ ΤΡΙ-

ΠΟΛΙΤΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ

δεύτερον.

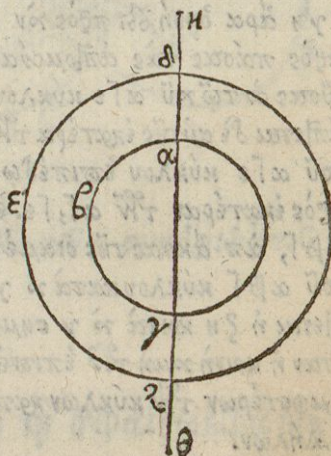
ὍΡΟΣ.

ΕΝ ΣΦΑΙΡΑ, κύκλοι ἐφάπτεσθαι διήλθον λέγονται,
ὅταν ἡ κοινὴ ὁρμὴ τῶν ἐπιπέδων, ἀμφοτέρων τῶν κύκλων
ἐφάπῃται.

ΘΕΩΡΗΜΑ α'.

Εν σφαίρᾳ, οἱ παράλληλοι κύκλοι πρὸς τοὺς αὐτοὺς πόλους
εἰσὶν.

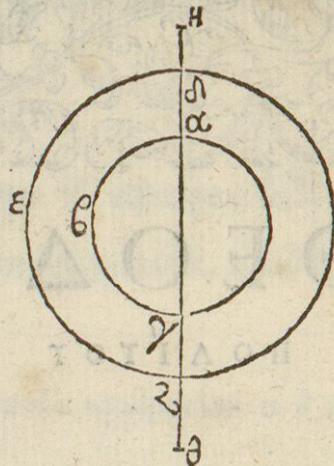
Ἐστὼν γὰρ ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγ, δεζ. λέγω ὅτι οἱ αβγ, δεζ
κύκλοι, πρὸς τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσὶν εἰληφθῶν γὰρ τοῦ αβγ κύκλου οἱ πόλοι, καὶ
ἔστωσαν οἱ η, θ. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἂν ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ διὰ τῶν πόλων
αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα, ὁρθή ᾖ πρὸς τὸν κύκλον. καὶ διὰ
τῶν κέντρων αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ὅσιν ἡ ηθ ἄρα
ὁρθή ᾖ πρὸς τὸν αβγ κύκλον. καὶ ἔσιν οἱ αβγ κύκλος
παράλληλος τῷ δεζ κύκλῳ. καὶ ἡ ηθ ἄρα ὁρθή ᾖ
πρὸς τὸν δεζ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὅσιν οἱ δεζ,
ἄρα δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἔσ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ
ηθ, καὶ ἐκβλήνται ἐπ' ἀμφοτέρω τὰ μέρη, καὶ συμπί-
πῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ η, θ σημεῖα.
ἂν δὲ ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἄρα δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαί-
ρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ καὶ ἐκβληθῇ ἔσ' ἀμφοτέρω
τὰ μέρη, ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου. τὰ η, θ,
ἄρα σημεῖα, πόλοι εἰσὶ τοῦ δεζ κύκλου. οἱ αβγ, δεζ
ἄρα κύκλοι, πρὸς τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσὶ.



ΘΕΩΡΗΜΑ β'.

οἱ πρὸς τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες ἐν σφαίρᾳ κύκλοι, παράλλη-
λοι εἰσὶν.

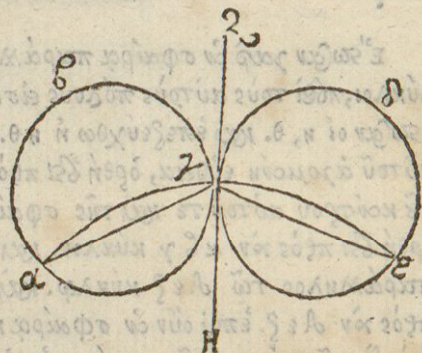
Ἐάντων πᾶν τοὺς αὐτοὺς πόλους τοὺς η, θ ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ $\alpha\beta\gamma, \delta\epsilon\zeta$. λέγω ὅτι οἱ $\alpha\beta\gamma, \delta\epsilon\zeta$ κύκλοι, παράλληλοι εἰσὶν. ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $\eta\theta$. καὶ ἔπει ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὅστις ὁ $\alpha\beta\gamma$. διὰ δὲ τῆς πόλων αὐτοῦ εὐθεῖα διήκτου ἡ $\eta\theta$. ἡ θ ἄρα ὁρθὴ ὅστις πρὸς τὸν $\alpha\beta\gamma$ κύκλον. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ πρὸς τὸν $\delta\epsilon\zeta$ κύκλον, ἡ $\eta\theta$, ὁρθὴ ὅστις. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὁρθὴ ὅστις, ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται. ἐκβαλλόμενα ἄρα τὰ τῶν $\alpha\beta\gamma, \delta\epsilon\zeta$ κύκλων ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται. παράλληλος ἄρα ὅστις ὁ $\alpha\beta\gamma$ κύκλος τῷ $\delta\epsilon\zeta$ κύκλῳ.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α γ'.

Ἐάν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι μεγίστου τινὸς κύκλου πᾶν φέρειαν κ' ε' αὐτὸ σημεῖον τέμνωσι, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ. ἐφάπτονται ἀλλήλων οἱ κύκλοι.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ $\alpha\beta\gamma, \gamma\delta\epsilon$ μεγίστου τινὸς κύκλου πᾶν φέρειαν κ' ε' κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνεται, τὸ γ , τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ. λέγω ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων οἱ $\alpha\beta\gamma, \gamma\delta\epsilon$ κύκλοι. Ἐάντων γὰρ αὐτῶν κοινὰ τομὰ τοῦ μὲν $\alpha\beta\gamma$ καὶ τοῦ $\alpha\beta\gamma$, ἡ $\alpha\gamma$. τοῦ δὲ $\alpha\gamma\epsilon$ καὶ τῷ $\gamma\delta\epsilon$ ἡ $\gamma\epsilon$. τοῦ δὲ $\alpha\beta\gamma$ καὶ τοῦ $\gamma\delta\epsilon$ ἡ $\gamma\zeta$. καὶ ἔπει ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ $\alpha\gamma\epsilon$, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν $\alpha\beta\gamma$, διὰ τῆς πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ, καὶ πρὸς ὁρθάς. διάμετρος ἄρα ὅστις ἡ $\alpha\gamma$ τοῦ $\alpha\beta\gamma$ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ $\gamma\epsilon$ διάμετρος ὅστις τοῦ $\gamma\delta\epsilon$ κύκλου. καὶ ἔπει ὁ $\alpha\gamma\epsilon$, ὁρθὸς ὅστις πρὸς ἑκάτερον τῶν $\alpha\beta\gamma, \gamma\delta\epsilon$ κύκλων, καὶ ἑκάτερος τῶν $\alpha\beta\gamma, \gamma\delta\epsilon$ κύκλων, ὁρθὸς ὅστις πρὸς τὸν $\alpha\gamma\epsilon$ κύκλον, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ὅστις ἄρα ὁρθὴ πρὸς τὸν $\alpha\gamma\epsilon$ κύκλον. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ὅστις ἡ $\zeta\gamma\eta$. καὶ ἡ $\zeta\gamma\eta$ ἄρα ὁρθὴ ὅστις πρὸς τὸν $\alpha\gamma\epsilon$ κύκλον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπλομόνας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ἐν τῷ τοῦ $\alpha\gamma\epsilon$ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὁρθὴ ὅστις. ἀπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάτερα τῶν $\alpha\beta, \gamma\epsilon$, οὕτως ἐν τῷ τοῦ $\alpha\gamma\epsilon$ κύκλου ἐπιπέδῳ. ἡ $\zeta\eta$ ἄρα ὁρθὴ ὅστις πρὸς ἑκατέραν τῶν $\alpha\beta, \gamma\epsilon$. ἔπει οὖν κύκλον τοῦ $\alpha\beta\gamma$, ἀπ' ἀκρας τῆς διαμέτρου τῆς $\alpha\beta$, πρὸς ὁρθάς ἦκται ἡ $\zeta\eta$. ἡ $\zeta\eta$ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $\alpha\beta\gamma$ κύκλου κατὰ τὸ γ σημεῖον. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τοῦ $\gamma\delta\epsilon$ κύκλου ἐφάπτεται ἡ $\zeta\eta$ κατὰ τὸ γ σημεῖον. ἐν δὲ σφαίρᾳ κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ὅταν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφάπτηται. ἀπτεται δὲ ἡ $\zeta\eta$ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων κατὰ τὸ γ σημεῖον. καὶ οἱ $\alpha\beta\gamma, \gamma\delta\epsilon$ ἄρα κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων.

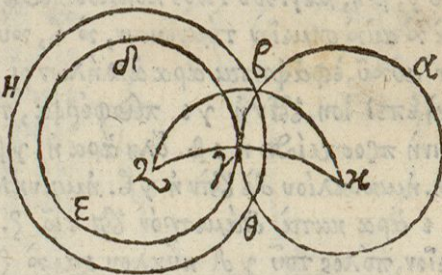


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α δ'.

Ἐάν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπωνται ἀλλήλων, ὁ ἀπὸ τῆς πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γραφόμενος, καὶ ἀπὸ τῆς συναφῆς αὐτῶν ἐλάνσεται.

Ἐν γὰρ

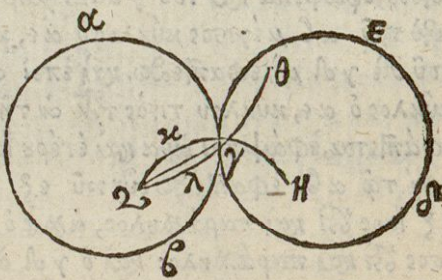
Εἴς σφαῖρα δύο κύκλοι οἱ αβγ, γδε ἐφαπόμεθα ἀλλήλων κατὰ τὸ γ ση-
μαῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγ κύκλου πόλος τὸ κ σημεῖον τοῦ δὲ γδε κύκλου πόλος τὸ
ζ. λέγω ὅτι ὁ διὰ τῶν ζ, κ, πόλων μέγιστος κύ-
κλος γραφόμενος, διὰ τοῦ γ σημείου ἔξει μὴ γὰρ,
ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω, καὶ ἔστω οἱ βκ. καὶ πό-
λω μὲν τῶν ζ, διαστήματι δὲ τῶν ζβ κύκλος γε-
γράφω ὁ βηθ. παράλληλος ἄρα ἔστιν ὁ γδε
κύκλος τῶν βηθ κύκλῳ. πῶς γὰρ τοὺς αὐτοὺς
πόλους εἰσὶν. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ
αβγ, βηθ, πῶς φέρειαν μεγίστου τινὸς κύκλου πῶς
ζβκ, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τὸ β τέμνουσι, τοὺς
πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάπονται ἀλλήλων οἱ
αβγ, βηθ κύκλοι. ἀλλὰ καὶ τέμνουσιν, ὅπερ
ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ διὰ τῶν ζ, κ, πόλων μέγιστος κύκλος γραφόμενος ἔχει καὶ διὰ
τοῦ γ σημείου. ὁ ἄρα διὰ τῶν πόλων αβγ, γδε κύκλων μέγιστος κύκλος γραφόμενος
ἔξει καὶ διὰ τῆς σωμαφῆς τῶν κύκλων.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Ε.

Εἴς σφαῖρα δύο κύκλοι ἐφάπωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν τῶν
ἐνὸς πόλων καὶ τῆς σωμαφῆς μέγιστος κύκλος γραφόμενος, ἔξει καὶ
διὰ τῶν τῶν ἐτέρου πόλων.

Εἴς σφαῖρα γὰρ δύο κύκλοι οἱ αβγ, γδε, ἐφαπόμεθα ἀλλήλων κατὰ τὸ γ ση-
μαῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγ κύκλου πόλος τὸ ζ σημεῖον, τοῦ δὲ γδε κύκλου πόλος τὸ
η σημεῖον. λέγω ὅτι ὁ διὰ τῶν ζ, γ, σημείων μέγ-
ιστος κύκλος γραφόμενος, καὶ διὰ τοῦ η σημείου
ἐλεύσεται. μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὁ
ζγθ. καὶ γεγράφω διὰ τῶν ζ, η πόλων μέγιστος
κύκλος ὁ ζη. ἔξει δὲ διὰ τοῦ γ. ἐπεξεύχω ἡ ζΓ.
καὶ ἐπεὶ μέγιστός ἐστιν ἑκάτερος τῶν ζγη, ζγθ.
εἰς αὐτὰ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλους. ἑκάτερον ἄρα τῶν
ζκγ, ζλγ ἡμικύκλιόν ἐστιν. ἡ ζγ ἄρα διάμε-
τρος ἐστὶ τῆς σφαίρας, ἐπεὶ καὶ τῶν μεγίστων κύ-
κλων τῶν ζγη, ζγθ. ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ
αβγ κύκλου, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ διὰ
τῶν ζ, γ, σημείων μέγιστος κύκλος γραφόμενος οὐκ ἔξει καὶ διὰ τοῦ η σημείου. διὰ τοῦ η
σημείου ἄρα ἔξει.

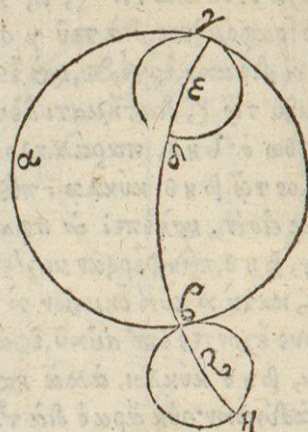


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Σ.

Εἴς σφαῖρα μέγιστος κύκλος ἑνὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτη-
ται. ἐφάπεται καὶ ἐτέρου ἴσου τε καὶ παραμήλου αὐτῷ.

Εἴς γὰρ σφαῖρα μέγιστος κύκλος ὁ αβγ, κύκλου τινὸς τοῦ γδε ἐφαπόμεθα κατὰ τὸ
γ σημεῖον. λέγω ὅτι ὁ αβγ κύκλος ἐφάπεται καὶ ἐτέρου κύκλου ἴσου τε καὶ παραμήλου
τῶν γδε κύκλῳ. εἰλήφω ὁ πόλος τοῦ γδε κύκλου, καὶ ἔστω τὸ ε σημεῖον. καὶ γεγράφω
διὰ τῶν γ, ε σημείων μέγιστος κύκλος ὁ γεδβζ. καὶ ἀπειλήφω τῇ γε πῶς φέρειαν
ἴσην ἢ βζ. καὶ πόλω μὲν τῶν ζ, διαστήματι δὲ τῶν ζβ, κύκλος γεγράφω ὁ βη. καὶ ἐπεὶ

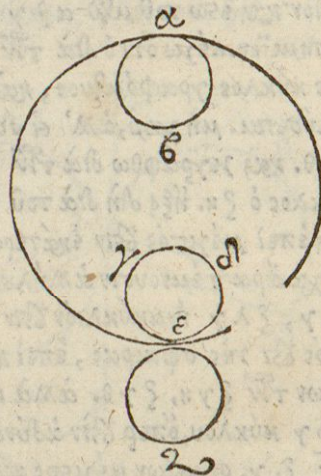
ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ α β γ, γ δ, ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῆς τοῦ οὗτος πόλων τοῦ ε, καὶ τῆς ἀφῆς, μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ γ ε δ β ζ η. ὁ γ ε δ β ζ η ἄρα ἕξ διὰ τῆς τοῦ α β γ πόλων. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ α β γ, β η, μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρουσαν τὴν γ η, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσιν, τὸ β, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάπτονται ἄρα ἀλλήλων οἱ α β γ, β η, κύκλοι καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ γ ε περιφέρουσα, τῇ β ζ περιφέρειᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ε β. ὅλη ἄρα ἡ γ β, ὅλη τῇ ε ζ ἔστιν ἴση. ἡμικυκλίου δὲ ἔστιν ἡ γ β. ἡμικυκλίου ἄρα καὶ ἡ ε ζ. τὸ ε ἄρα κατὰ διάμετρον ἔστι τῶ ζ. καὶ ἔστι τὸ ε σημεῖον, πῶς τοῦ γ δ κύκλου. καὶ τὸ ζ ἄρα ὁ ἕτερος πῶς ἔστι τοῦ γ δ κύκλου. πάλιν ἐπεὶ ἡ ε ζ ἡμικυκλίου ἔστι, καὶ ἔστι τὸ ζ πῶς τοῦ β η κύκλου. καὶ τὸ ε ἄρα ὁ ἕτερος πῶς ἔστι τοῦ β η κύκλου. οἱ γ δ, β η, ἄρα κύκλοι, πῶς τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες, παράλληλοι εἰσι. παράλληλος ἄρα ἔστιν ὁ γ δ τῶ β η κύκλω. καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ γ ε τῇ β ζ, ἴσος ἄρα καὶ ὁ γ δ κύκλος τῶ β η κύκλω. ἀλλὰ καὶ παράλληλος. ὁ α β γ ἄρα κύκλος ἐφάπτεται καὶ τοῦ ἑτέρου κύκλου τοῦ β η, ἴσως τε καὶ παραλλήλου τῶ γ δ.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ζ'.

Ἐάν ᾧσιν ἐν σφαίρᾳ δύο ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι, ὁ τῶ οὗτος αὐτῶν μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος, ἐφάπτεται καὶ τῶ ἑτέρου.

Ἐστὼ ἐν σφαίρᾳ δύο ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι, οἱ α β, γ δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α β μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος, ἐφάπτεται καὶ τοῦ γ δ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἐφαπτόμενος τοῦ α β μέγιστος κύκλος ὁ α ε, κατὰ τὸ α σημεῖον, τοῦ δὲ γ δ μὴ ἐφαπτόμενος. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α ε, κύκλου τινὸς τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ α β ἐφάπτεται, ἐφάπτεται ἄρα καὶ ἑτέρος ἴσως τε καὶ παραλλήλου τῶ α β. ἐφαπτόμενος οὖν τοῦ ε ζ. ἐπεὶ οὖν ὁ α β τῶ ε ζ ἴσος ἔστι καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ὁ α β καὶ τῶ γ δ ἴσος ἔστι καὶ παράλληλος. καὶ ὁ γ δ ἄρα τῶ ε ζ ἴσος ἔστι καὶ παράλληλος. ἔσονται ἄρα ἐν σφαίρᾳ τρεῖς κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοι, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ τῶ α β μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος, οὐκ ἐφάπτεται καὶ τοῦ γ δ. ἐφάπτεται ἄρα.

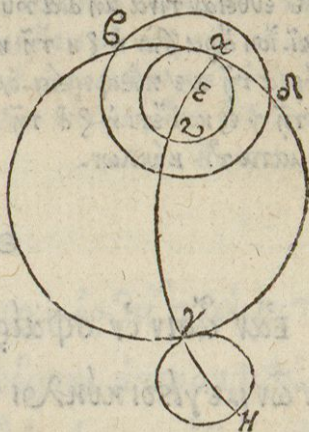


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α η'.

Ἐάν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος πρὸς τινὰ κύκλον τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ λόξος ᾖ, ἐφάπτεται δύο κύκλων ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῶ πρὸς εἰρημένῳ.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ, πρὸς τινὰ κύκλον τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ τῶν β δ, λόξος ἔστω, τούτῃ μὴ ἔστω διὰ τῆς πόλων. λέγω ὅτι ὁ α β γ κύκλος ἐφάπτεται δύο κύκλων ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῶ πρὸς εἰρημένῳ, τῶ β δ. ἐπεὶ γὰρ ὁ α β γ κύκλος,

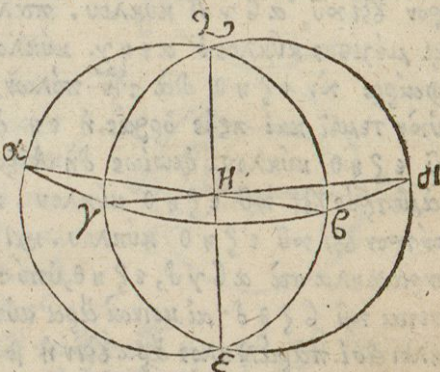
κύκλος, λοξός ἔστι πρὸς τὸν β δ, ὁ πόλος τοῦ β δ οὐκ ἔστιν ἐπὶ τοῦ α β γ κύκλου. εἰλήφθω οὖν ὁ πόλος τοῦ β δ κύκλου, καὶ ἔστω ε σημεῖον. καὶ διὰ τοῦ ε σημεῖου καὶ οὗτος τῶν τε α β γ κύκλου πόλων, μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ α ε γ η. καὶ πόλῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ α ε, γεγράφθω ὁ α ζ. παράλληλος ἄρα ἔστιν ὁ α ζ τῷ β δ. πῶς γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσὶ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ α β γ, α ζ, μεγίστου τινὸς κύκλου πᾶσι φέρειαν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ α, τοὺς πόλους ἔχοντες ἑω' αὐτοῦ, ἐφάπτονται ἀλλήλων. ὁ ἄρα α β γ κύκλος τοῦ α ζ κύκλου ἐφάπτεται. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ, κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ α ζ ἐφάπτεται, ἐφάπτεται ἄρα καὶ ἑτέρου ἴσου τε καὶ παράλληλου τῷ α ζ. ἐφάπτεσθαι οὖν τοῦ γ η. ἐπεὶ οὖν ὁ α ζ τῷ γ η ἴσος τε ἔστι καὶ παράλληλος. ἀλλ' ὁ α ζ τῷ β δ ἔστι παράλληλος. καὶ ὁ γ η ἄρα τῷ β δ ἔστι παράλληλος. ὁ α β γ ἄρα κύκλος ἐφάπτεται δύο κύκλων τῶν α ζ, γ η, ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ β δ.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Θ'.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν ὧν λθον αὐτῶν μέγιστος κύκλος γραφῇ· δίχα πεμεῖ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ζ α ε β, ζ δ ε γ, τεμνέσθωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ ε, ζ σημεία. διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ α γ β δ. λέγω ὅτι ὁ α γ β δ, κύκλος, δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων. τοῦτ' ἔστιν, ὅτι ἡ μὲν ζ α πᾶσι φέρει, ἴση ἔστι τῇ α ε πᾶσι φέρει· ἡ δὲ ζ β πᾶσι φέρει, ἴση ἔστι τῇ β ε πᾶσι φέρει· ἡ δὲ ζ γ τῇ γ ε· καὶ ἡ ζ δ τῇ δ ε· ἔστω γὰρ τοῦ μὲν α γ β δ κύκλου καὶ τοῦ ζ α ε β, κοινὴ τομὴ ἡ α β· τοῦ δὲ α γ β δ καὶ τοῦ ζ γ ε δ κοινὴ τομὴ ἡ γ δ· καὶ ἐπεὶ εὐχόμεθα αἱ ζ η, η ε, καὶ ἐπεὶ τὰ ζ, η, ε, σημεία ἐν τῷ τοῦ α ε β ζ κύκλου ἐπιπέδῳ εἰσὶν. ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ τοῦ ζ δ ε γ κύκλου ἐπιπέδῳ τὰ ζ, η, ε, ἄρα σημεία ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς εἰσὶ τῶν δύο ἐπιπέδων. πάντως δὲ δύο ἐπιπέδων ἡ κοινὴ τομὴ εὐθεῖα ἔστιν. ἐπ' εὐθείαν ἄρα ἔστιν ἡ ζ η τῇ η ε. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α γ β δ, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ζ α ε β διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθὰς. ἡ α β ἄρα, διάμετρος ἔστι τοῦ ζ α ε β κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ γ δ διάμετρος ἔστι τοῦ ζ δ ε γ κύκλου. καὶ ἐπεὶ ὁ α γ β δ κύκλος ὀρθός ἔστι πρὸς ἑκάτερον τῶν ζ α ε β, ζ δ ε γ κύκλων, καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν ζ α ε β, ζ δ ε γ, ὀρθός ἔστι πρὸς τὸν α γ β δ κύκλον. ἐὰν δὲ δύο ἐπιπέδα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἦ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ ἐπιπέδῳ. καὶ ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ζ α ε β, ζ δ ε γ τῷ α γ β δ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστιν ἡ ζ η ε. καὶ ἡ ζ η ε ἄρα ὀρθή ἔστι πρὸς τὸν α γ β δ κύκλον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπλομοίας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ τοῦ α γ β δ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἀπείετα δὲ τῆς ζ η ε, ἑκάτερα τῶν α β, γ δ, οὐσας ἐν τῷ τοῦ α γ β δ κύκλου ἐπιπέδῳ. ἡ ζ η ε ἄρα, ὀρθή ἔστι πρὸς ἑκάτεραν τῶν α β, γ δ, καὶ ἑκάτερα ἄρα τῶν

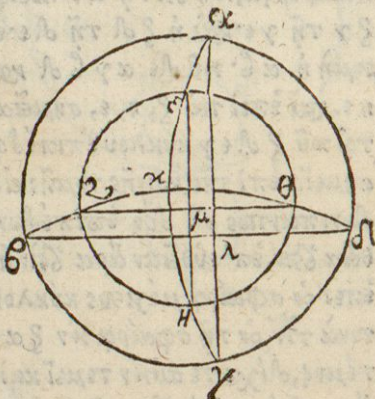


αβ, γδ, ὁρθὴ ἔστι πρὸς τὴν ζηε. ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ζαεβ, εὐθεῖαί τις διὰ τοῦ κοίτρου ἢ αβ εὐθείαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κοίτρου οὕτως τὴν ζηε πρὸς ὁρθὰς τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ζη τῇ ηε. κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὁρθὰς ἡ ηα. ἴση ἄρα ἔστι καὶ ἡ ζα περιφέρειᾳ τῇ αε πᾶσι περιφέρειᾳ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν ζβ τῇ βε ἴση ἔστιν, ἡ δὲ ζγ τῇ γε, καὶ ἔτι ἡ ζδ τῇ δε. ὁ αβδλ ἄρα κύκλος, δίχα τέμνῃ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Ι.

Ἐὰν ὥσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, ἀλλὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων πᾶσι περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων, ὁμοίαι εἰσίν. αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων πᾶσι περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ἴσαι εἰσίν.

Ἐστὼν ἐν σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ αβγδ, εζηθ. διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γεγράφωσιν οἱ αεηγ, βζθδ. λέγω ὅτι αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων πᾶσι περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοίαι εἰσίν. οὗτ' ἔστιν, ὅτι ἡ μὲν βγ πᾶσι περιφέρειᾳ, ὁμοίᾳ ἔστι τῇ ζη πᾶσι περιφέρειᾳ. ἡ δὲ γδ τῇ ηθ, ἡ δὲ δα τῇ θε. καὶ ἔτι ἡ αβ τῇ εζ. αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων πᾶσι περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ἴσαι εἰσίν. οὗτ' ἔστιν ὅτι αἱ τέσσαρες αἱ ζβ, ηγ, θδ, εα, ἴσαι ἀκμήλαι εἰσίν. ἔστω γὰρ τοῦ μὲν αβγδ κύκλου καὶ τοῦ βζθδ κοινὴ κομὴ ἡ βδ, τοῦ δὲ αβγδ κύκλου καὶ τοῦ αεηγ κοινὴ κομὴ ἡ αγ, τοῦ δὲ εζηθ κύκλου καὶ τοῦ ζκθ κοινὴ κομὴ ἡ ζθ, τοῦ δὲ εζηθ καὶ τοῦ εκη κοινὴ κομὴ ἡ εη. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αεηγ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν αβγδ διὰ τῶν πόλων τέμνῃ, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὁρθὰς. ἡ αγ ἄρα, διάμετρος ἔστι τοῦ αβγδ κύκλου. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι ἡ βδ διάμετρος ἔστι τοῦ αβγδ κύκλου. καὶ λ ἄρα σημεῖον κοίτρου ἔστι τοῦ αβγδ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αεηγ, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν εζηθ διὰ τῶν πόλων τέμνῃ. δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὁρθὰς. ἡ εη ἄρα διάμετρος ἔστι τοῦ εζηθ κύκλου. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ ζθ διάμετρος ἔστι τοῦ εζηθ κύκλου. καὶ μ ἄρα σημεῖον κοίτρου ἔστι τοῦ εζηθ κύκλου. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ αβγδ, εζηθ, ὑπὸ τίνος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ βζθδ. αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν κομᾶι, παράλληλοι εἰσίν. παράλληλος ἄρα ἔστιν ἡ βδ τῇ ζθ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ γα τῇ εη παράλληλος ἔστιν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀπὸ μέρους ἀκμήλων αἱ βλ, λγ, παρὰ δύο εὐθείας ἀπὸ μέρους ἀκμήλων τὰς ζμ, μη, εἰσὶ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας γωνίας πᾶσι περιέουσιν. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ ζμη γωνία, τῇ ὑπὸ βλγ γωνία. καὶ εἰσὶ πρὸς τοῖς κοίτρου, καὶ βέβηκεν ἡ μὲν ὑπὸ ζμη γωνία ἐπὶ τῇς ζη πᾶσι περιφέρειᾳ. ἡ δὲ ὑπὸ βλγ γωνία, ἐπὶ τῇς βγ πᾶσι περιφέρειᾳ. ὁμοίᾳ ἄρα ἔστιν ἡ βγ πᾶσι περιφέρειᾳ τῇ ζη πᾶσι περιφέρειᾳ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν γδ πᾶσι περιφέρειᾳ, ὁμοίᾳ ἔστι τῇ ηθ πᾶσι περιφέρειᾳ, ἡ δὲ αδ τῇ εθ, καὶ ἔτι ἡ αβ τῇ εζ. αἱ ἄρα τῶν παραλλήλων κύκλων πᾶσι περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοίαι εἰσίν. λέγω δὲ ὅτι καὶ αἱ τῶν μεγίστων κύκλων πᾶσι περιφέρειαι αἱ

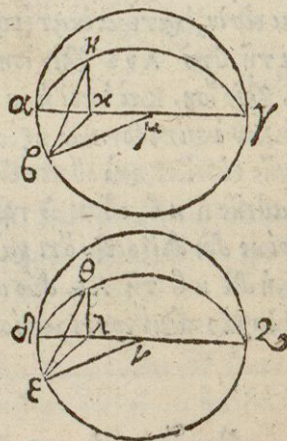


ῥθαι, αὐτὰ μεταξύ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ τὸ κ σημεῖον πόλος ἔστι τοῦ α β γ δ κύκλου, αὐτὰς αὖτε αὐτὰς ἀρα αὐτὰς κ α, κ β, κ γ, κ δ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν ἐπεὶ τὸ κ σημεῖον πόλος ἔστι τοῦ ε ζ η θ κύκλου. αὐτὰς αὖτε αὐτὰς ἀρα αὐτὰς κ ε, κ ζ, κ η, κ θ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. λοιπὰ ἀρα αὐτὰς αὐτὰς αὐτὰς ε α, ζ β, η γ, θ δ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αὐτὰς ἀρα τῶν μεγίστων κύκλων πᾶσι φέρεται αὐτὰς μεταξύ τῶν παραλλήλων κύκλων, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΑ'.

Ἐάν ἐν ἴσοις κύκλοις ὑπὸ διαμέτρων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐπισαθῇ, ἀπὸ δὲ αὐτῶν ἴσαι πᾶσι φέρεται ἀποληφθῶσι πρὸς τοῖς πέρασι τῶν τμημάτων, ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῶν ὅλων καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων σημείων πρὸς τὰς τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων πᾶσι φέρεται ἴσαι διδύμειαι προσβληθῶσιν ἴσαι ἀποληφθῶσι πᾶσι φέρεται τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων πρὸς τοῖς πέρασι τῶν διαμέτρων.

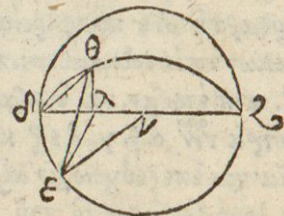
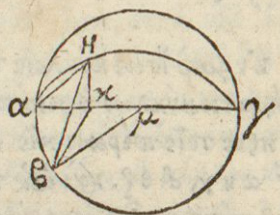
Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς α β γ, δ ε ζ ἐπὶ διαμέτρων τῶν α γ, δ ζ, ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφεσάτω τὰ α η γ, δ θ ζ, καὶ ἀπὸ αὐτῶν ἴσαι πᾶσι φέρεται ἀπὸ λήφθωσιν πρὸς τοῖς πέρασι τοῖς α, δ, σημείοις. αὐτὰς αὖτε αὐτὰς ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῶν ὅλων τῶν α η γ, δ θ ζ. καὶ ἀπὸ τῶν η, θ, σημείων πρὸς τὰς τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων τῶν α β γ, δ ε ζ, πᾶσι φέρεται, ἴσαι εὐθεῖαι προσβληθῶσιν αὐτὰς κ β, θ ε. λέγω ὅτι ἴσαι ἔσιν ἡ α β πᾶσι φέρεται, τῇ δ ε πᾶσι φέρεται. ἡχθῶσιν γὰρ ἀπὸ τῶν η, θ, σημείων ἐπὶ τὰ τῶν α β γ, δ ε ζ κύκλων ἐπιπέδῳ, κάθετοι. πεσοῦνται δὲ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς, τοῦτ' ἔστιν, ἐπὶ τὰς α γ, δ ζ. περιπέτωσιν, καὶ ἔστωσιν αὐτὰς κ η, θ λ καὶ εἰλήφθω τὰ κοίτρεα τῶν α β γ, δ ε ζ κύκλων, καὶ ἔστω τὰ μ, ν, σημεία καὶ ἐπερὶ εὐχθῶσιν αὐτὰς κ β, β μ, λ ε, ε ν. καὶ ἐπεὶ ἡ κ η ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α β γ κύκλου ἐπιπέδον, καὶ πρὸς πάσας ἀρα τὰς ἀπομεινῶν αὐτῆς καὶ οὖσας ἐν τῷ τοῦ α β γ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσῃ γωνίας. ἀπαιτῶνται δὲ αὐτῆς ἡ κ β οὖσα ἐν τῷ τοῦ α β γ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἀρα ἔστιν ἡ ὑπὸ κ η β. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ θ λ ε γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ δύο τμήματα τὰ α η γ, δ θ ζ ἴσα ἔσιν, καὶ ἀπειλημμένοι ἴσαι εἰσὶ περιφύεσθαι αὐτὰς α η, δ θ, καὶ κάθετοι ἡγεύμεναι εἰσὶν αὐτὰς κ η, θ λ. ἴση ἀρα ἔστιν ἡ μὲν α κ τῇ δ λ, ἡ δὲ κ η τῇ θ λ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ β η τῇ θ ε. ἴσον ἀρα ἔστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β η τῷ ἀπὸ τῆς θ ε ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς β η ἴσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν κ η, κ β. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς θ ε ἴσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν θ λ, λ ε. τὰ ἀρα ἀπὸ τῶν κ η, κ β ἴσα ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν θ λ, λ ε. ὦν τὸ ἀπὸ τῆς κ η ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς θ λ. λοιπὸν ἀρα τὸ ἀπὸ τῆς κ β λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς λ ε ἴσον ἔστιν. ἴση ἀρα ἔστιν ἡ κ β τῇ λ ε. καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ α μ τῇ δ ν, ὦν ἡ α κ τῇ δ λ ἴση ἔστι. λοιπὴ ἀρα ἡ κ μ τῇ λ ν ἔστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ β μ τῇ ν ε. δύο δὲ αὐτὰς κ μ, μ β, δυοὶ ταῖς λ ν, ν ε ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, καὶ βάσει τῇ λ ε ἔστιν ἴση. γωνία ἀρα ἡ ὑπὸ κ μ β τῇ ὑπὸ λ ν ε ἔστιν ἴση. ἐν δὲ τοῖς ἴσοις κύκλοις αὐτὰς γωνία ἐπὶ ἴσων πᾶσι φέρεται βεβῆκασι. ἐάν τε πρὸς τοῖς κοίτρεοις, ἐάν τε πρὸς ταῖς πᾶσι φέρεταις ὥσι βεβῆκασι. ἴση ἀρα ἔστιν ἡ α β πᾶσι φέρεται τῇ δ ε πᾶσι φέρεται.



ΘΕΩΡΗΜΑ 13.

Εὰν ἐν ἴσοις κύκλοις ὑπὸ διὰ μέτρων ἴσα καὶ ὁρθὰ τμήματα
κύκλων ἐπισταθῇ, ἀπὸ δὲ αὐτῶν ἴσαι ποδι φέρεται ἀποληφθῶσι
πρὸς τοῖς πέρασιν, ἐλαττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῇ ὅλῃ τμημάτων.
ἀπὸ δὲ τῇ κύκλον ἴσαι ποδι φέρεται ἀποληφθῶσιν ὑπὸ τὰ αὐτὰ
μόρη πρὸς τοῖς πέρασι τῇ διαμέτρων, αἱ ὑπὸ τὰ γινόμενα σημεῖα
ἐπιβυγνύμεναι δύθεται ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις.

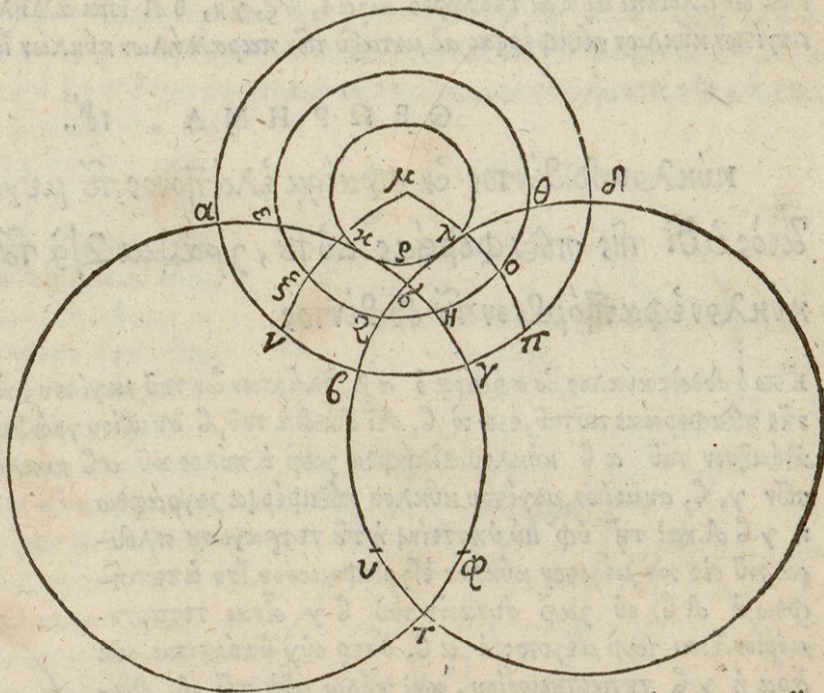
Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς αβγ, διεζ, ἐπὶ διαμέτρων τῶν αγ, διζ, ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφεσάτω, ταῖ αηγ, διθζ· καὶ ἂν αὐτῶν ἴσαι ἀπειλήφθωσαν πᾶσι φέρειαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῖς πέρασι τῶν τμημάτων, αἱ αηγ, δθ, ἐλάττωουσιν ἢ ἡμίσειαι οὕτως τῶν ὅλων τμημάτων, ἀλλὰ διὰ τῶν αβγ, διεζ κύκλων, ἀφηρήσθωσαν ἴσαι πᾶσι φέρειαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῖς πέρασι τῶν διαμέτρων, αἱ αβ, διε· καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ηβ, θε, λέγω ὅτι ἴση ἔστιν ἡ ηβ τῇ θε. ἤχθωσαν γὰρ ἀλλὰ τῶν η, θ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν αβγ, διεζ κύκλων ἐπιπέδα, κάθετοι αἱ ηκ, θλ. πεσοῦνται δὲ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομαῖς, τοῦτ' ἔστιν ἐπὶ τὰς αγ, διζ. καὶ εἰλήφθωσαν τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ μ, ν. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ κβ, βμ, λε, εν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ αβ πᾶσι φέρειαι, τῇ διε πᾶσι φερείαι· ἴση ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ αμβ γωνία, τῇ ὑπὸ δινε γωνία. καὶ ἐπεὶ δύο τμήματα κύκλων ἴσα ἔστι τὰ αηγ, διθζ, καὶ ἀπειλημμέναι εἰσὶν ἴσαι πᾶσι φέρειαι αἱ αηγ, διθ· καὶ κάθετοι ἡ γμοῖαι εἰσὶν, αἱ κη, θλ, ἴση ἄρα ἔστιν ἡ μδὲ ακ τῇ διλ, ἡ δὲ ηκ τῇ θλ. ἐπεὶ οὖν ἡ αμ τῇ διν ἔστιν ἴση, ὧν ἡ ακ τῇ διλ ἔστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ κμ, λοιπὴ τῇ λν ἴση ἔστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ βμ τῇ νε ἴση. δύο δὲ αἱ κμ, μβ, δυοὶ ταῖς λν, νε, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κμβ, γωνία τῇ ὑπὸ λνε ἔστιν ἴση. βάσις ἄρα ἡ κβ, βάσις τῇ λε ἔστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἡ ηκ, ὀρθὴ ἔστι πρὸς τὸ τοῦ αβγ κύκλου ἐπιπέδον. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπὸ μοῖας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ὡς τῷ τοῦ αβγ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἀπῆλθεν δὲ αὐτῆς ἡ κβ, οὕτως ὡς τῷ τοῦ αβγ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ ηκβ γωνία. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ θλε γωνία, ὀρθὴ ἔστιν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ μδὲ ηκ τῇ θλ, ἡ δὲ κβ τῇ λε. δύο δὲ αἱ ηκ, κβ, δυοὶ ταῖς θλ, λε ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ ὀρθὰς πᾶσι φέρουσιν γωνίας. βάσις ἄρα ἡ ηβ, βάσις τῇ θε ἔστιν ἴση.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ιγ'.

Εάν ὦσιν ἐν σφαίρα παραμήλαιο κύκλοι, καὶ γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι, ἐκὸς μὲν αὐτῶν ἐφαπτόμενοι, τοὺς δὲ λοιποὺς τέμνοντες. αἱ δὲ τῇν παραμήλαιον κύκλῳ περιφέρουσαι αἱ μεταξύ τῇν ἀσυμπλήτων ἡμικυκλίων, τῇν μεγίστων κύκλῳ, ὅμοιαι εἰσὶν· αἱ δὲ τῇν μεγίστων κύκλῳ περιφέρουσαι αἱ μεταξύ τῇν παραμήλαιον, ἴσαι εἰσὶν.

ἔσονται ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, κλ, καὶ γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ αεκηγφτ, βζλθδτ, οἷος μὲν αὐτῶν τοῦ κλ ἐφαπτόμενοι κατὰ τὰ κ, λ σημεία, τοὺς δὲ λοιποὺς τέμνοντες. λέγω ὅτι αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων πᾶσι περὶφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπλήτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων, ὁμοίαι εἰσι. τίνας δὲ εἶσιν αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπλήτων ἡμικυκλίων, γνωσόμεθα οὕτως. Ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους, ἢ ἄρα σκατ, ἡμικυκλίου ἔστι περὶφέρεια. ἢ κατ ἄρα ἐλάσσων ἔστιν ἡμικυκλίου. πάλιν ἐπεὶ ἡ τφγσ ἡμικυκλίου ἔστι περὶφέρεια. ἢ ἄρα κσηγφτ μείζων ἔστιν ἡμικυκλίου. ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ κατ ἐλάσσων ἔστιν ἡμικυκλίου. ἔστω οὖν ἡμικυκλίου ἡ κατφ. πάλιν ἐπεὶ ἡ σβυτ, ἡμικυκλίου ἔστι περὶφέρεια. ἢ ἄρα λσβτ μείζων ἔστιν ἡμικυκλίου. κείδω οὖν ἡμικυκλίου ἡ λσβυ. τὸ ἄρα ἀπὸ τοῦ κ ἡμικυκλίου, τοῦτ' ἔστι τὸ κατφ, ἀσύμπλητον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς λ ἡμικυκλίου, τοῦτ' ἔστι τῷ λσβυ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ κσηγφ ἡμικυκλίου ἀσύμπλητον ἔστι τῷ λδτν ἡμικυκλίου. αἱ ἄρα μεταξὺ τῶν ἀσυμπλήτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων οὗσαι τῶν παραλλήλων κύκλων πᾶσι περὶφέρειαι, αἱ κρλ, εεζ, ανβ, ηοθ, γπδ πᾶσι περὶφέρειαι εἰσὶ. λέγω δὲ ὅτι αἱ μὲν κρλ, εεζ, ανβ ὁμοίαι εἰσὶ. καὶ ἔτι αἱ κρλ, ηοθ, γπδ ὁμοίαι ἀλλήλαις εἰσὶν. αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων πᾶσι περὶφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ἴσαι εἰσὶν. τοῦτ' ἔστιν ὅτι αἱ μὲν τέσσαρες αἱ εκ, κη, ζλ, λθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. αἱ δὲ τέσσαρες αἱ αε, βζ, ηγ, θδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. εἰλήθω



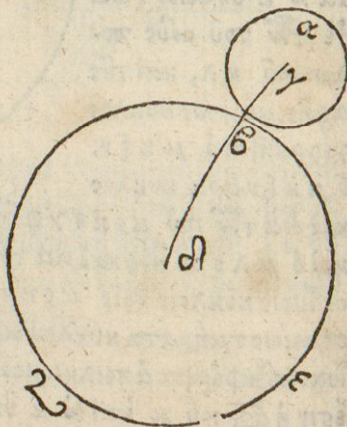
γαρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων καὶ ἔστω τὸ μ σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ μ καὶ ἑκατέρου τῶν κ, λ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν ὁ μκεν, μλοπ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ αεκηγφ, κλ, ἐφαπτόνται ἀλλήλων κατὰ τὸ κ σημεῖον. διὰ δὲ τῶν τοῦ οἷος πόλων τοῦ κλ, καὶ τῆς ἀφῆς, μέγιστος κύκλος γεγράφθαι ὁ μκεν. ὁ μκεν ἄρα κύκλος καὶ διὰ τῶν τοῦ αεκηγφ ἥξ πόνων, καὶ ἔσαι ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ὁ μλοπ ἥξ καὶ διὰ τῶν τοῦ βζλθδτ πόνων, καὶ ἔσαι ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις κύκλοις τοῖς αεκηγτ, βζλθδτ, ἐπὶ διαμέτρων ἴσαι καὶ ὀρθαὶ ἐν τοῖς κ, λ, σημείοις τμήματα κύκλου ἐφίσταται, τὰ κμ, λμ, καὶ τὰ τούτοις συνεχῆ· ἀπὸ δὲ αὐτῶν ἴσαι περὶφέρειαι ἀπειλημμοῖαι εἰσὶν αἱ κμ, μλ, ἐλάττους ἢ ἡμίσεις οὗσαι τῶν ὅλων, καὶ ἔστιν ἡ ἀπὸ τοῦ μ ἐπὶ τὸ α ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα, ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ μ ἐπὶ τὸ δ ἐπιζυγνυμένη εὐθείᾳ· ἴσας ἄρα περὶφρείας ἀπολήφονται. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ακ περὶφέρεια τῇ λδ περὶφρείᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ εκ τῇ λθ ἔσαι ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ αβγδ, αεκηγτ τέμνουσιν ἀλλήλους. διὰ δὲ τῶν πόνων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γεγράφθαι ὁ μκεν. ὁ μκεν ἄρα δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμοῖα τμήματα. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ μὲν ακ περὶφέρεια, τῇ κηγ περὶφρείᾳ, ἢ δὲ αν τῇ νγ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν βλ, τῇ λδ ἔστιν ἴση. ἢ δὲ βπ τῇ πδ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ ακ περὶφέρεια τῇ λδ περὶφρείᾳ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ακ περὶφρείας διπλὴ ἢ αεκηγ περὶφρείας. τῆς δὲ λθ περὶφρείας διπλὴ ἢ βζλθδ. καὶ ἡ ακηγ ἄρα ἴση ἔστι τῇ βζλθδ. καὶ εἰσὶν ἴσοι οἱ κύκλοι. μέγιστοι γάρ εἰσιν. ἢ ἄρα ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ γ ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα, ἴση ἔστι τῇ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β ἐπιζυγνυμένη εὐθείᾳ. καὶ διὰ τοῦτο ἡ αβγ περὶφ-

ρεία, ἴση ὅτι τῇ δ γ β περιφέρειά. καὶ ἔστι τῆς μὲν α β γ περιφέρειας ἡμίσεια ἢ α ν. τῆς δὲ β γ δ ἡμίσεια ἢ β π. καὶ ἡ α ν ἄρα τῇ π β ἴση ὅτι. κοινὴ προσκείσθαι ἢ ν β. ὅλη ἄρα ἢ α ν β, ὅλη τῇ ν β π, ὅτι ἴση. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου. ὁμοία ἄρα ὅτι ἢ α ν β περιφέρειά, τῇ ν β π περιφέρειά. ἀλλ' ἢ ν β π, τῇ κ λ ὅτι ὁμοία. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν σφαίρᾳ παραλλήλοι κύκλοι, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων, ὁμοίαι εἰσὶ. καὶ εἰσὶν αἱ κ λ, ν β γ π, περιφέρειαι τῶν παραλλήλων κύκλων, μεταξὺ οὗσαι τῶν μεγίστων τῶν μ ν, μ π, διὰ τῶν πόλων αὐτῶν ὄντων. καὶ ἡ α ν β ἄρα τῇ κ λ ὅτι ὁμοία. ὁμοίως δὲ ἴσομεν ὅτι καὶ ἡ ε ξ ζ τῇ κ λ ὅτι ὁμοία. καὶ ἡ α β ἄρα τῇ ε ζ ὁμοία ὅτι. καὶ ἔτι ὁμοίως δὲ ἴσομεν ὅτι καὶ ἡ γ π δ τῇ η θ ὅτι ὁμοία. αἱ ἄρα τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπίπτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοίαι εἰσὶ. λέγω δὴ ὅτι καὶ αἱ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων, ἴσαι εἰσὶν. ἐπεὶ γὰρ αἱ τέσσαρες αἱ α ε κ, κ η γ, β ζ λ, λ θ δ, περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ὧν αἱ τέσσαρες αἱ ε κ, κ η, ζ λ, λ θ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὁμοίως γὰρ οἱ κ ν, λ π μέγιστοι κύκλοι ὄντες δίχα τέμνουσι τὰ ἀπειλημμένα τμήματα, τὰ ε κ η, ε ξ η, καὶ τὰ ζ λ θ, ζ ο θ. ὥς ἴση ὅτι ἢ ε κ τῇ κ η. ἀλλ' ἢ ε κ τῇ λ θ, ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ κ η ἄρα τῇ λ θ ὅτι ἴση. ἀλλ' ἢ θ λ τῇ λ ζ ὅτι ἴση. καὶ ἡ λ ζ ἄρα τῇ κ η ὅτι ἴση. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ε κ, κ η, ζ λ, λ θ ἴσαι εἰσὶν. λοιπαὶ ἄρα αἱ τέσσαρες αἱ α ε, β ζ, γ η, θ δ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. αἱ ἄρα τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσὶν.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΔ'.

κύκλου δοθέντος ἐν σφαίρᾳ ἐλάττωτος τῷ μεγίστῳ, καὶ σημείου ἑνὸς ὑπὸ τῆς περιφέρειας αὐτῆς, γράψαι διὰ τῆς σημείου μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τῷ δοθέντῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ἐν σφαίρᾳ ὁ α β, ἐλάττωτος τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ δοθεὶς σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφέρειας αὐτοῦ, ἔστω γ. δεῖ δὴ διὰ τοῦ γ σημείου γράψαι μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ α β κύκλου. εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τοῦ α β κύκλου, καὶ ἔστω γ. καὶ διὰ τῶν γ, β, σημείων, μεγίστου κύκλου περιφέρειαν γεγράφθω ἢ γ δ. καὶ τῇ ὑφ' ἡμῶν ὑποτείνῃ ἢ τῇ τετραγώνῳ πλδυρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση ἀπειλήφθω ἢ δ β. οὐ γὰρ δυνατόν πῶς β γ εἶναι τεταρτημέριον. ἔσται γὰρ μέγιστος ὁ α β, ὅπερ οὐχ ὑποκείμεν. οὐκ ἄρα ἢ γ β τεταρτημορίου. καὶ πόλῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δ β, κύκλος γεγράφθω ὁ ε β ζ. μέγιστος ἄρα ὅτι ὁ ε β ζ. ἢ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ὅτι τῇ τοῦ τετραγώνου πλδυρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ α β, ε β ζ, μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τοῦ β γ δ, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τὸ β τέμνουσι, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ ἐφάπτονται ἀλλήλων οἱ κύκλοι. ἐφάπτεται ἄρα ὁ α β κύκλος τοῦ ε β ζ κύκλου. διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ γ, γεγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ε β ζ, ἐφαπόμενος τοῦ α β κύκλου, κατὰ τὸ γ σημεῖον.

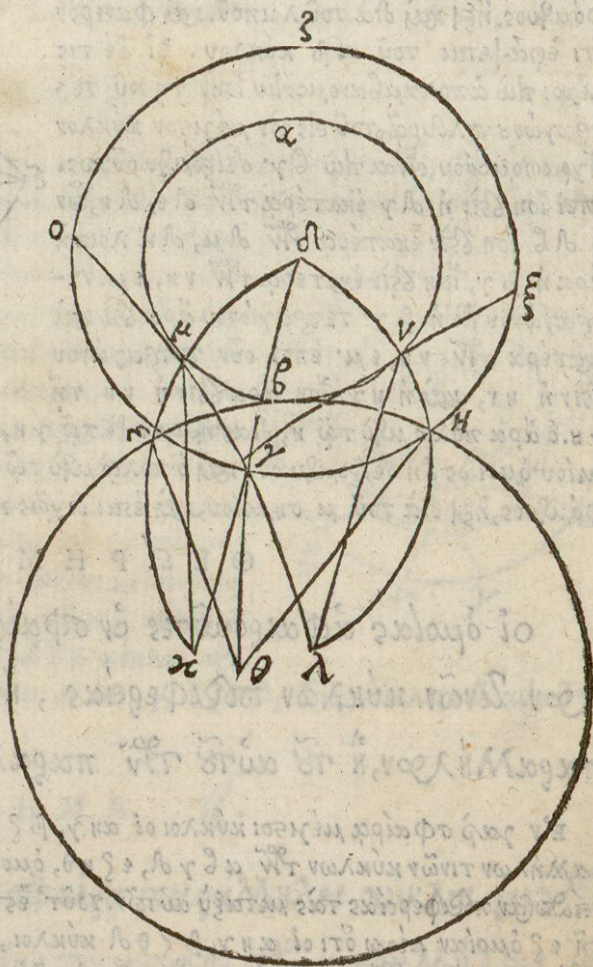


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Κ'.

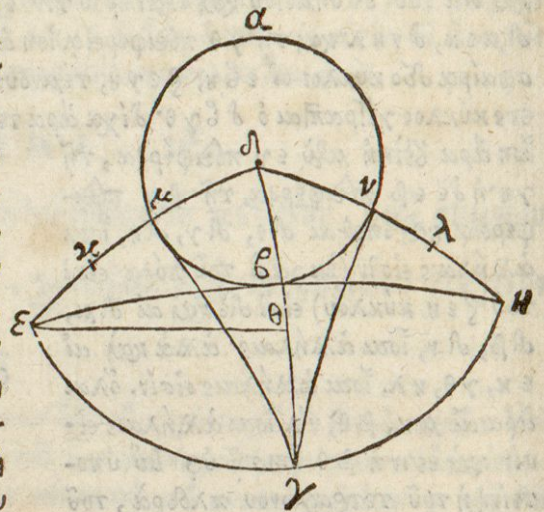
κύκλου δοθέντος ἐν σφαίρᾳ ἐλάττωτος τῷ μεγίστῳ, καὶ σημείου ἑνὸς ὑπὸ τῆς ὑπὸ φανείας τῆς σφαίρας, ὃ ὅτι μεταξὺ αὐτῶν τε δ

τῷ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῶ, γράψαι διὰ τῷ σημείου μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τῷ δοθέντος κύκλου.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐλάσσων τοῦ μεγίστου ὁ α β, καὶ δὲ δοθὼν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὃ ἔστι μεταξὺ αὐτοῦ τε καὶ α β, καὶ τῷ ἴσῳ τε καὶ παραλλήλου αὐτῶ, ἔστω γ. δεῖ δὴ διὰ τοῦ γ σημείου γράψαι μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον καὶ α β κύκλου. εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τοῦ α β κύκλου, καὶ ἔστω δ. ὁ δὲ σημείον. καὶ πόλῳ μὲν τῶ δ, διαστήματι δὲ τῶ δ γ, κύκλος γεγράφθω ὁ γ ε ζ η. καὶ διὰ τῶν δ, γ, σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ δ γ θ, καὶ τῇ ὑφ' αὐτοῦ ὑποτείνῃ ἢ τοῦ τετραγώνου πλδρὰ τῷ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση πᾶσι πᾶσι ἀπειλήφθω ἢ β θ. καὶ πόλῳ μὲν τῶ θ, διαστήματι δὲ τῶ β θ, κύκλος γεγράφθω ὁ ε β η· μέγιστος ἄρα ἔστιν ὁ ε β η κύκλος. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἔστι τῇ καὶ τετραγώνου πλδρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐφάνηκε τοῦ α β δύο γὰρ κύκλοι, ε β η, α β, μεγίστου κύκλου πᾶσι πᾶσι ἀπειλήφθω δὲ γ θ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσιν καὶ β, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, καὶ διὰ τοῦ δ σημείου καὶ ἑκατέρου τῶν ε, η σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ δ μ ε κ, δ ν η λ καὶ τῇ γ θ πᾶσι πᾶσι ἀπειλήφθω ἑκατέρας τῶν ε κ, η λ. καὶ ἐπεὶ ὁ σφαίρα δύο κύκλοι οἱ ε β η, ζ ε γ η, τέμνουσιν ἀκμήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ δ β γ θ· δίχα ἄρα τεμαῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ μὲν ε γ πᾶσι πᾶσι ἀπειλήφθω, τῇ γ η ἢ δὲ ε β πᾶσι πᾶσι ἀπειλήφθω, τῇ β η πᾶσι πᾶσι ἀπειλήφθω. καὶ ἐπεὶ αἱ δ ε, δ γ, δ η, ἴσαι ἀκμήλαις εἰσὶν (ἐκ γὰρ τοῦ πόλου εἰσὶ τοῦ ζ ε η κύκλου) εἰσὶ δὲ καὶ αἱ δ μ, δ β, δ ν, ἴσαι ἀκμήλαις· ἀλλὰ καὶ αἱ ε κ, γ θ, η λ, ἴσαι ἀκμήλαις εἰσὶν. ὅλαι ἄρα αἱ μ κ, β θ, ν λ ἴσαι ἀκμήλαις εἰσὶν. καὶ ἔστιν ἢ β θ ἴση τῇ ὑφ' αὐτοῦ ὑποτείνῃ ἢ τοῦ τετραγώνου πλδρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ αἱ μ κ, ν λ, ἄρα ἴσαι εἰσὶ τῇ ὑφ' αὐτοῦ ὑποτείνῃ ἢ τοῦ τετραγώνου πλδρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ δ β γ θ, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ζ ε γ η διὰ τῶν πόλων τέμνῃ, δίχα τε αὐτὸν τεμαῖ καὶ πρὸς ὁρθά. ὁ δ β γ θ ἄρα ὁρθὸς ἔστι πρὸς τὸν ζ ε γ η κύκλον. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ὁ δ ν η λ, ὁρθὸς ἔστι πρὸς τὸν ζ ε γ η, καὶ ἔτι ὁ δ μ ε κ ὁρθὸς ἔστι πρὸς τὸν ζ ε γ η· ἐπεξεύχθωσαν αἱ λ ν, λ γ, θ ε. καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ζ ε γ η ἐπὶ διαμέτρων τῶν α λ καὶ τῶν γ η, σημείων ἴσαι καὶ ὁρθὰ τμήματα κύκλων ἐφίσταται τὰ γ θ, η λ. καὶ τὰ τοῦτοις συνεχῆ. καὶ ἀπ' αὐτῶν ἴσαι πᾶσι πᾶσι ἀπειλήφθω ἀπειλημμένα εἰσὶν αἱ γ θ, η λ, ἐλάττωους ἢ ἡμισίαι οὔσαι τῶν ὁλῶν. καὶ ἔστιν ἴση ἢ ε γ πᾶσι πᾶσι ἀπειλήφθω τῇ γ η πᾶσι πᾶσι ἀπειλήφθω. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ θ ε τῇ λ γ. τετραγώνου δὲ ἢ θ ε καὶ ἢ λ γ ἄρα ἴση ἔστι τῇ τοῦ τετραγώνου πλδρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. ἔστι δὲ καὶ ἢ λ ν τετραγώνου πλδρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ γ λ τῇ λ ν. ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῶ λ, διαστήματι δὲ τῶ λ γ, κύκλος γεγράφθω, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ν ση-



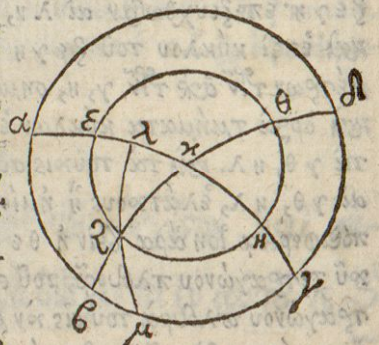
μείον ἐρχέσθαι καὶ ἔστω ὡς ὁ γ ν ξ. μέγιστος ἄρα ἔστιν ὁ γ ν ξ ἢ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἔστι τῇ τοῦ τετραγώνου πλδρυᾶ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ οὐ σφαῖρα δύο κύκλοι γ ν ξ, α β, μεγίστου τινὸς κύκλου πᾶσι φέρειαν τὴν δ ν η λ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ ν, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ ἐφάπτονται ἄρα ἀλλήλων. ὁ γ ν ξ ἄρα τοῦ α β κύκλου ἐφάπτεται ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ὁ πόλος τῶ κ, διαστήματι δὲ τῶ κ γ, κύκλος γραφόμενος, ἥξῃ καὶ διὰ τοῦ μ σημείου. Ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὰς γ κ, θ η, ἔσονται ἴσαι ἀλλήλων. καὶ ἔστιν ἡ θ η τετραγώνου πλδρυᾶ (ἐκ γὰρ τοῦ πόλου ἔστι τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ε β η) καὶ ἡ κ γ ἄρα τετραγώνου ἔσαι πλδρυᾶ. ἀλλὰ καὶ ἡ κ μ ἴση ἄρα ἔστιν ἡ κ γ τῇ κ μ. ὁ ἄρα πόλος μὲν τῶ κ, διαστήματι δὲ τῶ κ γ, κύκλος γραφόμενος, ἥξῃ καὶ διὰ τοῦ μ σημείου, καὶ ἔσαι ὡς ὁ γ μ ο, καὶ ἐφάπτεται τοῦ α β κύκλου καὶ γίνεται διχῶς τὸ πρόβλημα. διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου γ, ὁ ἔστι μεταξὺ τοῦ α β κύκλου, καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῶ, μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ γ ν ξ, καὶ ὁ γ μ ο. ὁμοίως γὰρ ἔροῦμεν. Ἐπεὶ κύκλου τοῦ ε ζ η γ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ἀκ' ε, γ, σημείων, ἴσα καὶ ὄρθα τμήματα κύκλων ἐφέσονται τὰ ε κ, γ θ, καὶ τὰ τούτοις σιωεχῇ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ε γ πᾶσι φέρειαν, τῇ γ η πᾶσι φερείαν. ἴση ἄρα ἔστι καὶ ἡ γ κ εὐθεῖα, τῇ θ η εὐθείαν τετραγώνου δὲ ἡ θ η, ἐκ πόλου γὰρ τοῦ ε β η κύκλου. τετραγώνου ἄρα καὶ ἡ γ κ. ἔτι δὲ καὶ ἡ κ μ, τετραγώνου. ὁ ἄρα πόλος μὲν τῶ κ, διαστήματι δὲ οὐ τῶν γ, μ, κύκλος γραφόμενος, ἥξῃ καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ. καὶ φανερόν ὅτι ἐφάπτεται τοῦ α β κύκλου. Εἰ δέ τις λέγοι τὴν ἀπολαμβανομένην ἴσην τῇ τοῦ τετραγώνου πλδρυᾶ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, εἶναι τὴν β γ· δείξομεν οὕτως. ἔπει ἴση ἔστιν ἡ δ λ γ ἑκατέρω τῶν δ ε, δ η, ὧν ἡ δ β ἴση ἔστιν ἑκατέρω τῶν δ μ, δ ν. λοιπὴ ἄρα ἡ β γ, ἴση ἔστιν ἑκατέρω τῶν ν η, ε μ. τετραγώνου δὲ ἡ β γ· τετραγώνου ἄρα ἔστι καὶ ἑκατέρω τῶν ν η, ε μ· ἔπει οὖν τετραγώνου ἔστιν ἡ ν η, καὶ ἡ η γ. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ν η τῇ γ η. ὁ ἄρα πόλος μὲν τῶ η, διαστήματι δὲ τῶ γ η, γραφόμενος κύκλος, ἥξῃ διὰ τοῦ ν σημείου ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ὁ πόλος μὲν τῶ ε, διαστήματι δὲ τῶ ε γ, κύκλος γραφόμενος, ἥξῃ διὰ τοῦ μ σημείου, καὶ ἔσαι διχῶς τὸ πρόβλημα.



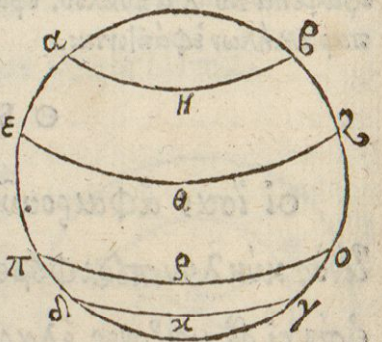
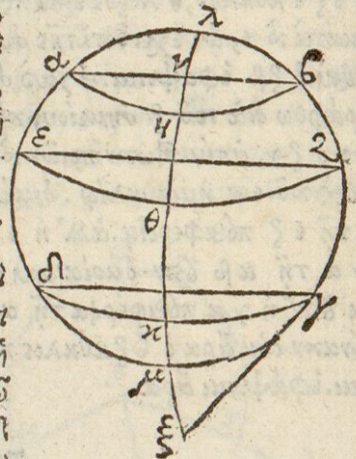
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΣ'.

οἱ ὁμοίως ἀφαιρουῦντες ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι παραλλήλων ἑνῶν κύκλων πᾶσι φερείας, ἥτοι ΔΓ' τῶν ὧν εἰσὶ τῶν παραλλήλων, ἢ τὸ αὐτὸ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόνται.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ α η γ, β ζ θ δ, παραλλήλων τινῶν κύκλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, ὁμοίως ἀφαιρούμεν πᾶσι φερείας τὰς μεταξὺ αὐτῶν. τοῦτ' ἔστι τὴν α β τῇ ε ζ ὁμοίαν λέγω ὅτι οἱ α η γ, β ζ θ δ κύκλοι, ἥτοι διὰ τῶν πόλων εἰσὶ τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ ἐφάπτονται τῶν παραλλήλων. ἥτοι γὰρ ὁ α η γ κύκλος διὰ τῶν πόλων ἔστι τῶν παραλλήλων, ἢ οὐ ἔστω πρότερον διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων. λέγω ὅτι καὶ ὁ β θ δ κύκλος, διὰ τῶν πόλων ἔστι τῶν παραλλήλων. τὸτ' ἔστι ὅτι τὸ κ σημεῖον, πόλος ἔστι τῶν παραλλήλων κύκλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ· μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ λ σημεῖον πόλος τῶν παραλλήλων.



κύκλου, καὶ τοῦ $\alpha\beta\gamma\delta$, κοινὴ κομὴ ἢ $\alpha\beta$. τοῦ δὲ $\epsilon\zeta$ κύκλου, καὶ τοῦ $\alpha\beta\gamma\delta$, κοινὴ κομὴ ἢ $\epsilon\zeta$. τοῦ δὲ $\gamma\delta$, καὶ τοῦ $\alpha\beta\gamma\delta$ κύκλου, κοινὴ κομὴ ἢ $\gamma\delta$. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπ' ὀπίσθω παρὰλληλα τὰ $\epsilon\theta\zeta$, $\gamma\kappa\delta$, ὑπὸ ἐπιπλάσθω τινὸς τέμνεται, τοῦ $\alpha\beta\gamma\delta$ κύκλου. αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν κομαὶ παρὰλληλοι εἰσὶ. παρὰλληλος ἄρα ἔστιν ἢ $\epsilon\zeta$ τῇ $\gamma\delta$. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἢ $\alpha\beta$, τῇ $\epsilon\zeta$ παρὰλληλός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὁ κύκλος τῶν $\alpha\beta\gamma\delta$, δύο παρὰλληλοι ἡμιμόαι εἰσὶν αἱ $\epsilon\zeta$, $\gamma\delta$. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ $\delta\epsilon$ πᾶσι πᾶσι, τῇ $\gamma\zeta$ πᾶσι πᾶσι. εἰν γὰρ ἐπιπλάσθω τῶν $\epsilon\gamma$, ἔσονται αἱ ὁμοῦ καὶ ἴσαι. ὁ δὲ τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἴσας πᾶσι πᾶσι ἀφαιροῦσιν. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ $\epsilon\delta$ πᾶσι πᾶσι, τῇ $\gamma\gamma$ πᾶσι πᾶσι. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἢ $\beta\zeta$ τῇ $\alpha\epsilon$ ἴση ἔστιν. ἀλλ' ἢ $\beta\zeta$ τῇ $\gamma\gamma$ ἴση ἔστι. καὶ ἢ $\alpha\epsilon$ ἄρα τῇ $\epsilon\delta$ ἔστιν ἴση, καὶ σωμαμφοτέραι ἄρα αἱ $\alpha\epsilon$, $\beta\zeta$, σωμαμφοτέραις ταῖς $\epsilon\delta$, $\gamma\gamma$, ἴσαι εἰσὶν. ἐπεὶ οὖν ἢ $\epsilon\alpha\lambda\beta\zeta$ πᾶσι πᾶσι, ὅλη τῇ $\gamma\gamma\mu\delta$ πᾶσι πᾶσι ἔστιν ἴση. (μέγιστοι γὰρ εἰσὶ κύκλοι οἱ $\epsilon\theta\zeta$, $\alpha\beta\gamma\delta$) ὧν σωμαμφοτέραι αἱ $\epsilon\alpha$, $\gamma\beta$, σωμαμφοτέραις ταῖς $\epsilon\delta$, $\gamma\gamma$, ἴσαι εἰσὶν. λοιπὴ ἄρα ἢ $\alpha\lambda\beta$, λοιπὴ τῇ $\delta\mu\gamma$ ἔστιν ἴση καὶ εἰσὶ, τοῦ αὐτοῦ κύκλου. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ $\alpha\beta$ εὐθείᾳ, τῇ $\gamma\delta$ εὐθείᾳ. ἢ τοι δὴ ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$ κύκλος τοὺς $\alpha\eta\beta$, $\delta\kappa\gamma$ κύκλους διὰ τῶν πόλων τέμνῃ, ἢ οὐ. τεμνέτω πρότερον διὰ τῶν πόλων. καὶ δίχα ἄρα αὐτοὺς τεμεῖ. ἢ μὲν $\alpha\beta$ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τῶν $\alpha\eta\beta$ κύκλου, ἢ δὲ $\delta\gamma$, τῶν $\delta\kappa\gamma$ κύκλου καὶ ἔστιν ἢ $\alpha\beta$, τῇ $\gamma\delta$ ἴση. ἴσος ἄρα ἔστι καὶ ὁ $\alpha\eta\beta$ κύκλος, τῶν $\gamma\kappa\delta$ κύκλου. ἀλλὰ δὴ πάλιν μὴ τεμνέτω ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$ κύκλος, τοὺς $\alpha\eta\beta$, $\gamma\kappa\delta$ κύκλους διὰ τῶν πόλων. καὶ εἰλήφθω ὁ πόλος τῶν παραλλήλων καὶ ἔστω ν σημεῖον. καὶ διὰ τῶν σημείων καὶ οὗτος τῶν $\alpha\beta\gamma\delta$ κύκλου πόλων, μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ $\lambda\theta\kappa\mu\xi$. καὶ τῇ $\lambda\nu$ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἢ $\mu\xi$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἢ $\lambda\nu$ πᾶσι πᾶσι, τῇ $\mu\xi$ πᾶσι πᾶσι, κοινὴ προσκείσθω ἢ $\nu\kappa\mu$ πᾶσι πᾶσι. ὅλη ἄρα ἢ $\lambda\eta\mu$ πᾶσι πᾶσι, ὅλη τῇ $\nu\kappa\mu$ πᾶσι πᾶσι ἴση ἔστιν. ἢ μὲν κύκλου δὲ ἢ $\lambda\kappa\mu$. ἢ μὲν κύκλου ἄρα ἔστι καὶ ἢ $\nu\eta\mu\xi$. κατὰ διάμετρον ἄρα ἔστι ν σημεῖον τῶν ξ σημείων καὶ ἔστι ν ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων. καὶ ν ἄρα σημεῖον, ὁ ἕτερος πόλος ἔστι τῶν παραλλήλων κύκλων. καὶ ἐπεὶ ὁ σφαῖρα δύο κύκλοι οἱ $\alpha\beta\gamma\delta$, $\delta\kappa\gamma$, τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γεγράφθαι ὁ $\lambda\theta\kappa\mu\xi$. ὁ $\lambda\theta\kappa\mu\xi$ ἄρα δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ $\gamma\mu$ πᾶσι πᾶσι, τῇ $\mu\delta$ πᾶσι πᾶσι, διπλὴ ἄρα ἔστιν ἢ $\gamma\delta$ πᾶσι πᾶσι, τῆς $\mu\gamma$ πᾶσι πᾶσι. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἢ $\alpha\lambda\beta$ πᾶσι πᾶσι, τῆς $\alpha\lambda$ περιφερείας διπλὴ ἔστι. καὶ ἔστιν ἴση ἢ $\delta\mu\gamma$ πᾶσι πᾶσι, τῇ $\alpha\lambda\beta$ πᾶσι πᾶσι. ἴση ἄρα καὶ ἢ $\mu\delta$ πᾶσι πᾶσι, τῇ $\alpha\lambda$ πᾶσι πᾶσι. κύκλου δὴ τινος τοῦ $\alpha\beta\gamma\delta$, ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὸ μ , τμήματα κύκλου ὄρθα καὶ ἴσα ἐφέσταται τὸ $\lambda\theta\kappa\mu$, καὶ τὸ $\mu\xi$, καὶ τὸ κούτρω σωμαμφοτέραις. καὶ ἀπὸ τούτων ἴσαι πᾶσι πᾶσι ἀπειλημμένα εἰσὶν αἱ $\lambda\nu$, $\mu\xi$, ἐλάττους ἢ ἡμισυαὶ οὗσαι τῶν ὅλων ἀπὸ τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου ἴσαι πᾶσι πᾶσι ἀπειλημμένα εἰσὶν αἱ $\alpha\lambda$, $\mu\gamma$. ἢ ἄρα ἀπὸ τοῦ ν ἐπὶ τὸ α ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα, ἴση ἔστι τῇ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὸ γ ἐπιζυγνυμένη εὐθείᾳ. καὶ ἢ μὲν ἀπὸ τοῦ ν ἐπὶ τὸ α ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα ἐκ τοῦ πόλου ἔστι τοῦ $\alpha\eta\beta$ κύκλου. ἢ δὲ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὸ γ ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα, ἐκ τοῦ πόλου ἔστι τοῦ $\gamma\kappa\delta$ κύκλου. ἢ ἄρα ἐκ τοῦ πόλου τῶν $\alpha\eta\beta$ κύκλου, ἴση ἔστι τῇ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ $\delta\kappa\gamma$ κύκλου. ὧν δὲ κύκλων αἱ ἐκ τῶν πόλων ἴσαι εἰσὶν, ἴσοι εἰσὶν οἱ κύκλοι. ἴσος ἄρα ἔστιν ὁ $\alpha\eta\beta$ κύκλος, τῶν $\delta\kappa\gamma$ κύκλου. ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω μείζων ἢ $\gamma\zeta$ πᾶσι πᾶσι, τῆς $\beta\zeta$ πᾶσι πᾶσι. λέγω ὅτι ἐλάττω ἔστιν ὁ $\delta\kappa\gamma$ κύκλος τῶν $\alpha\eta\beta$ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἔστιν

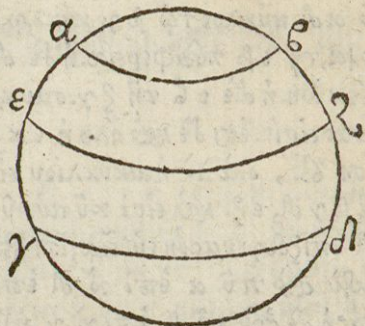


ξων ἔσιν ἢ γ ζ πᾶν περιφέρεια, τῆς ζ β περιφέρειας, ἀφαιρήσθαι ἀπὸ τῆς γ ζ τῇ ζ β ἴση ἢ ζ ο. καὶ διὰ τὸ ο, τῷ ε θ ζ κύκλῳ παράλληλος γεγράφθω ὁ ο ρ π. ἴσος ἄρα ἔστιν ὁ π ρ ο κύκλος, τῷ α η β κύκλῳ. ἴση γὰρ ἔστιν ἢ ο ζ πᾶν περιφέρεια τῇ ζ β περιφέρειᾳ. ὁ δὲ π ρ ο κύκλος μείζων ἔστι τοῦ δ κ γ κύκλου. ἔσθιον γὰρ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὁ π ρ ο κύκλος, ἢ περὶ ὁ δ κ γ κύκλος. καὶ ὁ α η β ἄρα κύκλος, μείζων ἔστι τοῦ δ κ γ κύκλου. ὥστε ὁ δ κ γ κύκλος, ἐλάσσων ἔστι τῷ α η β κύκλου.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΗ.

Ἐν σφαίρᾳ οἱ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφέρειας ἀφαιροῦσι μεγίστου ἑνὸς κύκλου πρὸς τὸν μέγιστον τῇν παραμήλῳ· οἱ δὲ μείζονες, ἐλάττωνας.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ α β, γ δ, μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ α β δ γ, περιφέρειας τὰς β ζ, ζ δ ἀφαιρήσθαι πρὸς τὸν μέγιστον τῇν παραμήλῳ τὸν ε ζ. λέγω ὅτι ἴση ἔστιν ἢ β ζ περιφέρεια, τῇ ζ δ περιφέρειᾳ. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ἢ β ζ περιφέρεια, ἴση τῇ ζ δ. οὐδὲ ἄρα ὁ α β κύκλος τῷ γ δ κύκλῳ ἴσος ἔστιν. ἔστι δὲ ἴση ἄρα καὶ ἢ β ζ τῇ ζ δ. ἀλλὰ πάλιν ἔστω ὁ α β κύκλος μείζων τοῦ γ δ κύκλου. λέγω ὅτι ἐλάσσων ἔστιν ἢ ε ζ τῆς ζ δ περιφέρειας. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ἐλάσσων ἢ β ζ περιφέρεια, τῆς ζ δ περιφέρειας. οὐκ ἄρα ὁ α β κύκλος τοῦ γ δ κύκλου μείζων ἔστιν. ἔστι δὲ ἐλάσσων ἄρα ἔστιν ἢ β ζ περιφέρεια τῆς ζ δ περιφέρειας.

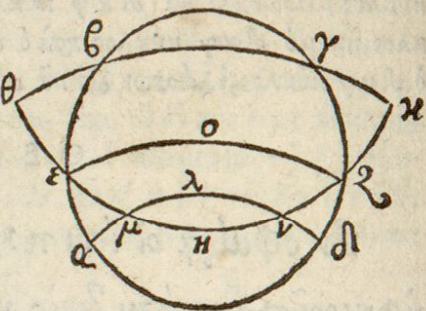


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ΙΘ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος παραμήλῳ ἑνὶ κύκλῳ τῇν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ ἀπὸ τῇν πόλῳ τέμνη· εἰς ἄνισα αὐτοὺς τεμνέ, χωρὶς τῷ μεγίστου τῇν παραμήλῳ. τῇν δὲ ἀπολαμβανόμενων τμημάτων ἐν ἐνὶ τῇν ἡμισφαίρειον, ἡμικυκλίῳ μὲν ἔσται μείζονα, ὅσα ἔστι μεταξὺ τῷ μεγίστου τῇν παραμήλῳ καὶ τῷ φανερῷ πόλῳ. τὰ δὲ λοιπὰ, ἐλάττωνα, ὅσα ἔστι μεταξὺ τῷ μεγίστου τῇν παραμήλῳ καὶ τῷ ἀφανοῦς πόλῳ. τῇν δὲ ἴσων τε καὶ παραλλήλων κύκλων τὰ ἀναλλὰξ τμήματα, ἴσα δμήλοισι εἰσίν.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ, κύκλους τινὰς τῇν ἐν τῇ σφαίρᾳ παραμήλῳ τοὺς α δ, ε ζ, β γ, μὴ διὰ τῇν πόλῳ τεμνέτω. μεγίστου δὲ τῇν παραμήλῳ ἔστω ὁ ε ζ. λέγω ὅτι εἰς ἄνισα αὐτοὺς τεμνέ, χωρὶς τοῦ μεγίστου τῇν παραμήλῳ τοῦ ε ζ. τῇν δὲ ἀπολαμβανόμενων τμημάτων ἐν ἐνὶ τῇν ἡμισφαίρειον, ἡμικυκλίῳ μὲν ἔσται μείζονα, ὅσα ἔστι μεταξὺ τοῦ τε ε ζ, καὶ τοῦ φανεροῦ πόλου. τὰ δὲ λοιπὰ, ἐλάττωνα. τῇν δὲ ἴσων τε καὶ παραλλήλων κύκλων τὰ ἀναλλὰξ τμήματα, ἴσα ἀμμήλοισι ἔστιν. ἔστω γὰρ ὁ

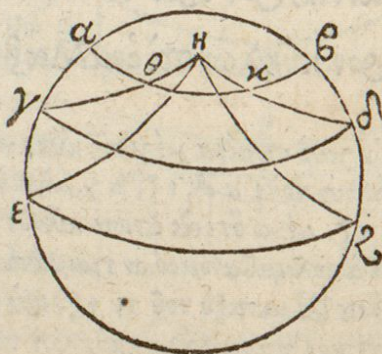
φανερὸς πόλος τῶν παραλλήλων καὶ σημείον. καὶ διὰ τῶν ε, η, μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ η ε θ. ὁ η ε θ ἄρα προσημαπληρούμενος, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ζ σημείου. κατὰ διάμετρον γὰρ τὸ ε τῶ ζ, διὰ τὸ μέγιστον εἶναι ἐκάτερον τῶν ε ζ, α β γ δ. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ἡ η ν ζ κ, καὶ προσημαπληρώσθω ὁ β γ κύκλος, ἔως τῶν θ, κ σημείων. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ θ ε μ η ν ζ κ, κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς α μ ν δ, ε ζ, θ β γ κ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθὰς. ἡμικύκλιον ἄρα ἔστιν ἕκαστον τῶν μ ν, ε ζ, θ β γ κ. ἐπεὶ οὖν τὸ μ ν, ἡμικύκλιόν ἐστι. τὸ α μ ν δ ἄρα, μείζον ἐστὶν ἡμικυκλίου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πάντα τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τοῦ τε ε ζ κύκλου καὶ τοῦ η πόλου, μείζονά ἐστιν ἡμικυκλίων. πάλιν ἐπεὶ τὸ θ β γ κ ἡμικύκλιον ἐστὶ τὸ β γ ἄρα ἔλασσον ἐστὶν ἡμικυκλίου. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ πάντα τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τοῦ τε ε ζ κύκλου, καὶ τοῦ ἀφανοῦς πόλου, καὶ ὄντα ἐν τῶ αὐτῷ ἡμισφαίριῳ, ἐλάττωνα ἐστὶν ἡμικυκλίων. Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἔστω ὁ α δ κύκλος τῶ β γ κύκλῳ ἴσος τε καὶ παράλληλος. λέγω ὅτι τῶν α δ, β γ, κύκλων τὰ ἀναλλὰξ τμήματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν. ἐπεὶ γὰρ ὁ α δ κύκλος τῶ β γ κύκλῳ ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν α ε πᾶσι περιφέρειᾳ, τῇ ε β περιφέρειᾳ. ἡ δὲ δ ζ πᾶσι περιφέρειᾳ τῇ ζ γ περιφέρειᾳ. ἀλλ' ἡ μὲν α ε τῇ δ ζ ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ε β τῇ ζ γ. συναμφοτέραι ἄρα α ε, δ ζ, συναμφοτέραις ταῖς ε β, ζ γ, ἴσαι εἰσὶν. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη ἡ α δ ζ ὅλη τῇ ε β γ ζ ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ α δ λοιπὴ τῇ β γ ἴση ἐστὶ, διὰ τὸ ἡμικυκλίον εἶναι ἐκάτεραν τῶν ε α δ ζ, ε β γ ζ. μέγιστοι γὰρ εἰσὶν οἱ α β γ δ, ε ζ. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου αἱ α δ, β γ περιφέρειαι. ἡ ἄρα ἀρχὴ τοῦ α ἐπὶ τὸ δ ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα, ἴση ἐστὶ τῇ ἀρχῇ τοῦ β ἐπὶ τὸ γ ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα, καὶ ἔστιν, ἡ μὲν ἀρχὴ τοῦ α ἐπὶ τὸ δ ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα ἡ ὑπὸ τῷ α δ πᾶσι περιφέρειαν ὑποτείνουσα. ἡ δὲ ἀρχὴ τοῦ β ἐπὶ τὸ γ, ἡ ὑπὸ τῷ β γ πᾶσι περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα. ἐν δὲ τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφέρειας ἀφαιροῦσι, τῷ μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τῷ δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττω. ἡ μὲν ἄρα τοῦ α δ κύκλου μείζων περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ β γ κύκλου μείζονι περιφέρειᾳ. ἡ δὲ τοῦ α δ κύκλου ἐλάσσων περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ β γ κύκλου ἐλάσσονι περιφέρειᾳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν α δ μείζον ἡμικυκλίου, τὸ δὲ β γ ἐλάττω. τῶν ἄρα α δ, β γ κύκλων τὰ ἀναλλὰξ τμήματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.



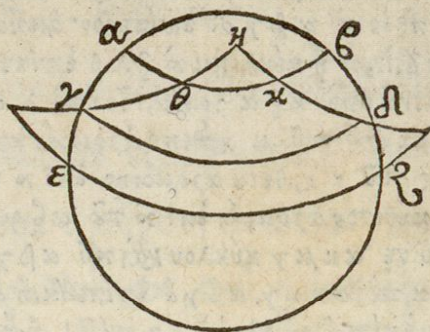
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α κ'.

Εὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος παραλλήλους τινὰς κύκλους τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, μὴ διὰ τῶν πόλων τέμνη, τῶν ἀπολαμβανομένων περιφερειῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἡμισφαιρίων, μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσονται αἱ ἐπιὸν τῷ φανερῷ πόλῳ τῶν ἀπώτερον.

Εἰν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ, παραλλήλους τινὰς κύκλους τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς α β, γ δ, ε ζ, μὴ διὰ τῶν πόλων τέμνεται. λέγω ὅτι τῶν ἀπολαμβανομένων περιφερειῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἡμισφαιρίων, μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσονται αἱ ἐπιὸν τοῦ φανεροῦ πόλου τῶν ἀπώτερον. οὗτ' ἐστὶν ὅτι ἡ μὲν α β τῆς γ δ μείζων ἐστὶν ἢ ὅμοια. ἡ δὲ γ δ τῆς ε ζ. ἔστω γὰρ ὁ φανερὸς πόλος τῶν παραλλήλων καὶ σημείον. καὶ διὰ τοῦ η καὶ ἐκάτερον τῶν γ, δ, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ



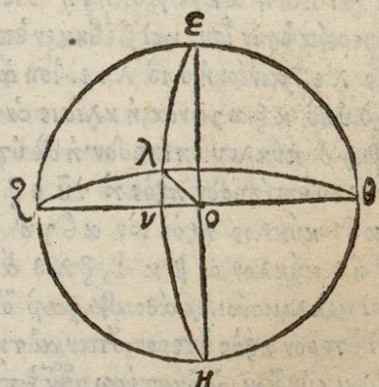
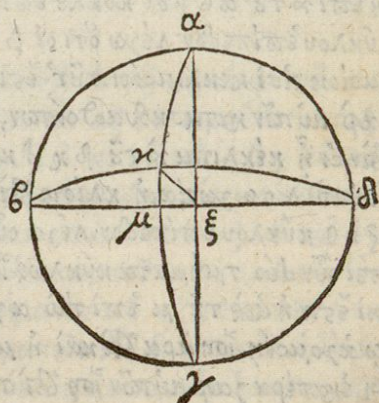
η θ γ, η κ δ. οἱ ἄρα η θ γ, η κ δ, ὁμοίως ἀφαιρῶσι περιφερείας τὰς μεταξὺ αὐτῶν. ἡ θ κ ἄρα τῇ γ δ ἔστιν ὁμοία. ἡ α θ κ β ἄρα τῆς γ δ μείζων ἔστιν ἢ ὁμοία. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ γ δ τῆς ε ζ μείζων ἔστιν ἢ ὁμοία, γραφόντων ἡμῶν διὰ τοῦ η καὶ ἑκατέρου τῶν ε, ζ, μεγίστους κύκλους. δύναται δὲ δειχθῆναι, καὶ μὴ γραφόντων ἡμῶν, μόνον διὰ προσαναπληρούντων τοὺς η θ γ, η κ δ, ε ζ, ὡς ἐν τῷ θεωρήματι.



ΘΕΩΡΗΜΑ κα'.

Ἐὰν ἐν ἴσους σφαίραις ὑπὸ μεγίστων κύκλων μέγιστοι κύκλοι κεκλιμένοι ᾖσιν, ὥστερουοῦ αὐτῶν ὁ πόλος μετεωρότερος ἢ, μάλλον ἔσται κεκλιμένος. ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι ἴσους ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς ἐπιπέδου, ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι.

Ἐν γὰρ σφαίραις ἴσους ἐπὶ μεγίστων κύκλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ. μέγιστοι κύκλοι οἱ β κ δ, ζ λ θ, κεκλιμένοι ἔστωσαν. καὶ ἔστω τοῦ μὲν β κ δ κύκλου πόλος τὸ μ σημεῖον· τοῦ δὲ ζ λ θ κύκλου πόλος τὸ ν σημεῖον. μετεωρότερον δὲ ἔστω τὸ μ τῶ ν. λέγω ὅτι ὁ β κ δ κύκλος πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον μάλλον κέκλιται, ἢ περὶ ὁ ζ λ θ κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ. γεγραφθῶ διὰ μὲν τῶ μ καὶ οὗτος τῶν α β γ δ πόλων, μέγιστος κύκλος ὁ α κ μ γ. διὰ δὲ τῶ ν καὶ οὗτος τῶν ε ζ η θ πόλων, μέγιστος κύκλος ὁ ε λ ν η. καὶ ἔστω τῶ μὲν α β γ δ κύκλου καὶ τῶ β κ δ, κοινὴ τομὴ ἡ β δ. τοῦ δὲ α β γ δ κύκλου καὶ τῶ α κ μ γ, κοινὴ τομὴ ἡ α γ. τῶ δὲ β κ δ καὶ τῶ α κ μ γ, κοινὴ τομὴ ἡ κ ξ. καὶ ἔτι τῶ μὲν ε ζ η θ κύκλου καὶ τῶ ζ λ θ, κοινὴ τομὴ ἡ ζ θ. τῶ δὲ ε ζ η θ κύκλου καὶ τῶ ε λ ν η, κοινὴ τομὴ ἡ ε η. τῶ δὲ ε λ ν η καὶ τῶ ζ λ θ, κοινὴ τομὴ ἡ λ ο. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α κ μ γ, κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς α β γ δ, β κ δ, διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτοὺς τεμαῖ καὶ πρὸς ὀρθὰς. ὁ α κ μ γ ἄρα κύκλος, ὀρθὸς ἔστι πρὸς ἑκάτερον τῶν α β γ δ, β κ δ κύκλων. ὥστε καὶ ἑκάτερος τῶν α β γ δ, β κ δ κύκλων, ὀρθὸς ἔστι πρὸς τὸν α κ μ γ κύκλον. ἔὰν δὲ δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἀλλήλα, ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ. καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. καὶ ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν α β γ δ, β κ δ κύκλων ἡ β δ, ὀρθὴ ἔστι πρὸς τὸν α κ μ γ κύκλον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπομονίας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τοῦ α κ μ γ κύκλου, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἀπῆται δὲ τῆς β ξ δ ἑκατέρα τῶν κ ξ, ξ α, οὕτως ἐν τῷ α κ μ γ κύκλῳ ἐπιπέδῳ. ἡ β ξ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν κ ξ, ξ α ὀρθὴ ἔστι καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα τέμνει ἀλλήλα, τὰ α β γ δ, β κ δ καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ β δ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γμεία εἰσιν ἡ κ ξ, ξ α. ἡ μὲν κ ζ ἐν τῷ τῶ β κ δ κύκλῳ ἐπιπέδῳ. ἡ δὲ ξ α, ἐν τῷ αὐτῷ τοῦ α β γ δ.



ΘΕΩΡΗΜΑ κβ'.

Ἐάν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῆν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπῃται, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τέμνῃ μεταξύ ὄντα τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας καὶ οὗ ἐφάπτεται ὁ μέγιστος κύκλος. ἐπὶ ὃ πόλος τῷ μεγίστου μεταξύ ἢ τῆν παραλλήλων, καὶ γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἐφαπόμενοι τῷ μείζοντι τῆν παραλλήλων· κεκλιμένοι ἔσονται πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον, καὶ ὀρθότατος μὲν ἔσται ὁ πῶν σωμαφῶς ἔχων κτ' πῶν διχοτομίαν τῷ μείζοντι τμήματος· ταπεινότερος δὲ ὁ πῶν σωμαφῶς ἔχων κτ' πῶν διχοτομίαν τῷ ἐλάσσοντι τμήματος. τῆν δὲ ὁμῶν οἱ μὲν ἴσον ἀπέχοντες ὡπερασουῖ τῆν διχοτομιῶν, ὁμοίως εἰσι κεκλιμένοι· αἱ δὲ ὁ πορρώτερον πῶν σωμαφῶς ἔχων τῆς διχοτομίας τῷ μείζοντι τμήματος, τῷ ἐπίον μάλλον ἔσται κεκλιμένοι. ἐπὶ οἱ πόλοι τῆν μεγίστων ὑπὸ ἐκὸς ἔσονται κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσοντι ἢ ὅσιν ἐκείνος οὗ ἐφάπτεται ὁ ὑψίστης μέγιστος κύκλος.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ, κύκλος τινὸς τῆν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ αδι ἐφάπτεται κατὰ τὸ α σημεῖον· ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τὸν εζηθ τεμένει μεταξύ ὄντα τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τοῦ αδι κύκλου. ἐπὶ δὲ ὁ πόλος τοῦ αβγ κύκλου μεταξύ ἔστω τῆν αδι, εζηθ. καὶ ἔστω τὸ κ σημεῖον. καὶ γεγράφωμεν μέγιστοι κύκλοι οἱ μνξ, βζγ, οπρ, στ, θυ, ἐφαπόμενοι τοῦ μείζοντος τῆν παραλλήλων τοῦ εζηθ. καὶ ἔστω ὁ μὲν βζγ κύκλος κατὰ πῶν διχοτομίαν τοῦ μείζοντος τμήματος τοῦ εζηθ, κατὰ τὸ ζ σημεῖον. ὁ δὲ υθ κατὰ πῶν διχοτομίαν τοῦ ἐλάσσοντος τμήματος τοῦ εζηθ κύκλου, κατὰ τὸ θ σημεῖον. οἱ δὲ μνξ, οπρ, ἴσον ἀπέχοντες ὡπερασουῖ τῆν διχοτομιῶν. ὁ δὲ τσ ἔστω ὡς ἔτυχε. λέγω ὅτι οἱ μνξ, βζγ, οπρ, στ, υθ κύκλοι, κεκλιμένοι ἔσονται πρὸς τὸν αβγ κύκλον, καὶ ὀρθότατος μὲν αὐτῶν ἔσται ὁ βζγ, ταπεινότερος δὲ ὁ υθ. οἱ δὲ μνξ, οπρ, ὁμοίως ἔσονται κεκλιμένοι. ὁ δὲ στ πρὸς τὸν αβγ κύκλον μάλλον κεκλιμένοι, ἢ περὶ ὁ πρ. ἐπὶ δὲ οἱ πόλοι τῆν μνξ, βζγ, οπρ, στ, υθ, ἐπὶ ἐκὸς ἔσονται κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσοντος τοῦ αδι. εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τῆν παραλλήλων τῆν αδι, εζηθ, καὶ ἔστω τὸ λ σημεῖον. καὶ διὰ τῆν α, λ, σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφω ὁ αλ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ αβγ, αδι, ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῆν τοῦ ἐκὸς πόλων καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γεγράφει ὁ αλ. ὁ αλ ἄρα ἥξει καὶ διὰ τῆν αβγ κύκλου πόλων, καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτὸν. καὶ βεῖ τοῦ αβγ κύκλου πόλος τὸ κ σημεῖον. ὁ αλ ἄρα περὶ ἀπληροῦ μέρους ἥξει καὶ διὰ τοῦ κ. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ αλκ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ αβγ, εζηθ, τέμνουσιν ἀλλήλους. διὰ δὲ τῆν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γεγράφει ὁ αλκ. ὁ αλκ ἄρα δίχα τέμνῃ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῆν κύκλων. καὶ ἔστω τοῦ μὲν εζηθ τμήματος διχοτομία τὸ ζ. τοῦ δὲ εθθ τμήματος διχοτομία τὸ θ. ὁ αλκ ἄρα περὶ ἀπληροῦ μέρους ἥξει καὶ διὰ τῆν ζ, θ, σημείων. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ θαλκζ. καὶ ἐπεὶ τὸ κ σημεῖον, πόλος βεῖ τοῦ αβγ κύ-

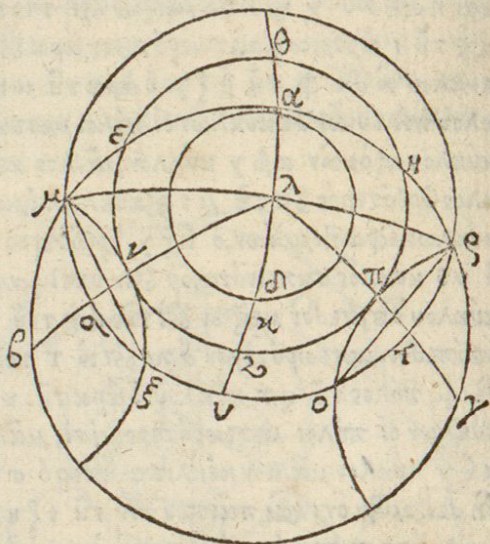
τοῦ κ ἐπὶ τῷ ω ἐπιζυγνυσμένη εὐθεία. ὁ ἄρα πόλος μὲν τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κ χ κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ω. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ χ ι ω· παράλληλος ἄρα ἔστιν ὁ χ ι ω τῷ α β γ. πῶς γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους ἔστιν αὐτῶν. καὶ γὰρ κ σημεῖον πόλος ἔστι τοῦ α β γ κύκλου. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ὁ χ ι ω κύκλος τῷ α β γ κύκλῳ, ἡ ἄρα ἀρχὴ τοῦ χ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον ἴση ἔστι τῇ ἀρχῇ τῷ ω καθετῶ ἀγομένη ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον. καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ ι κάθετος ἀγομένη ἴση ἔστιν ἑκατέρᾳ τῶν ἀρχῶν χ, ω, καθετῶν ἀγομένων. ἡ δὲ ἀρχὴ τῆς ι κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον, μείζων ἔστι τῆς ἀρχῆς τοῦ φ καθετῶ ἀγομένης ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον. καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ ω ἄρα κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον, μείζων ἔστι τῆς ἀρχῆς τοῦ φ καθετῶ ἀγομένης ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον. ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ χ κάθετος, μείζων ἔστι τῆς ἀρχῆς τοῦ φ καθετῶ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἔστι τῇ ἀρχῇ τῆς ι ἀγομένη. μετεωρότερον ἄρα ἔστι τὸ ω τῷ φ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ω, πόλος τοῦ μ ν ξ κύκλου. τὸ δὲ φ, τῷ β γ γ. ὁ ἄρα τῷ μ ν ξ κύκλου πόλος, μετεωρότερος ἔστι τῷ β γ γ κύκλου πόλου. ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι μετεωρότεροί εἰσι, μᾶλλον εἰσὶ κεκλιμένοι. ὁ μ ν ξ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν α β γ κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἢ περὶ ὁ β γ γ κύκλος. ὁ ἄρα β γ γ κύκλος ὀρθότερός ἐστι τῷ μ ν ξ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ πάντων τῶν τῷ ε ζ η θ κύκλων ἐφαπτομένων, ὁ β γ γ ὀρθότερός ἐστιν ὀρθότατος ἄρα ἔστιν ὁ β γ γ. λέγω δὲ ὅτι καὶ ὁ υ θ κύκλος ταπεινότερός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀρχὴ τῆς τ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον μείζων ἔστι τῆς ἀρχῆς τοῦ ς καθετῶ ἀγομένης ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον. μετεωρότερον ἄρα ἔστι τὸ τ τοῦ ς. καὶ ἔστι τὸ μὲν τ πόλος τῷ υ θ κύκλου, τὸ δὲ ς, πόλος τῷ σ τ κύκλου. ὁ ἄρα τῷ υ θ πόλος μετεωρότερός ἐστι τοῦ σ τ πόλου. ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι μετεωρότεροί εἰσι, μᾶλλον εἰσὶ κεκλιμένοι. ὁ υ θ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν α β γ κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἢ περὶ ὁ σ τ. ταπεινότερος ἄρα ἔστιν ὁ υ θ τῷ σ τ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ πάντων τῶν τῷ ε ζ η θ κύκλων ἐφαπτομένων ταπεινότερός ἐστιν ὁ υ θ. ὁ υ θ ἄρα ταπεινότερός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀρχὴ τῆς ω κάθετος ἀγομένη, ἴση ἔστι τῇ ἀρχῇ τῆς χ καθετῶ ἀγομένη ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον. τὰ ω, χ, ἄρα σημεῖα, ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἐπιπέδου. καὶ ἔστι τὸ μὲν ω σημεῖον πόλος τῷ μ ν ξ κύκλου. τὸ δὲ χ σημεῖον πόλος τοῦ ο π ρ κύκλου. τῶν μ ν ξ, ο π ρ ἄρα κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῷ α β γ κύκλου. ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπέχουσι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι. οἱ ἄρα μ ν ξ, ο π ρ κύκλοι πρὸς τὸν α β γ κύκλον, ὁμοίως, εἰσὶ κεκλιμένοι. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἀρχὴ τῆς ς κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον, μείζων ἔστι τῆς ἀρχῆς τῆς χ καθετῶ ἀγομένης ἐπὶ τῷ α β γ κύκλῳ ἐπίπεδον. μετεωρότερον ἄρα ἔστι τοῦ χ τῷ ς. καὶ ἔστι τὸ μὲν ς, πόλος τοῦ σ τ κύκλου. τὸ δὲ χ, πόλος τῷ ο π ρ. ὁ ἄρα τῷ σ τ κύκλου πόλος, μετεωρότερός ἐστι τοῦ ο π ρ κύκλου πόλου. ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι μετεωρότεροί εἰσι, μᾶλλον εἰσὶ κεκλιμένοι. ὁ σ τ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν α β γ κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἢ περὶ ὁ ο π ρ. οἱ ἄρα μ ν ξ, β γ γ, ο π ρ, σ τ, υ θ κύκλοι, πρὸς τὸν α β γ κύκλον κεκλιμένοι εἰσὶ. καὶ ὀρθότατος μὲν ἔστιν αὐτῶν ὁ β γ γ. ταπεινότερος δὲ ὁ υ θ. οἱ δὲ μ ν ξ, ο π ρ, ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι. ὁ δὲ σ τ κύκλος πρὸς τὸν α β γ κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἢ περὶ ὁ ο π ρ. ἔτι δὲ, οἱ πόλοι αὐτῶν ἐπὶ οὗτος εἰσὶ κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσονος τοῦ α δ ι κύκλου.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α κγ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, εἰάν αἱ ἀπὸ τῶν σωδέσμων ὑπὲρ τὰς ἐπαφὰς καὶ θίκεσθαι πῶς φέρεται ἴσαι ὧσιν, ὁμοίως ἔσονται κεκλιμένοι οἱ περιηρημένοι μέγιστοι κύκλοι

Ἔστω γὰρ αἱ ἀπὸ τῶν σωδέσμων, τῶν ἔστι τῶν μ, ρ, σημείων ἐπὶ τὰ π, ν, καθεύονσαι πῶς φέρεται αἱ ν μ, π ρ, ἴσαι. λέγω ὅτι οἱ μ ν ξ, ο π ρ κύκλοι, πρὸς τὸν α β γ κύκλον ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι. εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων τῶν α δ, ε ζ η θ. καὶ ἔστω τὸ λ σημεῖον. καὶ διὰ τῶν α, λ, σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ

θα λ ζ υ. φανερόν δὴ ὅτι καὶ διὰ τῶ κ σημείου, πόλου ὄντος τῶ α β γ κύκλου, ἐλεύσεται. καὶ διὰ τῶ λ, καὶ δι' ἑκατέρου τῶ ν, π, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ λ ν β, λ π γ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀκμήλων, οἱ ε ζ η θ, μ ν ξ. διὰ δὲ τῶν τῶ σφῆς πόλων καὶ τῆς ἀφῆς, μέγιστος κύκλος γεγράφθαι ὁ λ ν β. ὁ λ ν β ἄρα ἤξει καὶ διὰ τῶν τῶ μ ν ξ πόλων, καὶ ἔσαι ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ὁ λ π γ διὰ τῶν τοῦ ο π ρ πόλων ἔστι, καὶ ὀρθὸς ἔστι πρὸς αὐτόν. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις κύκλοις τοῖς μ ν ξ, ο π ρ, ἐπὶ διαμέτρων ἀπὸ τῶ ν, π, σημείων, ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφέστανται τὰ ν λ, π λ, καὶ τὰ τοῦτοις συνεχῆ. καὶ ἀπ' αὐτῶν ἴσαι πᾶσι φέρσαι ἀπὸ κλημμοῖαι εἰσὶν αἱ ν λ, π λ, ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὔσαι τῶν ὁλῶν. ἀπὸ δὲ τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων ἴσαι πᾶσι φέρσαι ἀπὸ κλημμοῖαι εἰσὶν αἱ μ ν, π ρ. ἢ ἄρα ἀπὸ τῶ λ ἐπὶ τὸ μ σημεῖον ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα, ἴση ἔστι τῇ ἀπὸ τῶ λ ἐπὶ τὸ ρ ἐπιζυγνυμένη εὐθείᾳ. ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῶ λ, διαστήματι δὲ τῶ λ μ, κύκλος γραφόμενος, ἤξει καὶ διὰ τοῦ ρ. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὁ μ ξ ο ρ. καὶ ἔστω τοῖς α δ, ε ζ η θ κύκλοις παράλληλος. πᾶσι γὰρ τὰς αὐτοὺς πόλους ἔστιν αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ α β γ, μ ξ ο ρ, τέμνουσιν ἀκμήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γεγράφθαι ὁ θα λ κ ζ υ. ὁ ἄρα θα λ κ ζ υ τέμνῃ διέχῃ τὰ ἀπὸ κλημμοῖαι τμήματα τῶν κύκλων. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ μ ν πᾶσι φέρσαι, τῇ ν ρ περιφερείᾳ. πάλιν ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ μ ν ξ, μ ξ ο ρ, τέμνουσιν ἀκμήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γεγράφθαι ὁ λ ν β. ὁ ἄρα λ ν β διέχῃ τεμεῖ τὰ ἀπὸ κλημμοῖαι τμήματα τῶν κύκλων. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ μὲν μ ν πᾶσι φέρσαι τῇ ν ξ περιφερείᾳ. ἢ δὲ μ σ τῇ σ ξ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἢ μὲν ο π, τῇ π ρ ἔστιν ἴση. ἢ δὲ ο τ, τῇ τ ρ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἢ μ ν πᾶσι φέρσαι, τῇ π ρ περιφερείᾳ, καὶ ἔστι τῆς μὲν μ ν διωλῆ ἢ μ ν ξ, τῆς δὲ π ρ διωλῆ ἢ ο π ρ. καὶ ἢ μ ν ξ ἄρα τῇ ο π ρ ἔστιν ἴση. καὶ εἰσὶν ἴσοι οἱ κύκλοι. ἢ ἄρα πᾶσι μ ν ξ πᾶσι φέρσαι ὑποτείνουσα εὐθεῖα, ἴση ἔστι τῇ πᾶσι ο π ρ πᾶσι φέρσαι ὑποτείνουσα εὐθεῖα. ἀλλ' ἢ μὲν πᾶσι μ ν ξ πᾶσι φέρσαι ὑποτείνουσα εὐθεῖα, ὑποτείνῃ καὶ πᾶσι μ σ ξ. ἢ δὲ πᾶσι ο π ρ πᾶσι φέρσαι ὑποτείνουσα εὐθεῖα, ὑποτείνῃ καὶ πᾶσι ο τ ρ. καὶ ἢ ἄρα πᾶσι μ σ ξ πᾶσι φέρσαι ὑποτείνουσα εὐθεῖα, ἴση ἔστι τῇ πᾶσι ο τ ρ πᾶσι φέρσαι ὑποτείνουσα εὐθεῖα. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ μ σ ξ πᾶσι φέρσαι, τῇ ο τ ρ περιφερείᾳ. καὶ ἔστι τῆς μὲν μ σ ξ περιφερείας ἡμίσεια ἢ μ σ. τῆς δὲ ο τ ρ ἡμίσεια ἢ ρ τ. ἴση ἄρα ἔστι καὶ ἢ μ σ τῇ ρ τ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἢ μ σ ξ υ, ὅλη τῇ υ ο τ ρ ἴση. λοιπὴ ἄρα ἢ σ ξ υ, λοιπὴ τῇ υ ο τ ἔστιν ἴση. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου. ὁμοίᾳ ἄρα ἔστιν ἢ υ ξ σ πᾶσι φέρσαι, τῇ υ ο τ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἢ μὲν σ ξ υ πᾶσι φέρσαι, τῇ ν ζ περιφερείᾳ ἔστιν ὁμοίᾳ. ἢ δὲ υ ο τ, τῇ ζ π. καὶ ἢ ν ζ ἄρα τῇ ζ π περιφερείᾳ ἔστιν ὁμοίᾳ. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου. ἴση ἄρα ἔστιν ἢ ν ζ πᾶσι φέρσαι, τῇ ζ π περιφερείᾳ οἱ ἄρα μ ν ξ, ο π ρ κύκλοι, ἴσον ἀπέχουσιν ὁποτέρωθεν τῶν διχοτομιῶν. ὁμοίως ἄρα εἰσὶ κεκλιμένοι. οἱ ἄρα μ ν ξ, ο π ρ κύκλοι πρὸς τὸν α β γ κύκλον ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι.



τέλος β'. τῶν σφαιρικῶν Θεοδοσίου.



Θ Ε Ο Δ Ο Σ Ι Ο Υ Τ Ρ Ι -

ΠΟΛΙΤΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ

TRITON.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α α'.

[illegible]

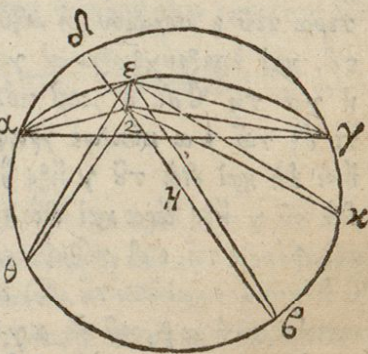
Εἰς γὰρ κύκλον τὸν α β γ δ, διήχθω τις εὐθεΐα ἡ β δ, εἰς ἀνίστα τέμνουσα τὸν κύκλον. ἔστω δὲ μαΐζων ἡ β γ δ πᾶσι φέρει τῆς β α δ πᾶσι φερείας. καὶ ἐπὶ β δ ὀρθὸν τμήμα κύκλου ἐφασάτω τὸ β ε δ μὴ μαΐζον ἡμικυκλίου. καὶ διηρήσθω ἡ β ε δ πᾶσι φέρει εἰς ἀνίστα τμήματα, κατὰ τὸ ε σημεῖον. καὶ ἔστω ἐλάσσων ἡ β ε πᾶσι φέρει τῆς ε δ πᾶσι φερείας. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε β. λέγω ὅτι ἡ β ε ἐλάσσων ὅτι πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ε σημείου

δω. λέγω ὅτι ἡ μὲν ε β ἐλάσσων ἔστι πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ε σημείου πρὸς τὴν τῷ α β γ δ
 κύκλου περιφέρειαν προσπιπουσῶν εὐθεῶν· ἡ δὲ ε δ μεγίστη. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευα-
 σθέντων, ἐπεὶ μείζων ἔστιν ἡ δ ε περιφέρεια τῆς ε β περιφέρειας, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ε ζ.
 μείζων ἄρα ἔστι καὶ ἡ δ ζ τῆς ζ β. καὶ ἔστιν ἡ β δ διάμετρος τῷ α β γ δ κύκλου. ἐπὶ τῆς
 δ ζ ἄρα ἔστι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. μείζων ἄρα ἔστιν ἡ μὲν δ ζ τῆς ζ γ, ἡ δὲ ζ γ τῆς
 ζ β. ὥστε καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς δ ζ, μείζων ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ζ γ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ζ γ, τῷ ἀπὸ τῆς
 ζ β. κοινὸν προσκείμεν τὸ ἀπὸ τῆς ζ ε. τὰ μὲν ἄρα ἀπὸ τῶν δ ζ, ζ ε, τετέσι τὸ ἀπὸ τῆς
 ε δ, μείζων ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν γ ζ, ζ ε, τετέσι τοῦ ἀπὸ τῆς γ ε. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν γ ζ, ζ ε, τε-
 τέσι τὸ ἀπὸ τῆς γ ε, μείζων ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν β ζ, ζ ε, τετέσι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε. ἡ μὲν δ ε
 ἄρα τῆς ε γ μείζων ἔστιν, ἡ δὲ ε γ τῆς ε β. ὁμοίως δὲ καὶ δεῖξομεν ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ
 τῷ ε σημείου πρὸς τὴν τοῦ α β γ δ κύκλου περιφέρειαν προσπιπουσῶν εὐθεῶν μεγίστη
 μὲν ἔστιν ἡ δ ε, ἐλάσσων δὲ ἡ ε β. μεγίστη ἄρα ἔστιν ἡ ε δ πασῶν τῶν ἀπὸ τῷ ε σημείου
 πρὸς τὴν τῷ α β γ δ κύκλου περιφέρειαν προσπιπουσῶν εὐθεῶν, ἡ δὲ ε β ἐλαχίστη.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α β'.

Εὰν εἰς κύκλον διαχθῇ τις δι' ἑῶν ἀπ' λαμβάνουσα τμήμα μὴ
ἐλάσσον ἡμικυκλίου. καὶ ἐπ' αὐτῆς τμήμα κύκλου ὑπὸ διαθῇ μὴ
μείζον ἡμικυκλίου, κεκλιμένον πρὸς θ' μὴ μείζον ἡμικυκλίου, δια-
ρεθῇ δὲ ἡ τῷ ἐφεστώτος τμήματος πρὸς φέρουσα εἰς ἄνω. ἢ ἔστω πῶς
ἐλάσσονα πρὸς φέρουσαν ὑποτείνουσα δι' ἑῶν, ἐλάσσων ὅτι πασῶν τῶν
ἀλλ' τῷ αὐτῷ σημείου πρὸς πῶς μὴ ἐλάσσονα ἡμικυκλίου πρὸς φέ-
ρουσαν πρὸς πῶς πᾶσιν δι' ἑῶν.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν αβγδ διήχθω τὶς εὐθεῖα ἡ α γ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα μὴ ἔλασον ἡμικυκλίου, τὸ α β γ. καὶ ἐπὶ τῆς α γ, τμήμα κύκλου ἐφέστω τὸ α ε γ, μὴ μείζον ἡμικυκλίου κεκλιμένον πρὸς τὸ μὴ μείζον ἡμικυκλίῳ τὸ α δ γ. καὶ διηρήδω ἡ α ε γ πᾶσι φέρει εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ε σημεῖον. καὶ ἔστω ἐλάσσων ἡ α ε πᾶσι φέρει τῆς ε γ πᾶσι φερείας, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε α. λέγω ὅτι ἡ ε α ἐλάσσων ἔστι πασῶν ἀπὸ τῆς ε σημείου πρὸς τὴν α β γ πᾶσι φέρειαν προσπιπουσῶν εὐθεῶν. ἥχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ε σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ α β γ δ κύκλου ἐπιπέδον, κάθετος περὶ τοῦ δὴ μεταξὺ τῆς τε α γ εὐθείας, καὶ τῆς α δ γ πᾶσι φερείας, διὰ τὸ κεκλιῖσθαι τὸ α ε γ τμήμα πρὸς τὸ α δ γ τμήμα. πᾶσι πέτω, καὶ ἔστω ἡ ε ζ, καὶ συμβαλέτω τῇ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ζ σημεῖον, καὶ εἰλήθω τὸ κέντρον τοῦ α β γ κύκλου. ἦτοι διὰ ἐπὶ τῆς α γ τὸ κέντρον ἔστι τοῦ α β γ κύκλου, ἡ μεταξὺ τῆς τε α γ εὐθείας καὶ τῆς α β γ πᾶσι φερείας, διὰ τὸ α β γ τμήμα ὑποκείσθαι μὴ ἔλασον ἡμικυκλίῳ. ἔστω πρότερον α μεταξὺ τῆς τε α γ εὐθείας καὶ τῆς α β γ πᾶσι φερείας καὶ ἔστω τὸ η σημεῖον, καὶ ἐπιζυχθεῖσα ἡ ζ η ἐκβεβλήτω ἐπὶ τὰ δ, ε μέρη. καὶ ἀπὸ τοῦ ε σημείου ἐπὶ τὴν α β γ πᾶσι φέρειαν προσβεβλήτω εὐθεῖα ἡ ε θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ α ζ, ζ θ. καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α β γ δ κύκλου ἐπιπέδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπλομοῖας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ἐν τῷ τοῦ α β γ δ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθαῖς ποιήσιν γωνίας. ἀπῆντι δὲ τῆς ε ζ ἑκατέρα τῶν α ζ, ζ θ, οὕτως ἐν τῷ τοῦ α β γ δ κύκλου ἐπιπέδῳ, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ α ζ ε, θ ζ ε γωνιῶν, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἡ

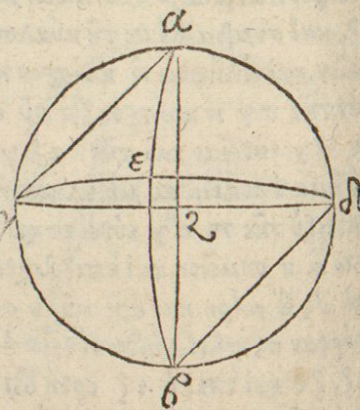


α ζ τῆς ζ θ ὅτιν ἐλάσων. ἐλάσων ἄρα ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α ζ τοῦ ἀπὸ τῆς θ ζ κοινὸν προσκείδω τὸ ἀπὸ τῆς ζ ε. τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς α ζ, ζ ε, τετέστι τὸ ἀπὸ τῆς α ε, ἐλάσων ὅτιν τῆς ἀπὸ τῆς θ ζ, ζ ε, τετέστι τοῦ ἀπὸ τῆς θ ε. ἢ α ε ἄρα τῆς ε θ ὅτιν ἐλάσων. ὁμοίως δὲ δειξομὴν ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ε σημείου πρὸς τὴν α β γ πᾶσι φέρειαν προσπιπῶσων εὐθεῶν ἐλάσων ὅτιν ἢ α ε. ἢ ἄρα α ε ἐλάσων ὅτιν πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς ε σημείου πρὸς τὴν α β γ πᾶσι φέρειαν προσπιπῶσων εὐθεῶν. καὶ τάλιν ὁμοίως δειξομὴν ὅτι αἰεὶ ἢ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπὸ τῆς ἐλάσων ὅτιν τῶν ἀπὸ τοῦ ε σημείου διαγομῶν εὐθεῶν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς α ε ἀχρι τῆς β πᾶσι φέρειαν, μεταξὺ διλονοῦσι τῶν α, β σημείων. ἐπεξεύχθω δὲ ἢ ε β. λέγω ὅτι ἢ ε β μεγίστη ὅτιν πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ε σημείου πρὸς τὴν α β γ περιφέρειαν προσπιπῶσων εὐθεῶν. ἐπεὶ γὰρ ἢ β ζ τῆς ζ θ ὅτιν μείζων, μείζον ἄρα ὅτιν καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β ζ τοῦ ἀπὸ τῆς ζ θ. κοινὸν προσκείδω τὸ ἀπὸ τῆς ζ ε. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν β ζ, ζ ε, τετέστι τὸ ἀπὸ τῆς ε β μείζον ὅτιν τῶν ἀπὸ τῶν θ ζ, ζ ε, τετέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ε θ. μείζων ἄρα ὅτιν ἢ β ε τῆς ε θ. ὁμοίως δὲ δειξομὴν ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ε πρὸς τὴν α β γ πᾶσι φέρειαν προσπιπῶσων εὐθεῶν ἢ ε β μείζων ὅτιν. ἢ ε β ἄρα μεγίστη ὅτιν πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ε σημείου πρὸς τὴν α β γ πᾶσι φέρειαν προσπιπῶσων εὐθεῶν. ἐπεξεύχθω δὲ καὶ ἢ ε γ. λέγω δὲ ὅτι καὶ ἢ ε γ ἐλάσων ὅτιν πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ε σημείου πρὸς τὴν β γ πᾶσι φέρειαν προσπιπῶσων εὐθεῶν μεταξὺ τῶν β, γ σημείων. διήχθω γὰρ μεταξὺ τῶν β, γ σημείων καὶ ἑτέρα ἢ ε κ καὶ ἐπεξεύχθω αἱ ζ γ, ζ κ. καὶ ἐπεὶ ἢ γ ζ τῆς ζ κ ὅτιν ἐλάσων. ἐλάσων ἄρα ὅτιν καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γ ζ τοῦ ἀπὸ τῆς ζ κ. κοινὸν προσκείδω τὸ ἀπὸ τῆς ζ ε. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν γ ζ, ζ ε, τετέστι τὸ ἀπὸ τῆς ε γ ἐλάσων ὅτιν τῶν ἀπὸ τῶν κ ζ, ζ ε, τετέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ. ἢ γ ε ἄρα ἐλάσων ὅτιν τῆς ε κ. ὁμοίως δὲ δειξομὴν ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς ε σημείου πρὸς τὴν β κ γ πᾶσι φέρειαν προσπιπῶσων εὐθεῶν μεταξὺ τῶν β, γ σημείων, ἐλάσων ὅτιν ἢ ε γ. καὶ πάλιν ὁμοίως δειξομὴν ὅτι αἰεὶ ἢ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπὸ τῆς ἐλάσων τῶν ἀπὸ τῆς ε σημείου πρὸς τὴν β γ πᾶσι φέρειαν προσπιπῶσων εὐθεῶν μεταξὺ τῶν β, γ σημείων. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡμικύκλιον ἢ τὸ α β γ, ὅτι ἢ α ε ἐλάσων ὅτιν πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς ε σημείου πρὸς τὴν α β γ πᾶσι φέρειαν προσπιπῶσων εὐθεῶν.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α γ'.

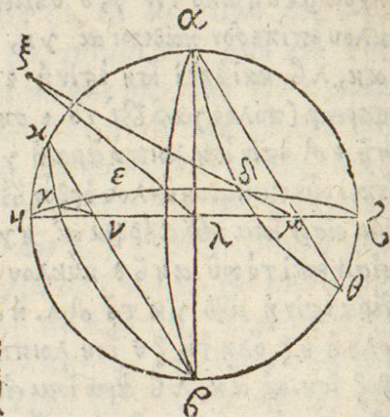
Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τέμνωσιν δμηήλους, ἀπὸ δὲ ἑκάτερου αὐτῶν ἴσαι πᾶσι φέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐφ' ἑκάτερα τῶν σημείων καὶ ὁ τέμνουσιν δμηήλους. αἱ ἐπιζυγυνύουσαι τὰ πέρατα τῶν ὑπὲρ τὰ αὐτὰ μέρη πᾶσι φέρειαν οὐθεῖν ἴσαι δμηήλους εἰσίν.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ α β, γ δ τέμνεται ἀλλήλους κατὰ τὸ ε σημεῖον. ἀπὸ δὲ ἑκατέρου αὐτῶν ἴσαι πᾶσι φέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ε σημείου. ἢ μὲν ε α τῆς ε β, ἢ δὲ ε γ τῆς ε δ. καὶ ἐπεξεύχθω αἱ γ α, β δ. λέγω ὅτι ἴσαι εἰσίν ἢ γ α τῆς β δ. ὁ γὰρ πόλῳ μὲν τῶν ε, διαστήματι δὲ τῶν ε α κύκλος γραφομένης ἢ ε δ καὶ διὰ τοῦ β, ἦτοι δὲ καὶ διὰ τῆς γ ἢ ε δ ἢ οὐ. ἐρχέσθω πρότερον καὶ διὰ τοῦ γ. ἢ ε δ ἄρα καὶ διὰ τοῦ δ. ἴσαι γὰρ ὅτιν ἢ γ ε πᾶσι φέρειαι τῆς ε δ πᾶσι φέρειαι. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὁ α γ β δ κύκλος καὶ ἔστω τῆς α γ β δ κύκλου καὶ τοῦ α ε β κοινὴ ρομὴ ἢ α β, τοῦ δὲ α γ β δ κύκλου καὶ τοῦ γ ε δ κοινὴ ρομὴ ἢ γ δ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α ε β κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν α γ β δ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὁμοίους. ἢ α β ἄρα διάμετρος ὅτιν τῆς α γ β δ. ὁμοίως δὲ δειξομὴν ὅτι καὶ ἢ γ δ διάμετρος ὅτιν τῆς α γ β δ κύκλου. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ α ζ, ζ γ, ζ β, ζ δ ἴσαι ἀλλήλαις



α ε β κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν α γ β δ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὁμοίους. ἢ α β ἄρα διάμετρος ὅτιν τῆς α γ β δ. ὁμοίως δὲ δειξομὴν ὅτι καὶ ἢ γ δ διάμετρος ὅτιν τῆς α γ β δ κύκλου. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ α ζ, ζ γ, ζ β, ζ δ ἴσαι ἀλλήλαις

ἐρχέσθαι καὶ ἔστω ὡς ὁ α υ β ζ. καὶ προαναπεπληρώσθαι οἱ κύκλοι. καὶ ὁ μὲν α δ κύ-
κλος συμπίπτει τῷ α υ β ζ κύκλῳ κατὰ τὸ θ σημεῖον. ὁ δὲ β γ κατὰ τὸ κ σημεῖον. καὶ
ἔστω τοῦ μὲν α υ β ζ καὶ τοῦ α ε β κοινὴ τομὴ ἡ α β. τοῦ δὲ α υ β ζ καὶ τοῦ η ε ζ κοινὴ
τομὴ ἡ η ζ. τοῦ δὲ α δ θ κύκλου καὶ τοῦ α υ β ζ κοινὴ τομὴ ἡ α θ. τοῦ δὲ κ γ β καὶ
τοῦ α υ β ζ κοινὴ τομὴ ἡ κ β. τοῦ δὲ η ε ζ καὶ τοῦ α δ θ κοινὴ τομὴ ἡ δ μ, τοῦ δὲ κ γ β
καὶ τοῦ η ε ζ κοινὴ τομὴ ἡ γ ν. καὶ ἐπεὶ τὸ α δ ἐπίπεδον συμπίπτει τῇ κοινῇ τομῇ τῶν
η ε ζ, α ε β ἐπιπέδων, τετέστι τῇ ε λ, ἐκ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὡς κατὰ τὸ ε ση-
μεῖον, συμπίπτει κατὰ τὸ ε. καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ε λ ἐπὶ τὸ ε. τὸ ε ἄρα σημεῖον ἐν τῷ
α δ θ ἐπιπέδῳ ἔστιν. ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ η ε ζ. ἔστι δὲ καὶ τὰ
δ μ, σημεῖα ἐν ἀμφοτέροις τοῖς α δ θ, η ε ζ ἐπιπέδοις.
ἡ μ δ ἄρα συμπίπτει ἐκ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας
ὡς κατὰ τὸ ε σημεῖον. συμπεσέτω δὴ κατὰ τὸ ε. καὶ
ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α ε β, κύκλον τινὰ τῶν
ἐν τῇ σφαίρᾳ τῶν α υ β ζ, διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε
αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς. ἡ α β ἄρα διάμετρος ἔστι τῆς
α υ β ζ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ η ζ διάμε-
τρος ἔστι τοῦ α υ β ζ κύκλου. κοίτηρον ἄρα ἔστιν αὐτοῦ τὸ
λ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ κ γ β, α δ θ
ὑπὸ τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ α υ β ζ, αἱ κοιναὶ ἄρα
αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. παράλληλος ἄρα ἔστιν ἡ
κ β τῇ α θ. πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ
κ γ β, α δ θ ὑπὸ τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ η ε ζ. αἱ κοιναὶ αὐτῶν ἄρα τομαὶ παρά-
λληλοί εἰσι. παράλληλος ἄρα ἔστιν ἡ γ ν, τῇ δ μ. καὶ ἐπεὶ ἐκάτερον τῶν α ε β, η ε ζ ἐπι-
πέδων πρὸς τὸ α υ β ζ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἔστι, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν ἄρα τομὴ ὀρθὴ ἔστι πρὸς τὸ
α υ β ζ ἐπίπεδον. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστιν ἡ ε λ. καὶ ἡ ε λ ἄρα ὀρθὴ ἔστι πρὸς τὸ α υ β ζ
ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπομονίας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὖσας ἐν τῷ τοῦ α υ β ζ
κύκλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσιν γωνίας. ἀπῆται δὲ τῆς ε λ ἐκάτερα τῶν α β, η ζ οὖσα ἐν
τῷ τοῦ α υ β ζ κύκλῳ ἐπιπέδῳ. ἡ ε λ ἄρα ὀρθὴ ἔστι πρὸς ἐκάτεραν τῶν α β, η ζ. καὶ
ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ξ λ μ ἐκ τῆς ἔστι γωνία ἡ ξ λ ν, μίξων ἔστι τῆς ἐν τῇ καὶ ἀπεναντίου γω-
νίας τῆς ὑπὸ ξ μ λ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ξ λ ν, ὁξεία ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ ξ μ λ. ἀμβλεῖα ἄρα ἔστιν
ἡ ὑπὸ ξ μ ζ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἔστιν ἡ γ ν τῇ δ μ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπεπῆκεν ἡ η ζ.
ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ γ ν η τῇ ὑπὸ ξ μ λ. ὁξεία δὲ ἡ ὑπὸ ξ μ λ. ὁξεία ἄρα ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ
γ ν η. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἔστιν ἡ α μ τῇ ν β, καὶ δύο διηγμούαι εἰσὶν αἱ α β, μ ν, καὶ
ἔστιν ἴση ἡ α λ τῇ λ β. ἴση ἄρα ἔστι καὶ ἡ ν λ τῇ λ μ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ η λ ὅλη τῇ λ ζ
ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ η ν λοιπὴ τῇ μ ζ ἔστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν τμήμα κύκλου ἔστι τὸ η ε ζ, καὶ αἱ
ἀπειλημμόναι ἴσαι εἰσὶν αἱ η ν, μ ζ, καὶ διηγμούαι εἰσὶ παράλληλοι αἱ γ ν, δ μ. καὶ ἔστι
ἡ μὲν ὑπὸ γ ν η ὁξεία. ἡ δὲ ὑπὸ δ μ ζ ἀμβλεῖα. ἐλάσσων ἄρα ἔστιν ἡ η γ περιφέρεια τῆς
δ ζ περιφέρειας. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ η ε περιφέρεια ὅλη τῇ ζ ε περιφέρειᾳ ἔστιν ἴση, ὧν ἡ η γ
τῆς δ ζ ἔστιν ἐλάσσων. λοιπὴ ἄρα ἡ γ ε περιφέρεια λοιπῆς τῆς ε δ περιφέρειας μίξων
ἔστιν.

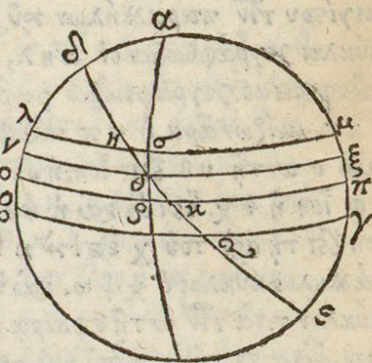


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ε.

Εάν ᾧδὲ μεγίστου κύκλου περιφέρειας ὁ πῶλος ἢ τῶν πα-
ραμῆλων, καὶ τῶτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὧν
ὁ μὲν εἰς τῶν παραμῆλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραμῆ-
λους. ἀπὸ δὲ τῆς λοξοῦ κύκλου ἵσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιρ ἐξῆς
ᾧδὲ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν μεγίστου τῶν παραμῆλων, ἀπὸ δὲ τῶν γινο-
μένων

μένων σημείων παράλληλοι κύκλοι γραφῶσιν· ἀνίσους ἀπολήφονται
 περιφέρειας τῶν ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, τὰς μεταξὺ αὐτῶν. καὶ
 μείζονα αἰ τῷ ἐπιού τῶν μεγίστου τῶν παραλλήλων τῆς πορρώτερον.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφέρειας τῆς αβγ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων, καὶ α
 σημείον. καὶ τοῦτον τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ βζγ, δζε πρὸς ὁρθὰς. ὧν ὁ μὲν βζγ
 εἰς ἔσω τῶν παραλλήλων. ὁ δὲ δζε, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἀπὸ τοῦ λοξοῦ κύκλου
 τοῦ δζε ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφωσαν αἱ κθ, θη, ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου
 κύκλου τῶν παραλλήλων τοῦ βζγ. διὰ δὲ τῶν κ, θ, η, σημείων παράλληλοι κύκλοι γεγρά-
 φωσαν οἱ οκω, νθξ, λιμ. λέγω ὅτι οἱ οκω, νθξ, λιμ κύκλοι, ἀνίσους ἀπολήφονται
 περιφέρειας τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου μεγίστου τοῦ αβγ, καὶ μείζονα αἰ τῷ ἔγγιον τοῦ βζγ
 τῆς πορρώτερον. λέγω οὖν ὅτι μείζον βζγ ἢ ον περιφέρειαι τῆς νλ περιφέρειας. γεγράφθαι
 γὰρ διὰ τῶν α, θ σημείων, μέγιστος κύκλος ὁ αθρ. καὶ ἐπεὶ
 καὶ α σημείον πόλος βζγ τοῦ οκπ κύκλου, ἴση βζγ ἢ α ν ο πε-
 ριφέρειαι τῇ α θ ρ περιφέρειᾳ. πάλιν ἔπει καὶ α σημείον, πό-
 λος βζγ τοῦ νθξ κύκλου, ἴση βζγ ἢ α λ ν περιφέρειαι, τῇ α σ θ
 περιφέρειᾳ. λοιπὴ ἄρα ἢ ν ο, λοιπὴ τῇ θ ρ, βζγ ἴση. ὁμοίως
 δὴ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἢ λ ν περιφέρειαι, τῇ σ θ περιφέρειᾳ βζγ ὡς
 ἴση. ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ μὲν ν ο ἢ θ ρ, ἢ δὲ λ ν τῇ σ θ καὶ ἐπεὶ β
 ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αθρ, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ
 σφαίρᾳ τὸν οκω διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τε-
 μεῖ καὶ πρὸς ὁρθὰς. ὁ αθρ ἄρα κύκλος ὁρθὸς βζγ πρὸς τὸν οκπ
 κύκλον. κύκλου δὲ τινος τῶν οκω ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ἀπὸ
 τοῦ ρ, τμήμα κύκλου ὁρθὸν ἐφέσταται καὶ ρθ καὶ τὸ τῷ συ-
 νεχές. καὶ ἀπερίληπται περιφέρειαι ἢ ρθ ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια τῆς ἐφεστώτος τμήματος. ἢ ἄρα
 ἀπὸ τῶν θ ἐπὶ καὶ ρ ἐπιζυγνυμένη εὐθεΐα, ἐλάσσων βζγ πασῶν τῶν ἀπὸ τῶν θ σημείων πρὸς
 τῷ οκω προσαπλοῦσων εὐθεΐων. ἢ ἄρα ἀπὸ τῶν θ ἐπὶ καὶ ρ ἐπιζυγνυμένη εὐθεΐα, ἐλάσσων
 βζγ τῆς ἀπὸ τῶν θ ἐπὶ καὶ κ ἐπιζυγνυμένης εὐθείας. καὶ εἰσὶν ἴσοι οἱ κύκλοι. μέγιστοι γὰρ εἰ-
 σιν. ἢ ἄρα θ ρ περιφέρειαι, ἐλάσσων βζγ τῆς θ κ περιφέρειας. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἢ
 θ σ τῆς θ η ἐλάσσων ἐστὶν, ὁμοίως εἰπόντες. κύκλου δὲ τινος τῶν λιμ ἐπὶ διαμέτρου τῆς
 ἀπὸ τῶν σ σημείων, τμήμα κύκλου ὁρθὸν ἐφέστηκε τὸ σ θ, καὶ τὸ τῷ συνεχές. καὶ ἀπερί-
 ληπται περιφέρειαι ἢ σ θ, ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια οὗσα τοῦ ἐφεστώτος τμήματος. ἢ ἄρα ἀπὸ τῶν θ ἐπὶ καὶ
 σ ἐλάσσων βζγ τῆς θ η. καὶ ἐστὶν ἴση ἢ κ θ τῇ θ η. ἑκατέρω ἄρα τῶν κ θ, θ η, ἑκατέρας τῶν ρ θ,
 θ σ βζγ μείζων. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ὁ ορκω τῷ λιμ, ὁ δὲ ορκω συμπίπτει τῇ τῶν
 η θ κ, α θ ρ κύκλων κοινῇ κομῇ ὅπως, τρεῖς εἰς ἑκάτῃ καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. καὶ ὁ λιμ
 ἄρα κύκλος συμπεσῖται τῇ τῶν η θ κ, α θ ρ κύκλων κοινῇ κομῇ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς
 σφαίρας, ὡς κατὰ θ σημείον. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι μέγιστοι οἱ η θ κ, σ θ ρ τέμνουσιν
 ἀλλήλους, ἀπὸ τοῦ αὐτῶν τοῦ η θ κ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ κ θ, θ η, ἐξῆς
 ἐφ' ἑκατέρω τοῦ θ σημείου. καὶ διὰ τῶν η, κ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα ἐκβέβηται τὰ
 λιμ, οκπ, ὧν καὶ λιμ συμπίπτει τῇ κοινῇ κομῇ τῶν ἐπιπέδων τῶν η θ κ, σ θ ρ, ἐκτὸς
 τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς κατὰ τὸ θ σημείον, μία δὲ τῶν ἴσων περιφερειῶν τῶν κ θ,
 θ η ἑκατέρας τῶν ρ θ, θ σ βζγ μείζων. μείζων ἄρα βζγ καὶ ἢ ρ θ περιφέρειαι τῆς θ σ περιφε-
 ρείας, ἀλλ' ἢ μὲν ρ θ τῇ ον βζγ ἴση. ἢ δὲ θ σ τῇ ν λ. καὶ ον ἄρα περιφέρειαι τῆς ν λ πε-
 ριφέρειας βζγ μείζων.

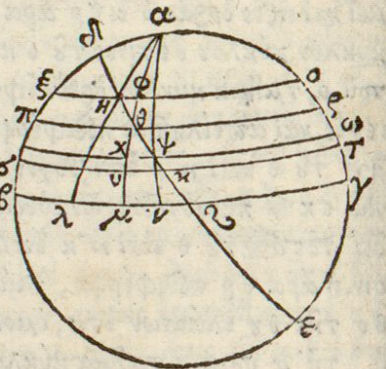


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Σ.

Ἐὰν ὑπὸ μεγίστου κύκλου περιφέρειας ὁ πόλος ἢ τῶν παραλλή-
 λων, καὶ τὸν τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὁρθὰς ὧν ὁ μὲν εἰς τ

παραμήλων, ὁ δὲ ἑτέρωθεν λόξος πρὸς τοὺς παραμήλους. ἀλλὰ δὲ τῷ λοξοῦ κύκλου ἴσαι πᾶσι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ὑπὲρ τὰ αὐτὰ μέρη τῷ μεγίστου τῆν παραμήλων, καὶ διὰ τῆν γενομένων σημείων καὶ τῷ πύλῳ, μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίστους ἀπλήφονται πᾶσι περιφέρειαι τῷ μεγίστου τῆν παραμήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα αἰετὶ τῶν ἑπισημειωμένων τῷ ἕξαρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πᾶσι περιφέρειαι.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφέρειας τοῦ α β γ, ὁ πόλος ἔστω τῆν παραμήλων καὶ α σημείον. καὶ τὸν α β γ κύκλον δύο μέγιστοι κύκλοι τεμένεωσαν πρὸς ὀρθὰς ὁ β ζ γ, δι ζ ε. ὧν ὁ μὲν β ζ γ, εἰς ἔστω τῆν παραμήλων, ὁ δὲ δι ζ ε, λόξος πρὸς τοὺς παραμήλους. ἀλλὰ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ δι ζ ε, ἴσαι περιφέρειαι ἀπλήφονται αἱ κ θ, θ η, ἐξῆς ὑπὲρ τὰ αὐτὰ μέρη τῷ μεγίστου τῆν παραμήλων τοῦ β ζ γ. διὰ δὲ τοῦ α καὶ ἑκάστου τῆν κ, θ, η σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ α η λ, α θ μ, α κ ν. λέγω ὅτι μείζων ἔστιν ἢ λ μ περιφέρεια τῆς μ ν περιφέρειας. γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῆν κ, θ, η σημείων παράλληλοι κύκλοι οἱ ξ η ο, π θ ρ, σ κ τ. μείζων ἄρα ἢ σ π περιφέρεια τῆς π ξ περιφέρειας, διὰ τὸ πρὸς ὀρθῶν θεωρήμα. ἀλλὰ ἢ μὲν σ π τῇ υ θ ἔστιν ἴση. ἢ δὲ π ξ, τῇ θ φ. καὶ ἢ υ θ ἄρα τῆς θ φ ἔστι μείζων. κείτω οὖν τῇ θ φ ἴση ἢ θ χ. ἔστι δὲ καὶ ἢ η θ τῇ θ κ ἴση ἢ ἄρα ἀλλὰ τοῦ η ἐπὶ τὸ φ ἐπιθρυγγυμένη εὐθεῖα, ἴση ἔστι τῇ ἀλλὰ τοῦ χ ἐπὶ τὸ κ ἐπιθρυγγυμένη εὐθεῖα. γεγράφθω διὰ τοῦ χ τοῖς ἕξαρχῆς παράλληλος κύκλος ὁ χ ψ ω. καὶ ἐπεὶ μέγιστος κύκλος ὁ α ψ κ ν, κύκλον τινὰ τῆν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν χ ψ ω διὰ τῆν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθὰς. ὁ ἄρα α ψ κ ν κύκλος, ὀρθὸς ἔστι πρὸς τὸν χ ψ ω κύκλον. ὥστε καὶ ὁ χ ψ ω κύκλος, ὀρθὸς ἔστι πρὸς τὸν α ψ κ ν κύκλον. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπὶ πᾶσι παράλληλα τὰ β ζ γ, χ ψ ω, ὑπὸ τίνος ἐπιπέδου τέμνεται τῷ α ψ κ ν. αἰκοινὰ αὐτῶν τομαὶ ἄρα παράλληλοί εἰσιν. ἢ ἄρα β κοινὴ κομὴ τῆν α ψ κ ν, β ζ γ, ἢ περ ἔστιν ἢ ἀλλὰ τοῦ ν σημείου, διάμετρος ἔστω τῷ α ψ κ ν κύκλου, καὶ ἢ κοινὴ κομὴ τῆν α ψ κ ν, χ ψ ω, παράλληλοί εἰσιν. ὥστε ἢ κοινὴ τομὴ τῆν α ψ κ ν, χ ψ ω παράλληλος ἔστι τῇ διαμέτρῳ τοῦ α ψ κ ν. καὶ ἐπεὶ εἰς κύκλον τὸν α ψ κ ν διήκται τις εὐθεῖα ἢ τῆν α ψ κ ν, χ ψ ω κύκλων κοινὴ τομὴ, εἰς ἀνίστα τέμνεσθαι τὸν α ψ κ ν κύκλον (παράλληλος γὰρ ἔστι τῇ διαμέτρῳ τοῦ α ψ κ ν κύκλου) καὶ ἐπ' αὐτῆς τμήμα κύκλου ὀρθὸν ἐφῆσκει τὸ χ ψ, καὶ τὸ αὐτῷ σωσχές. καὶ διήρηται ἢ τοῦ ἐφεσῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἀνίστα κατὰ τὸ χ. ἢ ἄρα ἀλλὰ τοῦ χ ἐπὶ τὸ ψ ἐπιθρυγγυμένη εὐθεῖα, ἐλάσσων ἔστι πᾶσιν τῆν ἀλλὰ τοῦ χ σημείου πρὸς τῷ ψ κ ν περιφέρειαν προσηπιπουσῶν εὐθεῶν. ἢ ἄρα ἀλλὰ τοῦ χ ἐπὶ τὸ ψ, ἐλάσσων ἔστι τῆς ἀλλὰ τοῦ χ ἐπὶ τὸ κ. ἢ ἄρα ἀλλὰ τοῦ χ ἐπὶ τὸ κ μείζων ἔστι τῆς ἀλλὰ τῷ χ ἐπὶ τὸ ψ. ἢ δὲ ἀλλὰ τῷ χ ἐπὶ τὸ κ, ἴση ἔστι τῇ ἀλλὰ τῷ η ἐπὶ τὸ φ. καὶ ἢ ἀλλὰ τοῦ η ἄρα ἐπὶ τὸ φ, μείζων ἔστι τῆς ἀλλὰ τοῦ χ ἐπὶ τὸ ψ. καὶ ἐπεὶ ὁ χ ψ ω κύκλος ἔστι μὲν ἔστι τοῦ κέντρου, ἢ περ ὁ ξ η ο. μείζων ἄρα ἔστιν ὁ χ ψ ω κύκλος τοῦ ξ η ο κύκλου. ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι ἀνίστοι εἰσιν οἱ χ ψ ω, ξ η ο, καὶ ἔστιν ἐλάσσων ὁ ξ η ο, καὶ ἐν αὐτοῖς διηγυμέναι εἰσιν εὐθεῖαι, ἐν μὲν τῷ ξ η ο ἢ ἀλλὰ τοῦ η ἐπὶ τὸ φ. ἐν δὲ τῷ χ ψ ω ἢ ἀλλὰ τοῦ χ ἐπὶ τὸ ψ. καὶ ἔστιν ἢ ἀλλὰ τοῦ η ἐπὶ τὸ φ, μείζων τῆς ἀλλὰ τοῦ χ ἐπὶ τὸ ψ. ἢ ἢ φ ἄρα περιφέρεια τῆς χ ψ περιφέρειας μείζων ἔστιν ἢ ὁμοία. ἀλλὰ ἢ μὲν η φ τῇ λ μ ἔστι ὁμοία. ἢ δὲ χ ψ τῇ μ ν ἔστι ὁμοία. καὶ ἢ μ λ ἄρα περιφέρεια τῆς μ ν περιφέρειας μείζων ἔστιν ἢ ὁμοία. καὶ εἰς τοῦ αὐτοῦ κύκλου. μείζων ἄρα ἢ λ μ περιφέρεια τῆς μ ν περιφέρειας.



Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α. ζ.

Εάν τις σφαῖρα μέγιστος κύκλος κύκλου ἑνὸς τῆν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπ-

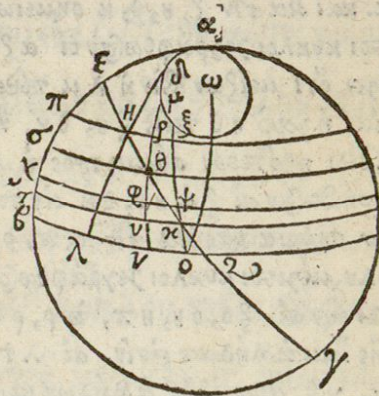
μείζων ἔστιν ἑκατέρωθεν τῶν σ κ, κ φ. μείζων ἄρα καὶ ἡ σ κ τῆς κ φ. ἀλλ' ἡ μὲν σ κ τῆς π ξ ἔστιν ἴση. ἡ δὲ κ φ τῆς μ ξ. καὶ ἡ π ξ ἄρα ξ μ μείζων ἔστιν.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Η'.

Εἴαν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ἑνὸς κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ὅλμ' ὅ δὲ πῃς μέγιστος κύκλος λαξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μείζονων ἐφάπτηται, ἢ ὢν ὁ ἱζαρχῆς ἐφήπτετο. ἐπὶ δὲ αἱ αἰφαὶ ὥσπερ ὑπὸ τῷ ἱζαρχῆς μεγίστου κύκλου. ἀπὸ δὲ τῷ λαξοῦ κύκλου ἴσαι πᾶσι φέρεται ἀπληφθῶσιν ἐξῆς ὑπὸ τὰ αὐτὰ μέρη τῷ μεγίστου τῶν παραλλήλων, ἀπὸ δὲ τῶν γινομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι οὗ καὶ ὁ ἱζ ἀρχῆς ἐφήπτετο ὁμοίως ἀφαιρουῶντες πᾶσι φερείας τῶν παραλλήλων κύκλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἀσύμπτωτα ποιοῦντες τὰ ἀπὸ τῶν ἐπαφῶν ἡμικύκλια, ὥς ὑπὸ τὰ μέρη τῶν σημείων, δι' ὧν ἐγράφοντο, τοῖς ἡμικυκλίω τῷ ἱζ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῷ ἐφ' οὗ ἂν ἡ σφαῖρα τῷ λαξοῦ κύκλου ἢ μεταξὺ τῶν τε φανδρῶν πόλου καὶ τῷ μεγίστου τῶν παραλλήλων ἀνίστους ἀπολήφοντο πᾶσι φερείας τῷ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν. καὶ μείζονα αἰετὶ πᾶσι ἐπὶ τῷ ἱζαρχῆς μεγίστου κύκλου, τῆς πορρώτερον.

Εἴν γὰρ σφαίρα μέγιστος κύκλος ὁ α β γ, κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ α δ, ἐφαπτόμενος κατὰ τὸ α σημεῖον, ἄλλος δέ τις μέγιστος ὁ ε ζ γ λαξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μείζονων ἐφαπτόμενος, ἢ ὢν ὁ α β γ κύκλος ἐφάπτεται. ἐπὶ δὲ αἱ αἰφαὶ ἔσονται ἐπὶ τοῦ α β γ κύκλου κατὰ τὰ ε, γ σημεία, μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἔστω ὁ β ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ λαξοῦ κύκλου τοῦ ε ζ γ, ἴσαι πᾶσι φέρεται ἀπληφθῶσιν αἱ η θ, θ κ, ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ β ζ. καὶ διὰ τῶν η, θ, κ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφοντο οἱ δ λ, μ θ υ, ξ κ ο, ἐφαπτόμενοι τοῦ α δ κύκλου κατὰ τὰ δ, μ, ξ σημεία, ὁμοίως ἀφαιροῦντες πᾶσι φερείας τῶν παραλλήλων κύκλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἀσύμπτωτα ποιοῦντες τὰ ἀπὸ τῶν δ, μ, ξ, ἡμικύκλια ὥς ἐπὶ τὰ μέρη τῶν η, θ, κ, τῶν α β ἡμικυκλίω. λέγω ὅτι μείζων ἔστιν ἡ λ ν πᾶσι φερείας τῆς ν ο πᾶσι φερείας. γεγράφοντο γὰρ διὰ τῶν η, θ, κ σημείων παράλληλοι κύκλοι οἱ π η ρ, σ θ, τ υ κ. μείζων ἄρα ἔστιν ἡ σ τ πᾶσι φερείας τῆς σ π πᾶσι φερείας. ἀλλ' ἡ μὲν σ τ ἴση ἔστι τῇ θ υ. ἡ δὲ σ π ἴση ἔστι τῇ θ ρ. καὶ ἡ υ θ ἄρα τῆς θ ρ μείζων ἔστι κείνῃ οὖν τῇ θ ρ ἴση ἢ θ φ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ η θ τῇ θ κ ἴση. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ η ἐπὶ τὸ ρ ἐπιζυγνυμένη εὐθεία, ἴση ἔστι τῇ ἀπὸ τοῦ φ ἐπὶ τὸ κ ἐπιζυγνυμένη εὐθεία. γεγράφω διὰ τοῦ φ ὁποτέρῳ τῶν π η ρ, σ θ, τ υ κ, β ζ, παράλληλος ὁ χ φ ψ. καὶ εἰλήφω ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων τὸ ω. καὶ διὰ τῶν ω, ο σημείων, μέγιστος κύκλος γεγράφω ὁ ω ο. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ω ο, κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κιν β ζ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὁρθάς. ὁ ω ο ἄρα κύκλος, ὁρθὸς ἔστι πρὸς τὸν β ζ κύκλον. ὁ ξ κ ο ἄρα πρὸς τὸν β ζ κέκλιται

κέκλιται, ὡς ἐπὶ τὰ α β μέρη. καὶ ὁ β γ πρὸς τὸν ξ κ ο κέκλιται, ὡς ἐπὶ τὰ α β μέρη. παράλληλος δὲ ὁ β γ τῷ χ φ ψ. καὶ ὁ χ φ ψ ἄρα πρὸς τὸν ξ κ ο κέκλιται, ὡς ἐπὶ τὰ ξ μέρη. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ β γ, χ φ ψ, ὑπὸ τίνος ἐπιπέδου τοῦ λοξοῦ τέμνεται τοῦ ξ κ ο. αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσὶν. ἡ δὲ κοινὴ κομὴ τῶν ξ κ ο, β γ, ἐστὶν ἡ ἀρχὴ τοῦ ο, σημείου διαμέτρου τοῦ ξ κ ο κύκλου. ἡ ἄρα κοινὴ τομὴ τῶν ξ κ ο, χ φ ψ, ἥτις ἐστὶν ἡ ἀρχὴ τοῦ ψ σημείου διηγομένη, παράλληλος ἐστὶν τῇ ἀρχῇ τοῦ ο, διαμέτρῳ τῷ ξ κ ο κύκλου. εἰς δὲ κύκλον τὸν ξ κ ο διήκται τις εὐθεῖα ἡ τῶν ξ κ ο, χ φ ψ κοινὴ τομὴ εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον (παράλληλος γὰρ ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῷ ξ κ ο κύκλου) καὶ ἐπ' αὐτῆς τμήμα κύκλου ἐφάρηκε τὸ χ ψ, καὶ τὸ τέτρω σιωεχὲς, κεκλιμένον πρὸς τὸ μὴ μείζον ἡμικυκλίῳ. διήρηται δὲ ἡ τῷ ἐφεσῶτος τμήματος πᾶσι φέρει εἰς ἄνισα κατὰ τὸ φ σημείον, καὶ ἡ φ ψ ἐλάσων ἐστὶν ἡ ἡμίσεια τῷ ἐφεσῶτος τμήματος πᾶσι φέρει. ἡ ἄρα ἀρχὴ τῷ φ ἐπὶ τὸ ψ ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα, ἐλάσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀρχῶν τῷ φ σημείον πρὸς πᾶσι μὴ ἐλάσσονα ἡμικυκλίῳ πᾶσι φέρειαν προσπιπουσῶν εὐθεῶν. ἡ ἄρα ἀρχὴ τῷ φ ἐπὶ τὸ ψ, ἐλάσων ἐστὶ τῆς ἀρχῆς τῷ φ ἐπὶ τὸ κ. ἡ δὲ ἀρχὴ τῷ φ ἐπὶ τὸ κ ἴση ἐστὶ τῇ ἀρχῇ τοῦ η ἐπὶ τὸ ρ, ὥστε ἡ ἀρχὴ τῷ η ἐπὶ τὸ ρ μείζων ἐστὶ τῆς ἀρχῆς τῷ φ ἐπὶ τὸ ψ. καὶ ἐπεὶ ὁ φ χ κύκλος ἔγμον ἐστὶ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας ἡ περὶ π η ρ. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ χ φ ψ κύκλος τῷ π η ρ κύκλου. ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι ἄνισοί εἰσιν οἱ χ φ ψ, π η ρ, καὶ ἐλάσων ἐστὶν ὁ π η ρ κύκλος, καὶ ἐν αὐτοῖς διηγομένη εἰσὶν εὐθεῖαι, ἐν μὲν τῷ π η ρ, ἡ ἀρχὴ τῷ η ἐπὶ τὸ ρ. ἐν δὲ τῷ χ φ ψ ἡ ἀρχὴ τῷ φ ἐπὶ τὸ ψ. καὶ ἡ ἐν τῷ ἐλάσσονι κύκλῳ διηγομένη μείζων ἐστὶν τῆς ἐν τῷ μείζονι κύκλῳ διηγομένης εὐθείας. τοῦτ' ἐστὶ μείζων ἐστὶν ἡ ἀρχὴ τῷ η ἐπὶ τὸ ρ, τῆς ἀρχῆς τῷ φ ἐπὶ τὸ ψ. ἡ η ρ ἄρα πᾶσι φέρει τῆς ψ φ πᾶσι φερείας μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία. ἀλλ' ἡ μὲν η ρ πᾶσι φέρει τῇ λ ν πᾶσι φερείᾳ ἐστὶν ὁμοία. ἡ δὲ φ ψ τῇ ν ο ἐστὶν ὁμοία. καὶ ἡ λ ν ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία τῆς ν ο. καὶ εἰσὶ τῷ αὐτῷ κύκλου. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ λ ν πᾶσι φέρει τῆς ν ο πᾶσι φερείας.

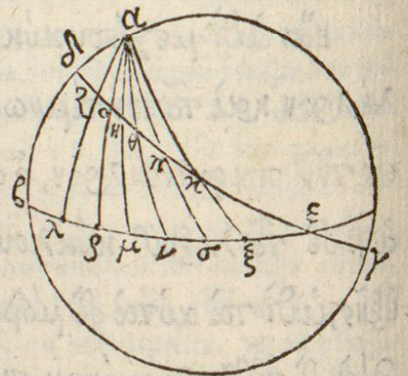
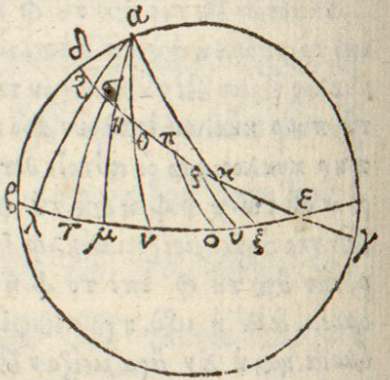
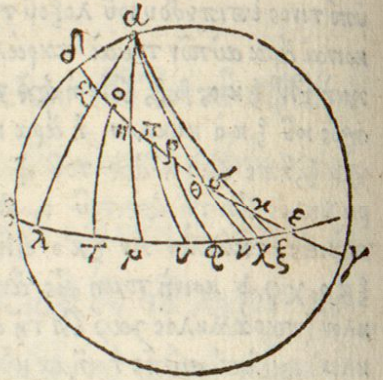


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Δ'.

Εἰάν ποτε μεγίστου κύκλου πᾶσι φέρειας ὁ πόλος ἢ τῶν παραλλήλων, καὶ τῶν τεμνωσὶ δύο μεγίστοι κύκλοι πρὸς ὁθὰς, ὧν ὁ μὲν εἰς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἐπερὶ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· ἀρχὴ δὲ τῷ λοξοῦ κύκλου ἴσα πᾶσι φέρειαι ἀποληφθῶσι μὴ οὔσαι ἐξῆς, ἡ δὲ αὐτὰ δὲ μέρη τῷ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου. Ἀλλὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων καὶ τῷ πόλου μεγίστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίστους ἀπολήφονται πᾶσι φέρειας τῷ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν. καὶ μείζονα αἰετὶ πᾶσι φέρειαι τῷ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου πᾶσι φερείας τῷ α β γ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ α σημείον, καὶ τὸν α β γ κύκλον δύο μεγίστοι κύκλοι τεμνέτωσαν οἱ δ ε γ, β ε, πρὸς ὁθὰς.

ὡν ὁ μὲν β εἰς ἑστὴν τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δι' εὐλογὸς πρὸς τὰς παραλλήλους. ἀλλ' αὖ
 τῷ λοξοῦ κύκλου τῷ δι' εὐλογῶν πᾶσι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν μὴ οὔσαι ἐξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ
 δὲ μέρη τῷ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τῷ β ε, αἱ ζ η,
 θ κ. καὶ διὰ τῶν ζ η, θ κ σημείων καὶ τῷ α πόλου, μέ-
 γιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ α ζ λ, α η μ, α θ ν, α κ ξ.
 λέγω ὅτι μείζων ἔστιν ἢ λ μ περιφέρεια τῆς ν ξ περιφε-
 ρείας. ἢ γὰρ ἡ θ ταῖς ζ η, θ κ, ἥτοι σύμμετρος ἔστιν, ἢ
 οὐ. ἔστω πρότερον σύμμετρος ἢ ἡ θ ταῖς ζ η, θ κ. καὶ
 διηγήσασθαι αἱ ζ η, η θ, θ κ εἰς τὰ μέρη κατὰ τὰ ο, π,
 ρ, σ σημεία. καὶ διὰ τῶν ο, π, ρ, σ σημείων καὶ τοῦ α
 πόλου, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ο τ, π υ, ρ φ, σ χ.
 ἐπεὶ οὖν αἱ ζ ο, ο η, η π, π ρ, ρ θ, θ σ, σ κ περιφέραι
 ἐξῆς ἴσαι ἀμμήλαις εἰσίν. αἱ λ τ, τ μ, μ ν, ν φ, φ ν,
 ν χ, χ ξ ἄρα ἐξῆς ἀμμήλων μείζονες εἰσίν, ἀρχόμεναι
 ἀπὸ μεγίστης τῆς λ τ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἔστιν ἢ μὲν λ τ τῆς
 ν χ, ἢ δὲ τ μ τῆς χ ξ. ὅλη ἄρα ἢ λ μ ὅλης τῆς ν ξ μείζων ἔστί. μὴ ἔστω δὲ ἢ ἡ θ ταῖς
 ζ η, θ κ σύμμετρος. λέγω ὅτι ὁμοίως μείζων ἔστιν ἢ λ μ περιφέρεια τῆς ν ξ περιφερείας.
 εἰ γὰρ μὴ ἔσται μείζων, ἥτοι ἐλάσσων ἔστιν αὐτῆς, ἢ ἴση αὐ-
 τῇ. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἢ λ μ τῆς ν ξ, ὡς
 ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς. κείσθω τῇ λ μ ἴση
 ἢ ν ο. καὶ διὰ τοῦ α πόλου καὶ τοῦ ο μέγιστος κύκλος
 γεγράφθω ὁ π ο. καὶ τριῶν οὐσῶν περιφερῶν ὁμογενῶν
 ἀνίσων τῶν κ θ, θ π, η θ, εἰλήφθω τις περιφέρεια ἢ θ ρ
 μείζων μὲν οὔσα τῆς θ π, ἐλάσσων δὲ θ κ, σύμμετρος
 διὰ τῇ η θ. καὶ κείσθω τῇ θ ρ ἴση ἢ σ η. καὶ διὰ τῶν σ, ρ
 σημείων καὶ διὰ τοῦ α πόλου, μέγιστοι κύκλοι γεγρά-
 φθωσαν οἱ σ τ, ρ υ ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἢ σ η τῇ θ ρ. ἢ τ μ
 ἄρα τῆς ν ο μείζων ἔστί. τῆς δὲ τ μ ἢ λ μ μείζων ἔστί.
 πομπῶς ἄρα ἢ μ λ τῆς ν ο μείζων ἔστιν. ἀλλὰ καὶ ἴση.
 ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἔστιν ἢ λ μ τῆς ν ξ.
 λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἔστιν ἢ λ μ τῇ ν ξ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης κα-
 ταγραφῆς, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ζ η, θ κ, δίχα κατὰ τὰ ο, π σημεία. καὶ διὰ τῶν ο, π
 σημείων καὶ τοῦ α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγρά-
 φθωσαν οἱ ο ρ, π σ. ἐπεὶ οὖν αἱ ζ ο, ο η ἐξῆς ἴσαι ἀμμή-
 λαις εἰσίν, αἱ ἄρα λ ρ, ρ μ ἐξῆς ἀμμήλων μείζονες
 εἰσίν ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς λ ρ. μείζων ἄρα
 ἔστιν ἢ λ ρ τῆς ρ μ. ἢ ἄρα λ μ τῆς μ ρ μείζων ἔστιν ἢ
 διπλῇ. πάλιν ἐπεὶ αἱ θ π, π κ ἐξῆς ἴσαι ἀμμήλαις
 εἰσίν, αἱ ν σ, σ ξ ἄρα ἐξῆς ἀμμήλων μείζονες εἰσίν,
 ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ν σ. μείζων ἄρα ἔστιν ἢ
 ν σ τῆς σ ξ. ὥστε ἢ ξ ν τῆς ν σ ἐλάσσων ἔστιν ἢ δι-
 πλῇ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἢ λ μ τῇ ν ξ, ὦν ἢ λ μ τῆς
 μ ρ μείζων ἔστιν ἢ διπλῇ. ἢ δὲ ξ ν τῆς ν σ ἐλάσσων
 ἔστιν ἢ διπλῇ. ἐλάσσων ἄρα ἔστιν ἢ ρ μ τῆς ν σ, ἴσων ὑποκειμένων τῶν ο η, θ π, ὅπερ
 ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἴση ἔστιν ἢ λ μ τῇ ν ξ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. μείζων ἄρα
 ἔστιν ἢ λ μ περιφέρεια τῆς ν ξ περιφερείας.

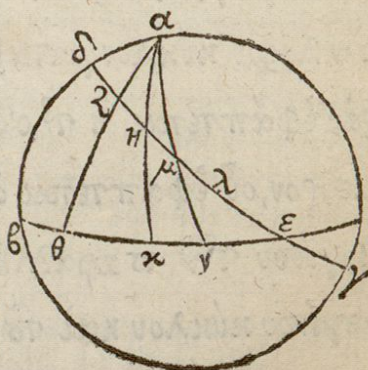
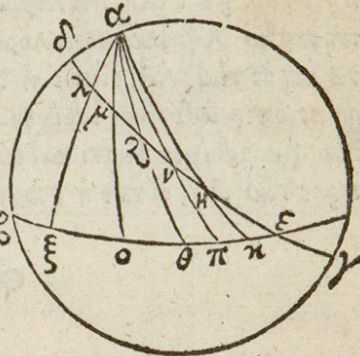


ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.

Εάν ᾤδῃ μεγίστου κύκλου περιφέρειας πῶλος ἢ τῶν παραλλή-

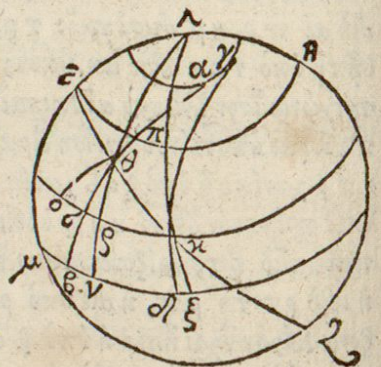
λφρ, ὅτε πορ πέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθαίς, ὧν ὁ μὲν εἰς
 τῆν παραμήλωρ, ὁ δὲ ἐπερ τοξὸς πρὸς τοὺς παραμήλους. ὡδὲ
 δὲ τῷ τοξοῦ κύκλου ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα ὡδὲ τὰ αὐτὰ μέρη
 τῷ μεγίστου τῷ παραμήλωρ, ἀλλὰ δὲ τῆν σημεῖων καὶ τῷ τόλῳ τῆν
 παραμήλωρ μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν ἔσαι ὡς ἡ τῷ μεγίστου τῆν
 παραμήλωρ πῶδι φέρει ἡ μεταξὺ τῷ ἄρχῃς μεγίστου κύκλου,
 καὶ τῷ ἐξῆς ἀλλὰ τῷ τόλῳ, πρὸς τῷ τῷ τοξοῦ κύκλου πῶδι φέρειαν
 τῷ μεταξὺ τῷ αὐτῶν κύκλων, οὕτως ἡ ἐξῆς τοῦ μεγίστου τῷ παρα-
 μήλωρ πῶδι φέρει ἡ μεταξὺ τῷ ἀλλὰ τῷ τόλῳ μεγίστων κύκλων,
 καὶ τῆν ληφθέντων σημεῖων, πρὸς ἐλάσσονά πινὰ πῶδι φέρειαν τῆς
 τῷ τοξοῦ κύκλου πῶδι φέρειας τῷ μεταξὺ τῷ ληφθέντων δύο σημεῖων.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου πῶδι φέρειας τοῦ α β γ ὁ πόλος ἔσω τῆν παραμήλων τὸ α
 σημεῖον. καὶ τὸν α β γ κύκλον δύο τεμνέτωσαν μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθαίς οἱ δ λ γ, β ε.
 ὧν ὁ μὲν β ε εἰς ἔσω τῆν παραμήλων. ὁ δὲ δ λ γ, τοξὸς
 πρὸς τοὺς παραμήλους. ἔσω δὲ τοῦ τοξοῦ κύκλου τοῦ
 δ λ γ, εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ ζ, η ἐπὶ τὰ αὐ-
 τὰ μέρη τῷ μεγίστου τῆν παραμήλων τῷ β ε. καὶ διὰ τῆν
 ζ, η σημεῖων καὶ τῷ πόλῳ, μέγιστοι κύκλοι γεγράφωσαν οἱ
 α ζ θ, α η κ. λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ β θ πῶδι φέρει πρὸς τῷ
 δ λ γ πῶδι φέρειαν, οὕτως ἡ θ κ πῶδι φέρει πρὸς ἐλάσσονα
 τινὰ πῶδι φέρειαν τῆς ζ η πῶδι φέρειας. ἦτοι γὰρ ἡ ζ η τῆν
 δ λ γ σύμμετρος ἔστιν, ἢ οὐ. ἔσω πρότερον σύμμετρος, καὶ
 διηρηθῶσαν εἰς τὰ μέρη αἱ δ λ γ, η ζ κατὰ τὰ λ, μ, ν ση-
 μεῖα καὶ διὰ τῆν λ, μ, ν καὶ πόλου τῷ α, μέγιστοι κύκλοι
 γεγράφωσαν οἱ λ ξ, μ ο, ν π. ἐπεὶ οὖν αἱ δ λ, μ λ, μ ζ,
 ζ ν, ν η ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, αἱ β ξ, ξ ο, ο θ, θ π, π κ ἄρα ἐξῆς ἀλλήλων μείζονες
 εἰσιν ἀρχόμεναι ἀπὸ τῆς μεγίστης τῆς β ξ. ἐπεὶ οὖν αἱ β ξ, ξ ο, ο θ, θ π, π κ ἐξῆς μείζονες
 ἀλλήλων εἰσιν, αἱ δὲ δ λ, λ μ, μ ζ, ζ ν, ν η ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, καὶ ἔτι τὸ μὲν
 πλήθος τῆν β ξ, ξ ο, ο θ ἴσον τῷ πλήθει τῆν δ λ, λ μ,
 μ ζ. τὸ δὲ πλήθος τῆν θ π, π κ ἴσον τῷ πλήθει τῆν ζ ν,
 ν η ἢ β θ ἄρα πρὸς τῷ δ λ γ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ
 θ κ πρὸς τῷ ζ η. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν ὡς τῷ β θ πρὸς τῷ
 δ λ γ, οὕτω τῷ θ κ πρὸς ἄλλῳ τινὰ, ἔσαι πρὸς ἐλάσσονα
 τῆς ζ η. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β θ πῶδι φέρει πρὸς τῷ δ λ γ π-
 ῶδι φέρειαν, οὕτως ἡ θ κ πρὸς ἐλάσσονά τινὰ πῶδι φέρειαν
 τῆς ζ η. Μὴ ἔσω δὲ ἡ ζ η τῆν δ λ γ σύμμετρος. λέγω
 ὅτι καὶ οὕτως, ἔστιν ὡς ἡ β θ πῶδι φέρει πρὸς τῷ δ λ γ
 πῶδι φέρειαν, οὕτως ἡ θ κ πῶδι φέρει πρὸς ἐλάσσονά τινὰ
 τῆς ζ η πῶδι φέρειας. εἰ γὰρ μή. ἦτοι πρὸς μείζονα τῆς ζ η
 ἔσαι, ἢ πρὸς αὐτήν. ἔσω πρότερον εἰ δυνατόν πρὸς μείζονα
 τῆς ζ η τῷ λ ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγρα-
 φῆς. καὶ τριῶν οὐσῶν ἀνίσων πῶδι φέρειων τῆν λ ζ, ζ η, ζ δ. εἰλήφθω τις πῶδι φέρει ἡ ζ μ.



Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τῷ αὐτῷ τῇ παραλλήλων ἐ-
 φάπνυνται, ὁμοίως ἀφαιρουῦντες τῇ παραλλήλων κύκλων τὰς
 μεταξὺ αὐτῶν, ὅλος δὲ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὦρ πρὸς τοῦ πα-
 ραλλήλους μείζονωρ ἐφάπνυνται, ἢ ὦρ οἱ ἄρχῃς ἐφῆπνοντο, καὶ
 τέμνῃ τοῦ αὐτοῦ ἐφαπτομένους μεταξὺ τῷ μεγίστου τῇ παραλ-
 λήλων καὶ οὗ οἱ ἄρχῃς ἐφῆπνοντο. ἡ διπλασίωρ τῷ Διμέτρου
 τῷ σφαίρας πρὸς τὴν τῷ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξὸς
 κύκλος, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς ἢ τῷ μεγίστου τῇ παραλλήλων
 κύκλωρ πᾶσι φέρει ἢ μεταξὺ τῇ τῷ αὐτοῦ κύκλου ἐφαπτομένωρ,
 πρὸς τὴν τῷ λοξοῦ κύκλου πᾶσι φέρει τὴν μεταξὺ τῇ αὐτῶν
 κύκλωρ.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ αβ, γδ, τοῦ αὐτοῦ τῇ παραλλήλων ἐφαπ-
 τῶν τοῦ αγ, κατὰ τὰ α, γ, σημεία, ὁμοίως ἀφαιρουῦντες πᾶσι φέρει τῇ παραλλή-
 λων κύκλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δὲ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὦρ πρὸς τοῦ παραλ-
 λήλους ὁ εζ, μείζονωρ ἐφαπτῶν, ἢ ὦρ οἱ αβ, γδ ἐφάπνυνται. καὶ τέμνῃ ὁ εζ, τοὺς
 αβ, γδ μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῇ παραλλήλων, καὶ οὗ οἱ αβ, γδ ἐφάπνυνται, τοῦ αγ
 κύκλου. ἔστω δὲ μέγιστος μὲν τῇ παραλλήλων κύκλων ὁ μβξ, οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ εζ, ἔστω
 ὁ εη. λέγω ὅτι ἡ διπλασίωρ τῇ διαμέτρου τῇ σφαίρας, πρὸς τὴν τῇ εη κύκλου διά-
 μετρον, μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς ἢ βδ πᾶσι φέρει πρὸς τὴν θκ πᾶσι φέρει. ἔστω γὰρ ὁ
 πόλος τῇ παραλλήλων τὸ λ σημείον. καὶ διὰ τοῦ λ καὶ ἐκαστοῦ τῇ ε, θ, κ σημείων, μέ-
 γιστοι κύκλοι γεγράφωσιν οἱ λεμ, λθν, λκξ. διὰ δὲ τοῦ κ παράλληλος κύκλος γε-
 γράφω ὁ οκ, διὰ δὲ τοῦ θ μέγιστος κύκλος γεγράφω ὁ
 θπ, ἐφαπτόμενος τοῦ εη κύκλου κατὰ τὸ π. ἐπεὶ οὖν ἐν
 σφαίρᾳ δύο παράλληλοι εἰσὶ κύκλοι, οἱ οκ, επη. καὶ
 γεγραμμένοι εἰσὶ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ εθκζ, οθπ, ἐφα-
 πτόμενοι τοῦ επη κατὰ τὰ ε, π. διὰ δὲ τοῦ θ σημείου
 καὶ τοῦ πόλου τοῦ λ μέγιστος γεγράφω κύκλος ὁ λθρ.
 ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ορ τῇ ρκ. καὶ ἡ ρσ ἄρα τῇ ρκ ἐλάσσων
 ἐστὶν ἢ σκ ἄρα τῇ κρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῇ. ἀλλ' ἢ μὲν
 σκ τῇ βδ ἐστὶν ὁμοία. ἢ δὲ κρ τῇ νξ. καὶ ἡ βδ ἄρα
 τῇ νξ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῇ. καὶ ἐπεὶ ἡ τῇ σφαίρας
 διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ εη κύκλου διάμετρον, μείζονα
 λόγον ἔχει ἢ πρὸς ἢ μν πᾶσι φέρει πρὸς τὴν εθ πᾶσι φέ-
 ρει. ἔχει δὲ καὶ ἡ μν πᾶσι φέρει πρὸς τὴν εθ πᾶσι φέρει, μείζονα λόγον ἢ πρὸς ἢ νξ πᾶ-
 ρι φέρει πρὸς τὴν θκ πᾶσι φέρει. καὶ ἡ τῇ σφαίρας ἄρα διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ επη
 κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς ἢ νξ πᾶσι φέρει πρὸς τὴν θκ πᾶσι φέρει. καὶ
 τὸ ἄρα διπλασίον τῇ διαμέτρου τῇ σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ επη κύκλου διάμετρον,
 μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς ἢ τῇ νξ πᾶσι φέρει διπλῇ πρὸς τὴν κθ πᾶσι φέρει. ἢ δὲ τῇ
 νξ πᾶσι φέρει διπλῇ πρὸς τὴν θκ πᾶσι φέρει μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς ἢ βδ πᾶσι
 φέρει πρὸς τὴν θκ. ἢ γὰρ τῇ νξ διπλῇ μείζων ἐστὶ τῇ βδ. πολλῶν ἄρα ἡ διπλασίωρ
 τῇ δια-

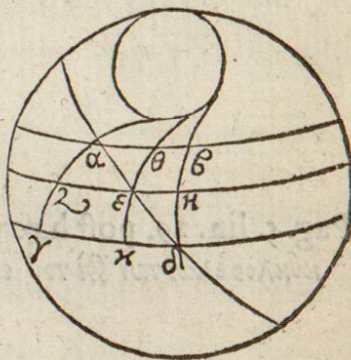
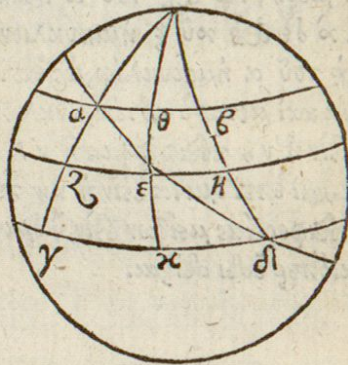


τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ἐπὶ τῆς κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ β δὲ περιφέρειαν πρὸς τὴν θ κ περιφέρειαν.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ιγ'.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι μεγίστου πρὸς κύκλου πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων. ὅθεν δὲ τῶν γενομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἢ ἀπὸ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων, ἢ τὸ αὐτὸ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι ἴσας ἀπολήφοντες περιφερείας ὅθεν τὸ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ α β, γ δ, μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ α δ περιφερείας τὰς α ε, ε δ ἴσας ἀφαιρέσας πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ζ η. καὶ διὰ τῶν α, ε, δ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφωσαν οἱ α ζ γ, θ ε κ, β η δ, ἥτοι διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι. λέγω ὅτι ἴση ἔστιν ἡ ζ ε περιφέρεια τῇ ε η περιφείᾳ. ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ α β, γ δ, μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ α ε δ περιφερείας τὰς α ε, ε δ, ἴσας ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν, ζ η, ἴσος ἄρα ἔστιν ὁ α β κύκλος τῷ γ δ κύκλῳ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ α β, γ δ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ θ κ, περιφερείας τὰς θ ε, ε κ ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ζ η. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ θ ε τῇ ε κ. ἔστι δὲ καὶ ἡ α ε τῇ ε δ ἴση. καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ α ἄρα ἐπὶ τὸ θ ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἔστι τῇ ἀρχῇ τοῦ κ ἐπὶ τὸ δ ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα. καὶ εἰσὶν ἴσοι οἱ κύκλοι. ἡ α θ ἄρα περιφέρεια ἴση ἔστι τῇ κ δ περιφείᾳ. ὁμοία ἄρα ἔστιν ἡ α θ περιφέρεια τῇ κ δ περιφείᾳ. ἀλλ' ἡ μὲν α θ τῇ ζ ε ἔστιν ὁμοία. ἡ δὲ κ δ τῇ ε η ἔστιν ὁμοία. καὶ ἡ ε ζ ἄρα τῇ ε η περιφείᾳ ὁμοία ἔστι. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ζ ε περιφέρεια τῇ ε η περιφείᾳ.

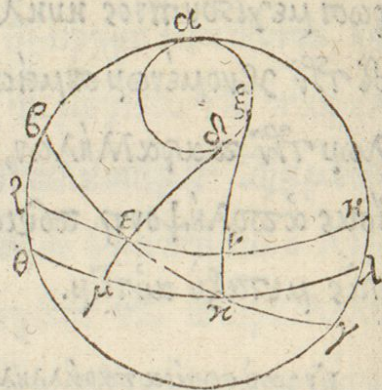


Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α ιδ'.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου πρὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφαπτηται. ὅθεν δὲ πρὸς μέγιστος κύκλος λόγος ὢν πρὸς τὸν παραλλήλους μείζονα ἐφαπτηται, ἢ ὢν ὁ ἰζ' ἀρχῆς ἐφήπτετο ἀνομοίας ἀπολήφοντα περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων.

τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονός ἢ ὁμοίαι ἔσονται αἰεὶ αἰ' ἑπίοι ὅπο-
περουοῦ τῇν πόλων τ' ὡρρώτερον.

Εἴν γὰρ σφαῖρα μέγιστος κύκλος ὁ αβγ, κύκλου τινός τῇν ὅν τῇ σφαίρα τοῦ α δ ξ
ἐφαπτόμεθα κατὰ τὸ α σημεῖον. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ β ε γ, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς
παραλλήλους, μείζονων ἐφαπτόμεθα, ἢ ὢν ὁ αβγ ἐφαπτόμεται. λέγω ὅτι ἀνομοίας ἀπολήγον-
ται πᾶσι περιφέρειαις τῇν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν.
καὶ μείζονες ἢ ὁμοίαι ἔσονται αἰεὶ αἰ' ἑγγον ὅποτερουοῦν
τῇν πόλων τῆς πορρώτερον. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τοῦ λο-
ξοῦ κύκλου τοῦ β γ, δύο τυχόντα σημεῖα τὰ ε, κ. καὶ
διὰ τῇν ε, κ σημεῖων τῷ α δ ξ, κύκλοι παράλληλοι
γεγράφθωσαν οἱ ζ ε η, θ μ λ. λέγω ὅτι ἡ μὲν ε η πᾶσι
περιφέρειαις τῆς κ λ περιφέρειας μείζων ἔστιν ἢ ὁμοία. ἡ δὲ
θ κ περιφέρειαις, τῆς ζ ε περιφέρειας μείζων ἔστιν ἢ
ὁμοία. γεγράφθω γὰρ διὰ τῇν ε, κ σημεῖων μέγι-
στοι κύκλοι οἱ δ ε μ, ξ ν κ ἐφαπτόμενοι τοῦ α δ ξ, ὥς
ἐσὺμπῶτον εἶναι τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ δ ἡμικύκλιον, ὥς ἐπὶ
τὰ μ μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ α ἡμικυκλίῳ, ὥς ἐπὶ τὰ θ
μέρη. τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ ξ ἡμικύκλιον, ὥς ἐπὶ τὰ κ μέρη,
τῷ ἀπὸ τοῦ α ἡμικυκλίῳ, ὥς ἐπὶ τὰ λ μέρη. Ἐπεὶ οὖν ἀσὺμπῶτά ἐστι τὰ α λ, ξ κ ἡμι-
κύκλια καὶ μεταξὺ αὐτῶν, κύκλων παραλλήλων περιφέρειαι εἰσιν αἱ ν η, κ λ. ὁμοία
ἄρα ἔστιν ἡ ν η περιφέρειαις τῇ κ λ περιφέρειαις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ ζ ε τῇ θ μ ἔστιν
ὁμοία. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἔστιν ἡ ν η περιφέρειαις τῇ κ λ περιφέρειαις. ἡ ἄρα ε η περιφέρειαις τῆς
κ λ περιφέρειας μείζων ἔστιν ἢ ὁμοία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θ κ τῆς ζ ε μείζων ἔστιν ἢ
ὁμοία. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.



ΘΕΟΔΟΣΙΟΥ ΤΡΙΠΟ-
λίτου σφαιριῶν τέλος.

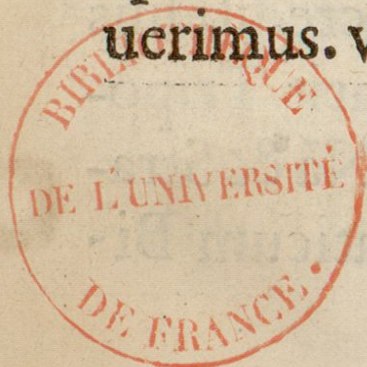
ERRATA

Pag. 5. lin. 29. post hæc verba τοῦ ε ζ κύκλου, addenda sunt hæc καὶ ὁ α β ἄρα
κύκλος ἐλάττω ἔστι τοῦ ε ζ κύκλου. τῶν ἄρα. & c.

I. PENA LECTORI.

N explicando Theodosio quia plerisque locis Græca vel mutila vel obscura erant, liberiore interdum interpretatione usus sumus, & quæ Græcis deesse videbantur suppleuimus, imò etiam quia totum sphæricum negotium è Geometria pendet, si quando ad firmandas Theodosij demonstrationes Euclidis Elementa deficiebant, è recentioribus authoribus vt Vitellione & alijs, theoremata citauimus, quod & Lectorem admonere volumus, & alioqui notæ hæ () illis locis appositæ indicant. Cæterum Theodosiū hunc Tripoliten fuisse & titulus indicat & Suidas sigillatim admonet, quem & professione philosophum & patria Tripoliten fuisse scribit. Quanquam hunc Strabo professione quidem Mathematicum, natione autem Bithynium tradit, quod nihil repugnat. fieri enim potest vt in Bithynia fuerit regionis aliquis tractus cui nomen Tripolis, quemadmodum in Phœnicia & Africa, & alibi. Vel quod credibilius est, fieri potest vt è Bithynia migrarit Tripolin, cuius postea nomen retinuerit. Nā & Strabo idem, Hipparchum mathematicum Bi-

thynium fuisse affirmat, quem tamen Rhodiū
fuisse Ptolemæus & alij scribunt. Sed hoc leue
est, quod tamen sedulum lectorem celare no-
luimus. Quo autem tempore vixerit, contro-
uersum esse video. Quidam posteriorē faciunt
Marino Tyrio Cosmographo, Andromacho
Cretensi Theoricarum inuentore, Menelao
Geometra, & aliis qui circa Domitiani tēpora
floruerūt, sed iis tamen omnibus antiquiorem
esse Theodosiū hinc constat, quia Strabo qui
hos omnes præcessit, Theodosij eiusque filio-
rum mentionem facit, quos simul cum patre,
mathematicę scientiæ laude præstitisse scribit.
Crediderim ergo circa Pompeij Magni tem-
pora vixisse Theodosium, quē simul cum As-
clepiade medico (fuit autē Asclepiades Pom-
peij Magni tēporibus, vt tradit Plinius) in Bi-
thynia floruisse scribit Strabo. Hæc de Theo-
dosij patria professione, & ætate. Scripsit autē
plerosque alios libros quorū duo seruantur &
extant in Bibliotheca Regia, *πρὸς οὐρανίους & πρὸς*
κοίτης καὶ ἡμερῶν, quos (vti spero) breui ædemus, si
Sphærica hæc sedulo lectori placuisse cogno-
uerimus. vale. E Prællæo 3. Non. Mart. 1558.



THEODOSII



Theodosii Tripolitæ

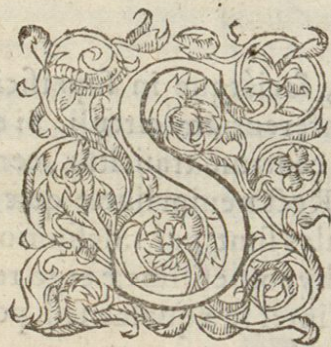
SPHÆRICORVM LIBER

PRIMVS, IOANNE PENA RE-
gio Mathematico interprete.

AD

*Illustrissimum Principem Carolum Lotharingum
Cardinalem.*

DEFINITIO. 1.



*sphæra est figura solida comprehensa
vnâ superficie, ad quam ab vno eorum
punctorum quæ intra figuram sunt,
omnes rectæ lineæ ductæ, sunt inter se
æquales.*

DEFINIT. 2.

Centrum autem sphærae, est eiusmodi punctum.

DEFINIT. 3.

*Axis verò sphærae, est recta quadam linea per cen-
trum ducta, & utrinque terminata in sphærae superfi-
cie, circa quam quiescentem circumuoluitur sphæra.*

DEFINIT. 4.

*Poli sphærae, sunt extrema puncta ipsius axis, siue
diametri.*



Polus circuli in sphaera, est punctum in superficie sphaerae, à quo omnes rectae lineae ad circuli circumferentiam tendentes, sunt inter se aequales.

DEFINIT. 6.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque aliud planum ad aliud planum, cum in utroque plano ductae rectae lineae, quae angulos rectos faciant cum communi sectione planorum, in iisdem punctis aequales angulos comprehendunt.

THEOREMA I.

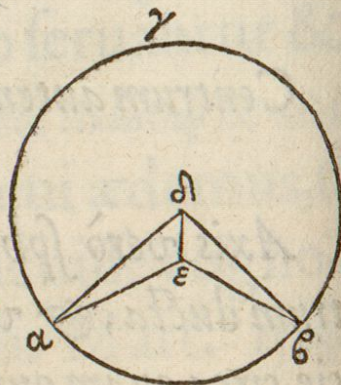
Si sphaerica superficies plano aliquo secetur, linea quae fit in sphaerae superficie, est circumferentia circuli.

Secetur enim plano aliquo sphaerica superficies, faciaturque in superficie sphaerae lineam $\alpha\beta\gamma$. Dico lineam $\alpha\beta\gamma$ esse circumferentiam circuli. Si enim planum illud quod secat sphaeram, per sphaerae centrum traicitur, certum est lineam $\alpha\beta\gamma$ esse circumferentiam circuli: Rectae enim lineae quae à sphaerae centro ad superficiem ducuntur, inter se aequales sunt (per. 1. definitionem) atqui linea $\alpha\beta\gamma$ est in sphaerae superficie, (ex hypothese) lineae ergo rectae, quae à centro sphaerae in lineam $\alpha\beta\gamma$ pergunt, sunt inter se aequales: sed positum est & concessum, planum $\alpha\beta\gamma$ per sphaerae centrum traici. Ergo linea $\alpha\beta\gamma$ est circumferentia circuli, cuius centrum idem est cum sphaerae centro.

Primum Corollarium.

Atque hinc patet idem esse sphaerae centrum, & circuli per sphaerae centrum traiectionis.

Sed enim planum illud quod sphaeram secat, non ducatur per sphaerae centrum, sitque centrum sphaerae punctum Δ , & à puncto Δ , ad planum quod sphaeram secat, ducatur perpendicularis $\delta\epsilon$ (per 11. undecimi Element.) quae planum attingat in puncto ϵ : & à puncto ϵ , ad lineam $\alpha\beta\gamma$, ducantur rectae lineae $\epsilon\alpha$ & $\epsilon\beta$, connectanturque rectae $\Delta\alpha$ & $\Delta\beta$: Cum ergo recta $\alpha\Delta$ aequalis sit rectae $\Delta\beta$: quadrato verò quod fit ex $\alpha\Delta$, aequalia sint quadrata duo quae fiunt ex $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\Delta$: quadrato autem quod fit ex $\Delta\beta$ aequalia sint quadrata duo quae fiunt ex $\beta\epsilon$ & $\epsilon\Delta$ (per 47. primi Element.) uterque enim angulo-



rum ad ϵ punctum positorum rectus est: duo igitur quadrata quæ fiunt ex $\alpha \epsilon$, & $\delta \epsilon$, æqualia sunt duobus quadratis quæ fiunt ex $\beta \epsilon$, & $\delta \epsilon$. Auferatur commune quadratum quod fit ex $\delta \epsilon$: æquale igitur est quadratum factum ex $\alpha \epsilon$, quadrato facto ex $\beta \epsilon$, atque idcirco recta $\alpha \epsilon$ æqualis est rectæ $\beta \epsilon$. Eodem modo ostendemus omnes rectas ductas à puncto ϵ ad lineam $\alpha \beta \gamma$, æquales inter se esse. Igitur linea $\alpha \beta \gamma$ est circumferentia circuli, cuius centrum est ϵ .

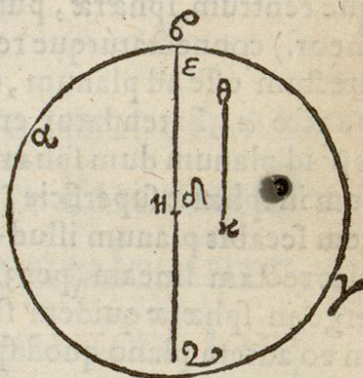
Atque hinc constat fore ut si in sphaera sit circulus, perpendicularis ducta à centro sphaeræ in circuli planum, cadat in centrum circuli.

*Secundum
Corollarium.*

THEOREMA 2.

Data sphaeræ centrum inuenire.

Sit data sphaera quælibet, cuius centrum inuenire oporteat. Secetur ergo eadem sphaera plano aliquo. Igitur planum illud secans sphaeram, faciet circum-
lum (per 1. theor.) faciat inquam circumlum qui sit $\alpha \beta \gamma$, cuius centrum sumatur (per 1. tertij Elem.) sitque illud δ punctum: & à puncto δ , excitetur recta linea, quæ rectos angulos faciat ad planum ipsius $\alpha \beta \gamma$ circuli, (per 12. vndecimi Element.) sitque ea $\delta \epsilon$, quæ producat, committaturque superfici ei sphaeræ in punctis ϵ & ζ , seceturque bifariam ipsa $\epsilon \zeta$ in puncto η . dico punctum η esse centrum datae sphaeræ. Si enim punctum η non sit centrum datae sphaeræ, esto illud (si fieri possit) punctum θ , & à puncto θ , ducatur perpendicularis ad planum ipsius $\alpha \beta \gamma$ circuli (per 11. vndecimi Element.) quæ committatur plano circuli in puncto κ . Igitur punctum κ est centrum ipsius $\alpha \beta \gamma$ circuli (per secundum corollarium primi theore-
matis): Sed punctum δ est etiam centrum eiusdem $\alpha \beta \gamma$ circuli, quod absurdum est: Ergo punctum θ non est centrum sphaeræ. Idem ostendemus de quocunque alio puncto, præterquam de puncto η . Quare punctum η est centrum sphaeræ.



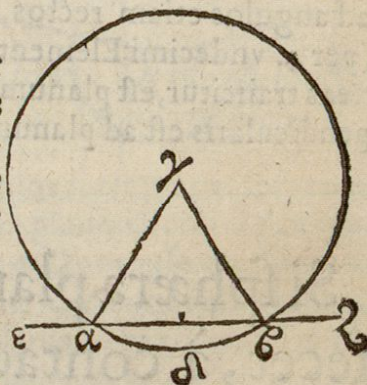
Hinc constat, si in sphaera sit circulus, à centro autem ipsius excitetur recta linea quæ angulos rectos faciat ad ipsius circuli planum, in linea excitata centrum esse sphaeræ.

Corollarium.

THEOREMA 3.

Sphaera, planum à quo non secatur, non tangit in pluribus punctis vno.

Si enim fas est, sphaera planum à quo non secatur tangat in punctis pluribus vno, nempe in punctis α & ϵ , sumaturque ceterum ipsius sphaeræ (per 2. theorema) quod sit γ punctum: & connectantur rectæ $\alpha \gamma$, $\beta \gamma$: & producat planum aliud traiectum per lineas $\alpha \gamma$ & $\beta \gamma$: sectio igitur, quam faciet in sphaeræ superficie, erit circumferentia circuli (per 1. theor.) sectio autem illa quam faciet cum eo plano quod sphaeram tangit, erit recta linea (per 3. vndecimi



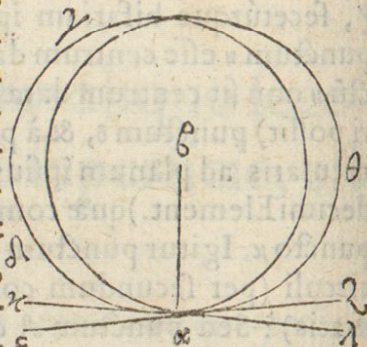
A ij Ele.

Element.) faciat ergo in sphæræ quidem superficie circulum $\delta\alpha\beta$; in plano autem quod sphæram tangit, faciat rectam $\epsilon\alpha\zeta$. Quia igitur planum illud non secat sphæram, est autem in sphæræ superficie circulus, in plano autem recta linea: Ergo recta linea $\epsilon\alpha\beta$ non secat ipsum $\delta\alpha\beta$ circulum. Cum ergo in ipsius $\delta\alpha\beta$ circuli circumferentiâ, sumpta sint duo qualibet puncta α & β : Igitur linea recta ducta à puncto α in punctum β , cadet intra ipsum $\delta\alpha\beta$ circulum (per 2. tertij Element.) Sed cadit etiam extra, quod fieri non potest. Sphæra ergo planum à quo minimè secatur, in vnico tantum puncto potest tangere.

THEOREMA 4.

Si sphæra planum tangat quod eam non secet, recta linea ducta à centro sphæræ ad contractum, perpendicularis erit ad planum.

Sphæra enim, planum quod ipsam non secet, tangat in puncto α , sumaturque centrum sphæræ, punctum β videlicet (per 2. theor.) connectaturque recta $\beta\alpha$. Dico lineam $\beta\alpha$ erectam esse ad planum, quod sphæram tangit in puncto α : Extendatur enim planum per lineam $\alpha\beta$ id planum dum sphæram secabit, faciet circulum in sphæræ superficie (per 1. theorema) dum autem secabit planum illud quod sphæram tangit, faciet rectam lineam (per 3. vndecimi Elem.) faciat ergo in sphæræ quidem superficie circulum $\alpha\gamma\delta$, in eo autem plano quod sphæram tangit, faciat rectam $\epsilon\alpha\zeta$. Rursum per eandem lineam $\alpha\beta$ extendatur aliud planum, cuius sectio faciat in sphæræ quidem superficie circulum $\alpha\theta$, in plano autem quod sphæram tangit, rectam lineam $\kappa\alpha\lambda$. Cum ergo planum tangat sphæram, recta igitur $\alpha\epsilon\zeta$ tangit $\alpha\gamma\delta$ circulum. Quia ergo recta quædam linea $\epsilon\alpha\zeta$ tangit circulum $\alpha\gamma\delta$ in puncto α : à puncto autem α ad centrum circuli connexa est recta $\alpha\beta$: igitur recta $\alpha\beta$ perpendicularis est ad $\epsilon\alpha\zeta$ (per 18. tertij Elementorum) Constat autem (ex priore corollario primi theorematis) punctum β centrum esse ipsius $\alpha\gamma\delta$ circuli, cum planum eiusdem $\alpha\beta\gamma$ circuli extendatur per lineam $\beta\alpha$, que est à centro sphæræ. Eodem modo ostendemus lineam $\beta\alpha$ perpendicularem esse ad rectam $\kappa\alpha\lambda$. Cum itaque recta $\beta\alpha$ stet ad angulos rectos in communi sectione duarum linearum $\epsilon\zeta$ & $\kappa\lambda$ se mutuo secantium: igitur recta $\beta\alpha$ ad angulos etiam rectos stat in illo plano quod per ipsas $\epsilon\zeta$ & $\kappa\lambda$ traicitur (per 4. vndecimi Element.) Planum autem, quod per ipsas $\epsilon\zeta$ & $\kappa\lambda$ rectas lineas traicitur, est planum illud quod sphæram tangit. Quare recta $\alpha\beta$, perpendicularis est ad planum quod sphæram tangit.

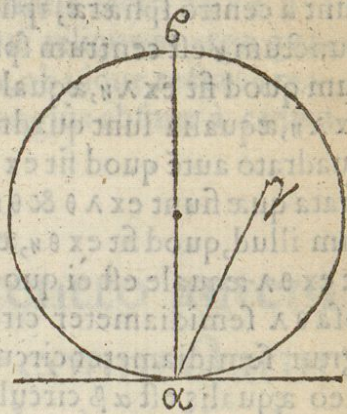


THEOREMA 5.

Si sphæra planum tangat quod ipsam non secet, à contactu autem excitetur recta linea

nea ad angulos rectos ipsi plano, in linea excitata erit centrum sphaeræ.

Sphaera enim, planum aliquod à quo non secatur, tangat in puncto α , & à puncto α , excutetur recta linea $\alpha\beta$ ad angulos rectos ipsi plano. Dico centrum sphaeræ esse in linea $\alpha\beta$: Si enim centrum sphaeræ non sit in $\alpha\beta$, esto (si fieri possit) in puncto γ . & connectatur recta $\gamma\alpha$. Quia ergo sphaera, planum à quo non secatur, tangit in puncto α , à centro autem sphaeræ ad contactum connexa est recta linea $\gamma\alpha$, igitur $\gamma\alpha$ est ad angulos rectos ipsi plano (per 4 theorema). Est verò etiam $\beta\alpha$ ad angulos rectos ipsi plano (per hypothesim): Ergo ab eodem puncto α , duæ rectæ lineæ excitatæ sunt $\alpha\beta$ & $\alpha\gamma$ ad angulos rectos eidem subiecto plano, quod fieri non potest (per 13. vndecimi Elementorum.) Igitur punctum γ non est centrum sphaeræ. Eodem modo ostendemus nullum punctum positum extra lineam $\beta\alpha$, esse centrum sphaeræ. Quare centrum sphaeræ est in lineæ $\beta\alpha$.

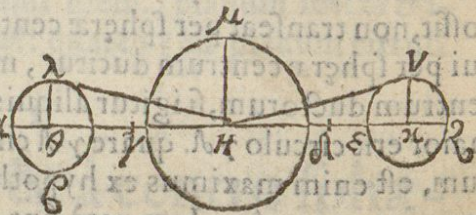


THEOREMA. 6.

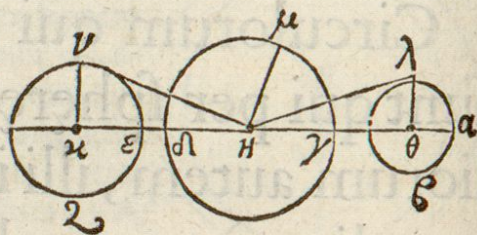
Circulorum qui in sphaera sunt, maximi sunt qui per sphaeræ centrum ducuntur: aliorum autem, illi inter se æquales sunt, qui equaliter à centro distant: qui verò longius à centro distant, minores sunt.

Sint in sphaera circuli $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, & $\epsilon\zeta$. & circulus quidem $\gamma\delta$, ducatur per centrum sphaeræ: circuli autem duo $\alpha\beta$ & $\epsilon\zeta$, primum quidem æqualiter à centro distant. Dico circulum $\gamma\delta$ esse maximum: circulos autem $\alpha\beta$ & $\epsilon\zeta$ esse inter se æquales: Sumatur enim sphaeræ centrum (per 2. theor.) punctum η nempe: ergo centrum illud, est etiam centrum circuli $\gamma\delta$ (per primum corollarium primi theorematis.) Ducantur à puncto η , ad plana circulorum $\alpha\beta$, $\epsilon\zeta$, perpendiculares $\eta\theta$ & $\eta\kappa$, quæ committantur planis ipsorum circulorum in punctis θ & κ . puncta igitur θ & κ sunt centra circulorum $\alpha\beta$, $\epsilon\zeta$ (per secundum corollarium primi theorem.)

Producantur à punctis θ , η , κ , ad circumferentias, rectæ lineæ $\theta\lambda$, $\eta\mu$, $\kappa\nu$, & connectantur rectæ $\eta\lambda$ & $\eta\nu$: Et quia linea $\eta\theta$, erecta est ad planum ipsius $\alpha\beta$ circuli, ergo ad omnes lineas ipsam $\eta\theta$ tangentes, & iacentes in plano ipsius $\alpha\beta$ circuli, rectos angulos facit (per 2. def. vndecimi Elem.) ipsam autem tangit recta $\theta\lambda$, posita in plano circuli $\alpha\beta$, angulus igitur $\lambda\theta\eta$ rectus est. Eodem modo ostendemus rectum esse angulum $\eta\kappa\nu$. Cum itaque rectus sit angulus $\eta\theta\lambda$, ergo angulus $\lambda\eta\theta$ minor est recto: maior ergo est angulus $\lambda\theta\eta$ angulo $\lambda\eta\theta$. Quare latus $\lambda\eta$ maius est latere $\lambda\theta$ (per 19. primi Element.) Est autem recta $\lambda\eta$, æqualis rectæ $\eta\mu$, eò quod pun-



Etum est centrum sphæræ, & ab eo in sphæræ superficiem ductæ sunt lineæ
 rectæ $\lambda \eta$ & $\eta \mu$. Igitur linea $\eta \mu$ est maior quàm linea $\lambda \theta$: est autem linea $\eta \mu$
 semidiameter circuli $\gamma \delta$: linea autem $\lambda \theta$, semidiameter circuli $\alpha \beta$: maior
 igitur est circulus $\gamma \delta$ circulo $\alpha \beta$. Eodem modo ostēdemus circulum $\gamma \delta$, ma-
 iorem esse quolibet alio circulo per sphæræ centrum minimè traiecto. Di-
 co etiam æquales inter se esse circulos $\alpha \beta$, & $\epsilon \zeta$. Quia enim æqualiter ab-
 sunt à centro sphæræ, ipsi $\alpha \beta$, & $\epsilon \zeta$ circuli: æqualis igitur est $\eta \theta$ ipsi $\eta \kappa$: & quia
 punctum η est centrum sphæræ, æqualis est linea $\eta \lambda$ ipsi $\eta \nu$. Quare, quadra-
 tum quod fit ex $\lambda \eta$, æquale est quadrato quod fit ex $\eta \nu$. Sed quadrato quod fit
 ex $\lambda \eta$, æqualia sunt quadrata quæ fiunt ex $\lambda \theta$ & $\theta \eta$ (per 47. primi Element.)
 quadrato autē quod fit ex $\eta \nu$ æqualia sunt quadrata ex $\eta \kappa$ & $\kappa \nu$: Igitur qua-
 drata quæ fiunt ex $\lambda \theta$ & $\theta \eta$ æqualia sunt quadratis quæ fiunt ex $\eta \kappa$ & $\kappa \nu$: quo-
 rum illud, quod fit ex $\theta \eta$, æquale est ei quod fit ex $\eta \kappa$: reliquum igitur, quod
 fit ex $\lambda \theta$ æquale est ei quod fit ex $\kappa \nu$: Quare æqualis est $\theta \lambda$ ipsi $\kappa \nu$: est autem
 ipsa $\theta \lambda$ semidiameter circuli $\alpha \beta$: linea autem $\kappa \nu$, semidiameter circuli $\epsilon \zeta$.
 Igitur semidiameter circuli $\alpha \beta$, æqualis est semidiametro circuli $\epsilon \zeta$: atque
 ideo æqualis est $\alpha \beta$ circulus, circulo $\epsilon \zeta$. Sed enim circulus $\alpha \beta$ longiùs distet
 à centro sphæræ, quàm circulus $\epsilon \zeta$. Dico circulum $\alpha \beta$ minorem esse circulo
 $\epsilon \zeta$: manente enim eadem constructione, quia circulus $\alpha \beta$ longiùs abest à
 centro sphæræ quàm circulus $\epsilon \zeta$. Igitur recta $\theta \eta$ maior est quàm recta $\eta \kappa$.
 Item quia recta $\eta \lambda$ æqualis est rectæ $\eta \nu$
 (punctum enim η est sphæræ cētrum, pun-
 cta verò λ & ν sunt in sphæræ superficie)
 quadratum ergo quod fit ex $\eta \lambda$, æquale est
 quadrato facto ex $\eta \nu$, id est quadrata quæ
 fiunt ex $\lambda \theta$ & $\theta \eta$, æqualia sunt quadratis
 quæ fiunt ex $\eta \kappa$ & $\kappa \nu$: quorum illud, quod
 fit ex $\theta \eta$ maius est eo, quod fit ex $\eta \kappa$: reli-
 quum igitur quod fit ex $\lambda \theta$, minus est reli-
 quo, quod fit ex $\nu \kappa$: quare recta $\lambda \theta$ minor
 est, quàm recta $\nu \kappa$: sed recta $\theta \lambda$ est semi-
 diameter circuli $\alpha \beta$: recta autem $\nu \kappa$ est semidiameter circuli $\epsilon \zeta$: Circulus
 ergo $\alpha \beta$ minor est circulo $\epsilon \zeta$. Quocirca, circulorum qui in sphæra sunt, hi
 qui per sphæræ centrum traiciuntur, maximi sunt: reliquorum autem æqua-
 les inter se sunt, qui æqualiter distant à centro sphæræ: qui verò longiùs di-
 stant, minores sunt. E diuerso verò ostendemus Circulorum in sphæra de-
 scriptorum, maximos quidem transire per centrum sphæræ: aliorum autem æ-
 quales quidem æqualiter distare à centro, minores verò longiùs abesse à cen-
 tro quàm maiores. Iisdem enim constructis vt in priore figura. sit $\gamma \delta$ circuli
 maximus. Dico $\gamma \delta$ circulum transire per sphæræ centrum. Si enim fieri
 possit, non transeat per sphæræ centrum. Quia ergo monstratum est, circulum
 qui per sphæræ centrum ducitur, maiorem esse quolibet reliquorum non per
 centrum ductorum, si igitur aliquis circulus per sphæræ centrum ducatur, ille
 maior erit circulo $\gamma \delta$. quare $\gamma \delta$ circulus, non erit maximus, quod est absur-
 dum, est enim maximus ex hypothesi. Ergo $\gamma \delta$ circulus maximus, per sphæ-
 ræ centrum transit. Iam verò sint circuli $\alpha \beta$ & $\epsilon \zeta$ inter se æquales: Dico eos
 æqualiter distare à sphæræ centro. Quia enim æquales sunt, igitur $\theta \lambda$ æqualis
 est ipsi $\kappa \nu$ (per conuersam primæ defin. tertij Elem.) Aequalis verò etiam o-
 stensa est $\eta \lambda$ ipsi $\eta \nu$. Quinetiam quadratum quod fit ex $\eta \lambda$ æquale est qua-
 dratis quæ fiunt ex $\lambda \theta$, $\theta \eta$. & quadratum quod fit ex $\eta \nu$, æquale est quadratis
 quæ fiunt ex $\eta \kappa$, $\kappa \nu$. quadratum autem quod fit ex $\lambda \theta$ æquale est quadrato
 quod fit ex $\nu \kappa$. Quare reliquum quod fit ex $\theta \eta$, æquale est reliquo quod fit ex
 $\eta \kappa$, ob id-

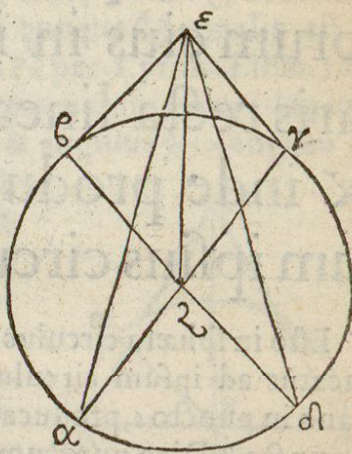


$\eta\kappa$, ob idque $\theta\eta$ æqualis est ipsi $\eta\kappa$. Aequales ergo circuli æqualiter distant à centro sphaeræ. At verò, sit circulus $\alpha\beta$ minor circulo $\epsilon\zeta$. Dico circulum $\alpha\beta$ longius distare à centro sphaeræ quàm circulum $\epsilon\zeta$. Quia enim $\alpha\beta$ minor est quàm $\epsilon\zeta$, igitur semidiameter $\theta\lambda$ minor est semidiametro $\nu\kappa$. Item quia quadratum factum ex $\eta\lambda$ æquale ostensum est quadratis factis ex $\lambda\theta$, $\theta\eta$: quadratum autem quod fit ex $\eta\nu$, æquale ostensum est quadratis factis ex $\nu\kappa$, $\kappa\eta$: duo igitur quadrata facta ex $\lambda\theta$, $\theta\eta$ æqualia sunt quadratis factis ex $\nu\kappa$, $\kappa\eta$: quorū illud quod fit ex $\lambda\theta$ minus est illo quod fit ex $\nu\kappa$. reliquum ergo quadratum factum ex $\theta\eta$, maius est quadrato facto ex $\eta\kappa$, ob idque recta $\theta\eta$ maior est quàm recta $\eta\kappa$. Quocirca minores circuli longius absunt à centro sphaeræ, quàm maiores.

THEOREMA 7.

Si in sphaera sit circulus, à centro autem sphaeræ ad centrum circuli connectatur recta linea, connexa linea ad circuli planum erecta erit.

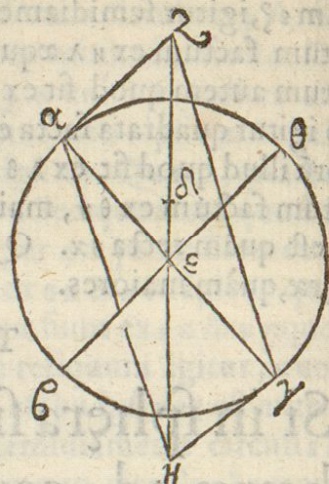
Sit in sphaera circulus $\alpha\beta\gamma\delta$: & centrum quidem sphaeræ sit punctum ϵ : centrum autem circuli sit punctum ζ , & connectatur recta $\epsilon\zeta$. Dico lineam $\epsilon\zeta$ esse erectam ad planum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$: ducantur enim per circuli centrum rectæ lineæ $\alpha\zeta\gamma$, & $\beta\zeta\delta$, & connectantur rectæ $\beta\epsilon$, $\epsilon\delta$. Quia æqualis est recta $\epsilon\zeta$, recta $\zeta\delta$: earum autem vtrique communis est recta $\epsilon\zeta$: dux ergo rectæ $\epsilon\zeta$ & $\zeta\delta$ duabus rectis $\delta\zeta$ & $\zeta\epsilon$ æquales sunt vtrique vtrique, & basis $\beta\epsilon$ basi $\epsilon\delta$ est æqualis, propterea quòd punctum ϵ est centrum sphaeræ in cuius superficie sunt puncta β , δ : igitur angulus $\beta\zeta\epsilon$ æqualis est angulo $\delta\zeta\epsilon$ (per 8. primi Elementorum.) Cùm autem recta linea rectæ lineæ insistent, angulos vtrinque æquales fecerit, rectus est vterque æqualium angulorum (per 10. defin. primi Elem.) rectus igitur est vterque angulorum $\beta\zeta\epsilon$ & $\delta\zeta\epsilon$: Quare recta $\epsilon\zeta$ est ad angulos rectos ipsi $\beta\delta$. Eodem modo connexis lineis $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\gamma$ ostendemus rectam $\epsilon\zeta$ ad angulos rectos esse ipsi $\alpha\gamma$. Cùm ergo recta $\epsilon\zeta$ ducta ad intersectionem duarum linearum $\alpha\gamma$ & $\beta\delta$ se mutuo secantium, illis ad rectos angulos insistat, igitur erecta etiam erit ad planum traiectum per lineas $\alpha\gamma$ & $\beta\delta$ (per 4. vndecimi Elem.) planum autem traiectum per lineas $\alpha\gamma$ & $\beta\delta$, est circulus $\alpha\beta\gamma\delta$: quare $\epsilon\zeta$ ad planum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, erecta est.



THEOREMA 8.

Si sit in sphaera circulus & à centro sphaeræ ad circulum ducatur perpendicularis, quæ ad vtranque partem producat, cadet in polos ipsius circuli.

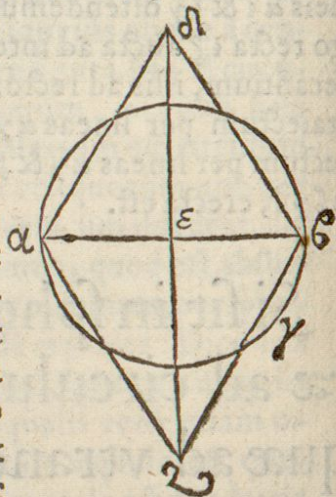
Sit in sphaera circulus $\alpha\epsilon\gamma$, sumaturque punctum δ quod sit centrum sphaerae (per 2. theor.) & a puncto δ ad planum ipsius $\alpha\epsilon\gamma$ circuli ducatur perpendicularis $\delta\epsilon$, quae committatur plano circuli in puncto ϵ (per 11. vndecimi Elem.) igitur punctum ϵ est centrum circuli $\alpha\epsilon\gamma$ (per corollarium. 1. theor.) producat utrinque ipsa $\delta\epsilon$, & committatur superficiei sphaericae in punctis ζ & η . Dico puncta ζ & η esse polos circuli $\alpha\epsilon\gamma$: ducantur enim dimetientes $\alpha\epsilon\gamma$, $\epsilon\theta$, connectanturque rectae $\alpha\zeta$, $\zeta\gamma$, $\alpha\eta$, $\eta\gamma$: Et quia linea $\zeta\epsilon$ est erecta ad $\alpha\epsilon\gamma$ circulum: igitur angulos rectos facit ad omnes lineas ipsam tangentes & iacentes in plano circuli $\alpha\epsilon\gamma$ (per 2. def. vndecimi Element.) Quare rectus est quilibet angulorum $\zeta\epsilon\alpha$, $\zeta\epsilon\gamma$, $\zeta\epsilon\theta$ & $\zeta\epsilon\eta$. Item, quia $\alpha\epsilon$ aequalis est ipsi $\epsilon\gamma$: communis autem & ad angulos rectos utrique, ipsarum linea $\epsilon\zeta$: basis igitur $\alpha\zeta$ aequalis est basi $\gamma\zeta$ (per 4. primi Elem.) Eodem modo ostendamus omnes lineas ductas a puncto ζ , ad ipsam $\alpha\epsilon\gamma$ circumferentiam, aequales inter se esse. Igitur punctum ζ est polus circuli $\alpha\epsilon\gamma$ (per 5. defin. Eodem modo ostendamus punctum η esse polum eiusdem circuli $\alpha\epsilon\gamma$: puncta igitur ζ & η sunt poli ipsius $\alpha\epsilon\gamma$ circuli. Quare, si in sphaera sit circulus, a centro autem sphaerae &c.



THEOREMA. 9.

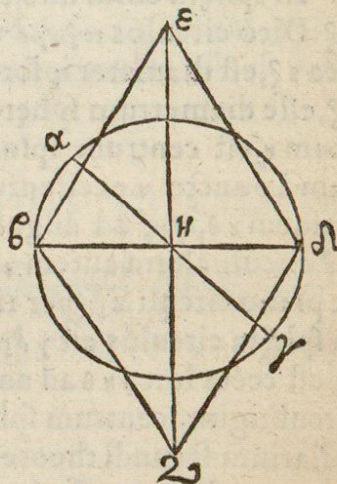
Si sit in sphaera circulus, & ab altero polorum eius in ipsum ducatur perpendicularis recta linea, cadet in circuli centrum, & inde producta, cadet in reliquum polum ipsius circuli.

Esto in sphaera circulus $\alpha\epsilon\gamma$: ab altero autem polorum ipsius, qui sit δ , ducatur ad ipsum circulum perpendicularis $\delta\epsilon$, quae committatur circuli plano in puncto ϵ , producat utrinque ipsa $\delta\epsilon$, & committatur superficiei sphaericae in puncto ζ . Dico punctum quidem ϵ centrum esse circuli $\alpha\epsilon\gamma$: punctum autem ζ esse reliquum polum eiusdem circuli. A puncto enim ϵ ducantur rectae $\epsilon\alpha$ & $\epsilon\gamma$, connectanturque rectae $\alpha\delta$, $\delta\zeta$, $\alpha\epsilon$, $\epsilon\zeta$: Et quoniam recta $\delta\epsilon$ est erecta ad $\alpha\epsilon\gamma$ circulum: igitur angulos rectos facit ad omnes lineas ipsam tangentes & iacentes in plano circuli $\alpha\epsilon\gamma$ (per 2. defin. vndecimi Element.) ipsam autem tangunt rectae $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\gamma$. quarum utraque iacet in plano circuli $\alpha\epsilon\gamma$. Quare rectus est uterque angulorum $\delta\epsilon\alpha$ & $\delta\epsilon\gamma$. Item quia recta $\alpha\delta$, aequalis est rectae $\delta\zeta$, quadrato autem quod fit ex $\alpha\delta$, aequalia sunt quadrata quae fiunt ex $\delta\epsilon$ & $\epsilon\alpha$: quadrato vero quod fit ex $\delta\zeta$, aequalia sunt quadrata quae fiunt ex $\zeta\epsilon$ & $\epsilon\delta$ (per 47. primi Elem.): commune auferatur quadratum quod fit ex $\epsilon\delta$: reliquum ergo quod fit ex $\alpha\epsilon$, aequale est reliquo quod fit ex $\epsilon\gamma$. Quare recta $\alpha\epsilon$ aequalis est rectae $\epsilon\gamma$. Eodem modo ostende-



THEOREMA. 10.

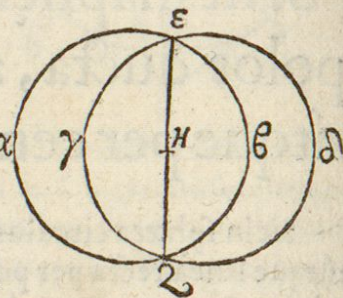
Sit in sphaera circulus $\alpha\beta\gamma\delta$: poli autem eius sint puncta ϵ & ζ : connectaturque linea recta per polos ducta, quæ sit $\epsilon\zeta$. Dico lineam $\epsilon\zeta$, erectam esse ad circulum $\alpha\beta\gamma\delta$, & transire per centrum ipsius circuli, & per centrum sphaeræ. Eadem enim linea $\epsilon\zeta$ committatur plano ipsius $\alpha\beta\gamma\delta$ circuli, in puncto η : & per punctum η , ducantur rectæ $\alpha\eta\gamma$, $\epsilon\eta\delta$, connectanturque rectæ $\beta\epsilon$, $\epsilon\delta$, $\beta\zeta$, $\zeta\delta$. Et quia recta $\beta\epsilon$ æqualis est rectæ $\epsilon\delta$: earum autem utriusque communis est recta $\epsilon\zeta$: dux igitur rectæ lineæ $\beta\epsilon$ & $\epsilon\zeta$, duabus rectis $\zeta\epsilon$ & $\epsilon\delta$ sunt æquales utraque utrique: basis quoque $\epsilon\zeta$ æqualis est basi $\zeta\delta$: quocirca angulus $\beta\epsilon\zeta$, æqualis est angulo $\delta\epsilon\zeta$ (per 8. primi Elem.) Rursum, quia recta $\beta\epsilon$, æqualis est rectæ $\epsilon\delta$: communis autem est $\epsilon\eta$: dux igitur rectæ $\beta\epsilon$ & $\epsilon\eta$, duabus rectis $\epsilon\eta$, $\epsilon\delta$ sunt æquales. & angulus $\beta\epsilon\eta$ angulo $\delta\epsilon\eta$ ostensus est æqualis: basis igitur $\beta\eta$, æqualis est basi $\eta\delta$, & $\epsilon\beta\eta$ triangulus æqualis triangulo $\epsilon\delta\eta$, & reliqui anguli reliquis angulis sunt æquales quibus æqualia latera subtenduntur (per 4. primi Element.) Quare æqualis est angulus $\beta\eta\epsilon$, angulo, $\delta\eta\epsilon$. Rectus ergo est uterque ipsorum $\beta\eta\epsilon$, $\delta\eta\epsilon$ angulorum: ob idque recta $\epsilon\eta$ ad angulos rectos est ipsi $\beta\delta$: eodémque modo ostendetur linea $\epsilon\eta$, ad angulos rectos esse ipsi $\alpha\gamma$. quapropter linea $\epsilon\eta$, erecta est ad planum traiectum per lineas $\beta\delta$ & $\alpha\gamma$, id est ad planum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ (per 4. vndecimi Elem.) Igitur recta $\epsilon\zeta$ ad circulum $\alpha\beta\gamma\delta$ erecta est. Aio præterea eadem rectam lineam $\epsilon\zeta$, transire per centrum ipsius circuli & per centrum sphaeræ. Quoniam enim in sphaera est circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, ab alterutro autem polorum eiusdem circuli ad ipsum ducta est perpendicularis $\epsilon\eta$, quæ plano committitur in puncto η : ergo punctum η est centrum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ (per 9. theor.) Aio item eandem lineam $\epsilon\zeta$ transire per centrum sphaeræ. Quia enim in sphaera circulus est $\alpha\beta\gamma\delta$, & ab eiusdem circuli centro, quod est η , excitata est recta linea $\epsilon\eta\zeta$ ad angulos rectos plano circuli: igitur centrum sphaeræ est in linea $\epsilon\eta\zeta$ (per corollarium secundi theorem.) Igitur linea $\epsilon\zeta$ transit per centrum sphaeræ. Quare recta $\epsilon\zeta$, erecta est ad $\alpha\beta\gamma\delta$ circulum, & per circuli sphaeræque centrum transit.



THEOREMA. 11.

In sphæra, maximi circuli se mutuò secant bifariam.

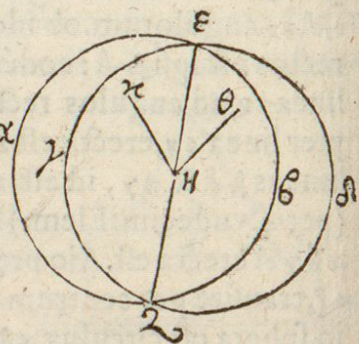
In sphæra enim, duo maximi circuli $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, se mutuò secant in punctis ϵ & z . Dico circulos $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$ se mutuò bifariam secare: Sumatur enim ipsorum centrum, quod sit η : est autem η sphære etiam centrum, (per conuersionem sexti theor.) & connectantur rectæ $\epsilon\eta$, ηz . Quia puncta ϵ , η , z , sunt in plano circuli $\alpha\beta$: sunt autem etiam in plano circuli $\gamma\delta$: igitur eadem puncta ϵ , η , & z , sunt in planis amborum circularum $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$: ob idque eadem puncta ϵ , η , & z sunt in communi sectione planorum, amborum circularum. Duorum autem planorum communis sectio, necessariò est recta linea (per 3. vndecimi Element.) Igitur linea $\epsilon\eta z$, recta est: Et quia punctum η est centrum circuli $\alpha\beta$: Ergo ϵz est eius dimetiens: Quare vtrúmque segmentum, $\epsilon\alpha z$ nempe, & $\epsilon\beta z$, est semicirculus. Item quia punctum η , centrum est ipsius $\gamma\delta$ circuli: Ergo recta ϵz est eius dimetiens: Quare vtrúmque segmentum, $\epsilon\gamma z$ nempe, & $\epsilon\delta z$ est semicirculus: atque idcirco circuli $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$ se bifariam secant mutuò.



THEOREMA. 12.

In sphæra circuli qui se mutuò bifariam secant, sunt maximi.

In sphæra enim duo circuli $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, se mutuò secant bifariam in punctis ϵ , z . Dico circulos $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ esse maximos: connectatur enim ϵz : Igitur recta linea ϵz , est diameter ipsorum $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. circularum. Aio etiam eandem lineam ϵz , esse diametrum sphære: secetur enim ϵz bifariam in puncto η . Igitur punctum η , est centrum ipsorum $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ circularum. Iam à puncto η excirentur due rectæ lineæ, altera quidem $\eta\theta$, quæ ad angulos rectos sit plano ipsius $\gamma\delta$ circuli: altera autem $\eta\kappa$, quæ ad angulos rectos sit plano circuli $\alpha\beta$ (per 12. vndecimi Elem.) Et quia in sphæra circulus est $\gamma\delta$, & ab eius centro η , excitata est recta linea $\eta\theta$ ad angulos rectos plano ipsius circuli: igitur centrum sphære est in linea $\eta\theta$ (per corollarium secundi theorem.) similiter ostendemus centrum sphære, esse in linea $\eta\kappa$: igitur centrum sphære est in communi sectione ipsarum $\eta\theta$ & $\eta\kappa$: est autem earum communis sectio in puncto η . Quare punctum η est centrum sphære: idem autem punctum η est etiam centrum ipsorum $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, circularum: circuli autem qui habent idem centrum cū sphæra, sunt maximi (per 6. theorema) Ergo circuli in sphæra, qui se mutuò bifariam secant, sunt maximi.

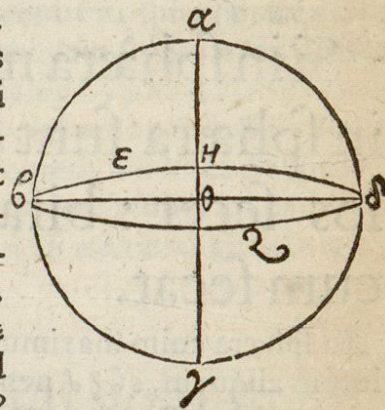


THEOREMA. 13.

Si in sphæra maximus circulus circulum quempiam

quempiam ad rectos angulos secet, & bifariam eum secat & per polos.

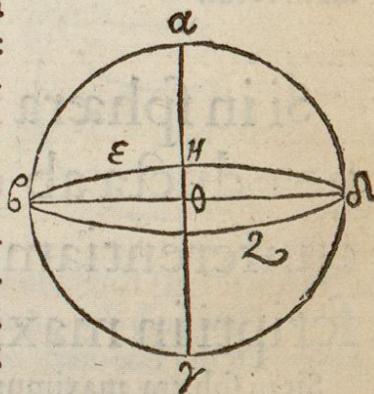
Sit enim in sphaera maximus circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, qui eorum qui in sphaera sunt circulorum aliquem ad angulos rectos secet, circulum $\epsilon\beta\zeta\delta$ nempe. Dico circulum $\alpha\beta\gamma\delta$, bifariam & per polos secare circulum $\epsilon\beta\zeta\delta$: connectatur enim ipsorum communis sectio $\beta\delta$, sumaturque centrum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, quod sit punctum μ : (Est verò punctum μ , etiam sphaerae centrum (per conuersam 6. theor.) Ducatur perpendicularis $\mu\theta$ à puncto μ , in rectam $\epsilon\delta$, & producatut vtrinque, committaturque superficiei sphaerae in punctis α & γ : Et quoniam duo plana se ad angulos rectos interfecant, planum nempe circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, & planum circuli $\epsilon\beta\zeta\delta$, quorum communi sectioni (quæ est $\beta\delta$) ad angulos rectos ducta est recta $\theta\alpha$, posita in altero planorum, nempe in plano $\alpha\beta\gamma\delta$: igitur linea $\alpha\gamma$, ad normam est ipsi $\epsilon\beta\zeta\delta$ plano. Quia ergo in sphaera circulus est $\epsilon\beta\zeta\delta$, à centro autem sphaerae in ipsum circulum perpendicularis ducta est $\mu\theta$, quæ applicat ad planum circuli $\epsilon\beta\zeta\delta$, in puncto θ : Igitur punctum θ est centrum ipsius $\epsilon\beta\zeta\delta$ circuli (per secundum corollarium primi theoremat) Igitur vtrumque segmentum $\epsilon\delta$ videlicet, & $\beta\zeta$, est semicirculus. Quare circulus $\alpha\beta\gamma\delta$ secat bifariam circulum $\epsilon\beta\zeta\delta$. Imò verò etiam per polos eum secat, quod ita affirmo. Quia enim in sphaera est circulus $\epsilon\beta\zeta\delta$, à centro autem sphaerae in ipsum circulum perpendicularis ducta est $\mu\theta$, quæ producta in vtramque partem committitur superficiei sphaerae in punctis α, γ . Si autem in sphaera sit circulus, ad quem à centro sphaerae ducta sit perpendicularis, & eadem perpendicularis in vtramque partem producatut, cadet in polos ipsius circuli (per 8. theorema) Puncta igitur α & γ sunt poli ipsius $\epsilon\beta\zeta\delta$ circuli. Quare circulus $\alpha\beta\gamma\delta$ secat circulum $\epsilon\beta\zeta\delta$ per polos: sed & bifariam eum secat: Igitur circulus $\alpha\beta\gamma\delta$ secat bifariam & per polos circulum $\epsilon\beta\zeta\delta$.



THEOREMA 14.

Si in sphaera maximus circulus circulum non maximum bifariam secet, ad angulos rectos eum secat, & per polos.

In sphaera enim maximus circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, secet bifariam circulum aliquem eorum qui in sphaera sunt, non maximum, $\epsilon\beta\zeta\delta$, videlicet. Dico fore ut eum secet ad angulos rectos, & per polos: Connectatur enim ipsorum circulorum communis sectio $\beta\delta$: Et quia circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, bifariam secat circulum $\epsilon\beta\zeta\delta$: igitur vtrumque segmentum, $\beta\delta$ nempe & $\beta\zeta$, est semicirculus: Quare $\beta\delta$, est diameter circuli $\epsilon\beta\zeta\delta$: Secetur ergo bifariam ipsa $\beta\delta$ in puncto θ : igitur punctum θ est centrum circuli $\epsilon\beta\zeta\delta$. Sumatur punctum μ , quod sit centrum ipsius $\alpha\beta\gamma\delta$ maximi circuli: erit ergo etiam centrum sphaerae, (per conuersionem sexti theorem.) & connexa $\mu\theta$ producatut vtrinque, &

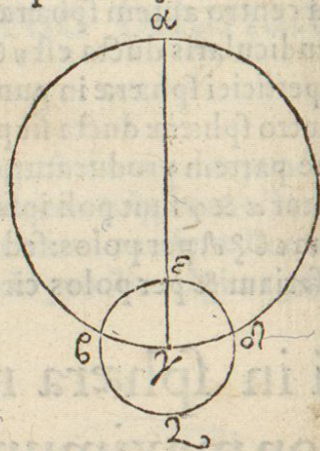


committatur superficiei sphære in punctis α & γ : & quia in sphæra circulus est $\epsilon \beta \zeta \delta$, à centro autem sphære deducta est recta linea $\eta \theta$ ad centrum ipsius circuli: Igitur linea $\eta \theta$ erecta est ad $\epsilon \beta \zeta \delta$ circulum (per 7. theorema.) Quare plana omnia traiecta per lineam $\eta \theta$, erecta sunt ad $\epsilon \beta \zeta \delta$ circulum (per 18. vndecimi Element.) Vnum autem planorum traiectionum per $\eta \theta$, est circulus $\alpha \beta \gamma \delta$. Quare circulus $\alpha \beta \gamma \delta$ erectus est ad circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$: ob idque circulus $\alpha \beta \gamma \delta$ secat ad angulos rectos circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$. Dico præterea fore, ut eum per polos secet: Quia enim in sphæra circulus est $\epsilon \beta \zeta \delta$, ad quem à centro sphære ducta est perpendicularis $\eta \theta$, quæ producta utrinque committitur superficiei sphære in punctis α & γ : Puncta igitur α & γ sunt poli circuli $\epsilon \beta \zeta \delta$ (per octauum theorema.) ideoque circulus $\alpha \beta \gamma \delta$, per polos secat circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$: sed & ad angulos rectos eum secat. Quare circulus $\alpha \beta \gamma \delta$, secat & ad angulos rectos & per polos circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$.

THEOREMA 15.

Si in sphæra maximus circulus, eorum qui in sphæra sunt circulorum aliquem per polos secet: bifariam & ad angulos rectos eum secat.

In sphæra enim maximus circulus $\alpha \beta \gamma \delta$, eorum qui in sphæra sunt circulorum aliquem, $\epsilon \beta \zeta \delta$ nempe per polos secet: Dico fore ut eum bifariam & ad angulos rectos secet. Sinto enim puncta α , γ poli ipsius $\epsilon \beta \zeta \delta$ circuli: certum est puncta α , γ , esse in circulo $\alpha \beta \gamma \delta$, eò quòd circulus $\alpha \beta \gamma \delta$ secat per polos circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$. connectatur recta $\alpha \gamma$: Quia ergo in sphæra est circulus $\epsilon \beta \zeta \delta$, perque eius polos ducitur recta $\alpha \gamma$: Si autem sit in sphæra circulus, recta linea per circuli polos ducta, ad circuli planum erecta est, transitque per centrum ipsius circuli & per centrum sphære (per 10. theorema) Igitur recta $\alpha \gamma$, erecta est ad circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$: ob idque omnia plana traiecta per lineam $\alpha \gamma$, erecta sunt ad circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$ (per 18. vndecimi Element.) Est autem circulus $\alpha \beta \gamma \delta$ vnum planorum traiectionum per lineam $\alpha \gamma$: igitur circulus $\alpha \beta \gamma \delta$ erectus est ad circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$. Quare $\alpha \beta \gamma \delta$ circulus ad normam secat circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$: sed & bifariam eum secat: Igitur $\alpha \beta \gamma \delta$ circulus, per polos secans circulum $\epsilon \beta \zeta \delta$, eum & bifariam & ad normam secat.

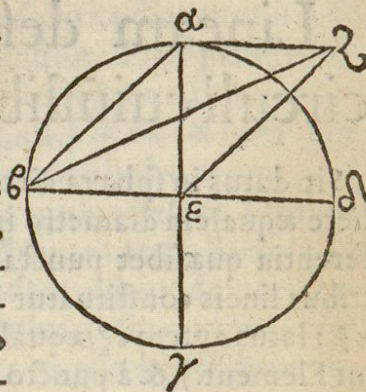


THEOREMA 16.

Si in sphæra sit maximus circulus, recta linea ducta ab eiusdem circuli polo ad circumferentiam, equalis est lateri quadrati inscripti in maximo circulo.

Sit in sphæra maximus circulus $\alpha \beta \gamma \delta$. Dico lineam rectam ductam ab eius polo ad eiusdem circumferentiam, æqualem esse lateri illius quadrati

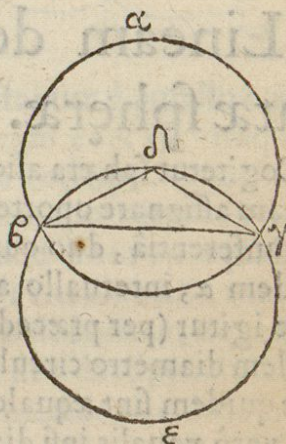
quod inscribi potest maximo circulo $\alpha\beta\gamma\delta$: Ducantur enim ipsius $\alpha\beta\gamma\delta$ duæ diametri $\alpha\gamma$ & $\beta\delta$, se ad angulos rectos secantes: & à puncto ϵ , excitetur recta $\epsilon\zeta$ quæ sit ad normam plano circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ (per 12. vndecimi Element.) committaturque superficiei sphaericæ in puncto ζ . Igitur punctum ζ est polus circuli $\alpha\beta\gamma\delta$. Connectantur rectæ $\beta\alpha$, $\alpha\zeta$: igitur $\epsilon\alpha$ est latus quadrati inscripti in circulo $\alpha\beta\gamma\delta$. recta autem $\alpha\zeta$, est linea ducta à polo circuli ad eiusdem circumferentiam: Affero ergo lineam $\zeta\alpha$ æqualem esse lineæ $\epsilon\alpha$. Quia enim $\zeta\epsilon$ est ad normam ipsi circulo $\alpha\beta\gamma\delta$: ergo ad normam etiam erit omnibus lineis ipsam tangentibus, & iacentibus in plano circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ (per 2. defin. vndecimi Elementorum:) Quare $\zeta\epsilon$ est ad normam singulis ipsarum $\alpha\epsilon$, $\epsilon\delta$, & quia punctum ϵ est centrum sphaeræ: æqualis ergo est $\epsilon\epsilon$ ipsi $\zeta\epsilon$: communis autem est $\epsilon\alpha$: Duæ igitur $\epsilon\epsilon$ & $\epsilon\alpha$, duabus $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\zeta$ sunt æquales vtraque vtrique, & rectus angulus $\epsilon\epsilon\alpha$ æqualis est recto angulo $\alpha\epsilon\zeta$: Quare basis $\epsilon\alpha$, æqualis est basi $\alpha\zeta$: est verò $\alpha\zeta$ ducta à polo circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ ad eiusdem circumferentiam: recta autem $\epsilon\alpha$ latus est quadrati inscripti maximo circulo. Igitur linea ducta à polo circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, ad eiusdem circumferentiam, æqualis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti.



THEOREMA 17.

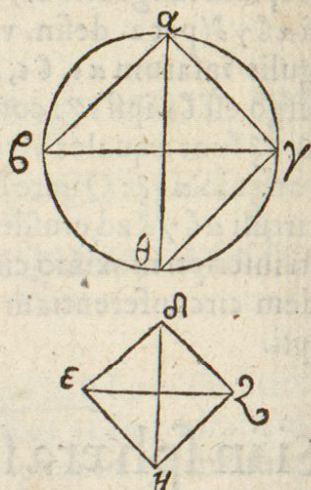
Si in sphaera sit circulus à cuius polo in ipsius circumferentiam ducta recta linea, æqualis sit lateri quadrati inscripti maximo circulo: ipse circulus maximus erit.

Est in sphaera circulus $\alpha\beta\gamma$, cuius polus sit punctum δ : linea autem à polo in ipsius circumferentiam ducta sit $\delta\gamma$, æqualis lateri quadrati inscripti maximo circulo. Dico circulum $\alpha\beta\gamma$ esse maximum. Extendatur aliquod planum per lineam $\delta\gamma$ & per centrum sphaeræ: Illud igitur planum sphaeram secans, faciet in sphaerica superficie circulum (per primū theorema) qui circulus maximus erit, eò quod per centrum sphaeræ transibit. Faciat (inquam) circulum $\delta\alpha\gamma\epsilon$, sitque ipsorum circulorum communis sectio $\delta\gamma$, connectaturque recta $\delta\epsilon$: igitur $\delta\gamma$ æqualis est ipsi $\delta\epsilon$: vtraque igitur ipsarum $\delta\gamma$ & $\delta\epsilon$ æqualis est lateri quadrati inscripti in maximo circulo. igitur segmentū $\delta\alpha\gamma$, est semicirculus. Quare recta $\delta\gamma$ est diameter circuli $\delta\alpha\gamma\epsilon$: Et quia δ punctum, polus est circuli $\alpha\beta\gamma$: igitur circulus $\delta\beta\epsilon\gamma$ per polos secat circulum $\alpha\beta\gamma$: Et quia in sphaera circulus $\delta\beta\epsilon\gamma$ circulum $\alpha\beta\gamma$ per polos secat: Ergo bifariam & ad angulos rectos eum secat (per 15. theor.) ipsorum autem communis sectio est $\beta\gamma$: igitur $\beta\gamma$ est diameter circuli $\alpha\beta\gamma$: est autem etiam sphaeræ diameter, cum sit diameter circuli $\delta\alpha\gamma\epsilon$ per sphaeræ centrum traiecti: igitur circulus $\alpha\beta\gamma$ maximus est.



Lineam describere æqualem diametro circuli cuiuslibet in sphaera dati.

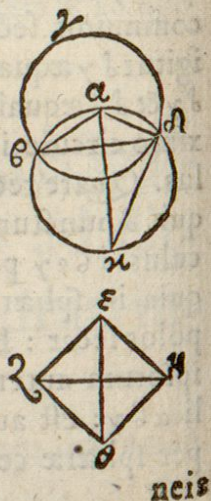
Sit datus in sphaera circulus $\alpha\beta\gamma$. Propositum est lineam rectam describere æqualem diametro ipsius $\alpha\beta\gamma$ circuli: Sumantur ergo in circuli circumferentia quælibet puncta α, β & γ , connectanturque rectæ $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$: & è tribus lineis constituatur triangulus $\delta\epsilon\zeta$, qui habeat latus $\delta\epsilon$ æquale lateri $\alpha\beta$: latus autem $\epsilon\zeta$, æquale lateri $\beta\gamma$, & latus $\zeta\delta$ æquale lateri $\alpha\gamma$ (per 22. primi Element.) & à puncto ϵ , ducatur $\epsilon\eta$ ad angulos rectos ipsi $\epsilon\delta$: à puncto autem ζ , ducatur $\zeta\eta$ ad angulos rectos ipsi $\zeta\delta$ (per 11. primi Elementorum) connectaturque recta $\delta\eta$: ducatur verò $\alpha\theta$, quæ sit diameter circuli $\alpha\beta\gamma$. Dico lineam $\delta\eta$ æqualem esse lineæ $\alpha\theta$: nectatur enim recta $\gamma\theta$: quia ergo duæ lineæ $\alpha\beta$ & $\beta\gamma$ æquales sunt duabus $\delta\epsilon$ & $\epsilon\zeta$, utraque utrique: basis item $\alpha\gamma$ æqualis est basi $\delta\zeta$: igitur angulus $\alpha\beta\gamma$, æqualis est angulo $\delta\epsilon\zeta$ (per 8. primi Element.) sed angulus $\alpha\beta\gamma$ æqualis est angulo $\alpha\theta\gamma$ (per 21. tertij Element.) angulus autem $\delta\epsilon\zeta$ æqualis est angulo $\delta\eta\zeta$: Si enim super diametro $\delta\eta$ describeretur circulus, transiret per puncta ϵ & ζ , eò quòd uterque ipsorum $\delta\epsilon\eta$ & $\delta\zeta\eta$ angulorum, rectus est: ideòque anguli $\delta\epsilon\zeta$ & $\delta\eta\zeta$ essent in eodem segmento, & ideò æquales (per 21. tertij Element.) angulus igitur $\alpha\theta\gamma$ æqualis est angulo $\delta\eta\zeta$: rectus autem angulus $\alpha\gamma\theta$ æqualis est recto angulo $\delta\zeta\eta$. Quare duo sunt trianguia $\alpha\theta\gamma$ & $\delta\eta\zeta$ habentia duos angulos $\alpha\gamma\theta$ & $\gamma\theta\alpha$ æquales duobus angulis $\delta\zeta\eta$ & $\zeta\eta\delta$ utrunque utrique, unumque latus uni lateri æquale sub vno æqualium angulorum subtensum, nempe latus $\alpha\gamma$ lateri $\delta\zeta$: ideòque reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt utrumque utrique (per 26. primi Elem.). Igitur lineæ $\alpha\theta$, æqualis est lineæ $\delta\eta$: sed $\alpha\theta$ est diameter circuli: igitur $\delta\eta$ est æqualis diametro circuli.



THEOREMA 19.

Lineam describere æqualem diametro datæ sphaeræ.

Cogitetur sphaera aliqua, cuius diametro æqualem rectam lineam assignare oporteat: sumanturque in eiusdem sphaeræ circumferentiâ, duo quælibet puncta, α nempe & β , & polo quidem α , intervallo autem $\alpha\beta$ describatur circulus $\beta\gamma\delta$. licet igitur (per præcedens theorema) designare lineam æqualem diametro circuli $\beta\gamma\delta$: ex tribus ergo rectis, quarum duæ quidem sint æquales ei quæ ex polo circuli $\beta\gamma\delta$, reliqua verò æqualis ipsi diametro, fiat triangulus $\epsilon\zeta\eta$, cuius utrumque latus $\zeta\epsilon, \epsilon\eta$, sit æquale utrique earum, quæ ex α polo circuli, ad eiusdem circumferentiam ductæ sunt: linea autem $\zeta\eta$ sit æqualis diametro: & à punctis ζ & η ducantur rectæ lineæ $\zeta\theta$ & $\eta\theta$, quæ angulos rectos faciant cum rectis li-



neis ϵ & η : (per 11. primi Elem.) connectatur denique recta $\epsilon\theta$. Dico rectam $\epsilon\theta$ æqualem esse diametro sphæræ: intelligatur enim sphæræ diameter $\alpha\kappa$, & per eandem diametrum cogitemus traici aliquod planum: Ergo planum illud secans sphæram, in sphærica superficie circulum faciet (per 1. theorema:) faciat (inquam) circulum $\alpha\delta\beta$, & necetatur rectæ $\alpha\delta$, $\alpha\beta$, $\beta\delta$, $\delta\kappa$: & quia duæ rectæ $\alpha\beta$, $\beta\delta$ duabus $\epsilon\zeta$, $\zeta\eta$ sunt æquales vtrique vtrique: basis autem, $\alpha\delta$ æqualis est basi $\epsilon\eta$: igitur angulus $\alpha\beta\delta$ æqualis est angulo $\epsilon\zeta\eta$ (per 4. primi Element.) sed angulus $\alpha\beta\delta$ æqualis est angulo $\alpha\kappa\delta$ (per 21. tertij Element.) angulus autem $\epsilon\zeta\eta$ æqualis est angulo $\epsilon\theta\eta$, vt ostensum est in demonstratione præcedentis theoremat: quinetiam $\alpha\delta\kappa$ angulus rectus, æqualis est recto angulo $\epsilon\eta\theta$: Duo itaque sunt triângula $\alpha\delta\kappa$ & $\epsilon\theta\eta$, quæ habet duos angulos $\alpha\delta\kappa$ & $\delta\kappa\alpha$, æquales duobus angulis $\epsilon\eta\theta$ & $\eta\theta\epsilon$, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod vni æqualium angulorum subtenditur, latus nempe $\alpha\delta$ lateri $\epsilon\eta$. reliqua igitur latera, reliquis lateribus æqualia habebunt, vtrumque vtrique (per 26. primi Element.) Igitur latus $\alpha\kappa$ æquale est lateri $\epsilon\theta$: sed latus $\alpha\kappa$ est diameter sphæræ: igitur linea recta $\epsilon\theta$ æqualis est diametro sphæræ.

THEOREMA 20.

Per duo puncta data in sphærica superficie, maximum circulum describere.

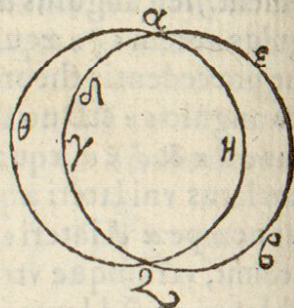
Sint data duo puncta α & β , quæ in sphæræ superficie sint: operæ pretium est per puncta α & β describere maximum circulum: Si ergo duo illa puncta, α , nempe β , sint opposita in sphæræ diametro, certum est infinitos maximums circulos duci posse per puncta α & β . Quod si puncta α & β non sint in sphæræ diametro, polo quidem ϵ , interuallo autem tanto, quantum est latus quadrati in maximo circulo inscripti, describatur circulus $\gamma\delta\epsilon$: Igitur circulus $\gamma\delta\epsilon$ maximus est (per 17. theorema:) linea enim quæ ex eius polo deducitur, æqualis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti (ex hypothesi:) Rursus polo quidẽ β , interuallo autem tanto, quantum est latus quadrati in maximo circulo inscripti, describatur circulus $\zeta\epsilon\eta$. Maximus ergo est $\zeta\epsilon\eta$ circulus: linea enim, quæ ex eius polo deducitur, æqualis est lateri quadrati inscripti in maximo circulo. Iam connectantur à puncto ϵ ad puncta α & β , rectæ lineæ $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$: duarum igitur linearum $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\beta$ vtrique sigillatim æqualis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti. Quocirca æqualis est $\epsilon\alpha$ ipsi $\epsilon\beta$: & ob hanc causam, si polo ϵ , interuallo autem $\epsilon\beta$ describatur circulus, transibit per punctum α : propterea quod linea $\epsilon\alpha$ æqualis est lineæ $\epsilon\beta$: transeat ergo, sitque ille circulus $\alpha\beta\theta$. Igitur circulus $\alpha\beta\theta$ maximus est (per 17. theorema.) linea enim quæ ex eius polo deducitur, æqualis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti. Ergo per duo data puncta α & β , quæ sunt in superficie sphærica, descriptus est $\alpha\beta\theta$ maximus circulus.

THEOREMA 21.

Cuiuslibet circuli in sphæra dati polum inuenire.

Sit datus in sphæra circulus $\alpha\beta\gamma$, cuius polum inuenire oporteat: Suma-

tur ergo unum aliquod punctum in eiusdem circuli circumferentia, quod sit Δ . & de eadem circumferentia sumantur duæ portiones æquales, $\Delta \alpha$ & $\alpha \epsilon$: reliqua verò circumferentiæ portio, quæ est $\Delta \zeta$, bifariam secetur in puncto γ (per 30. tertij Element.) Circulus igitur $\alpha \beta \gamma$, aut maximus est, aut non. primum ponamus ipsum $\alpha \beta \gamma$ circulum, non esse maximum: & per duo data puncta, γ nempe & α , quæ in sphærica superficie sunt, describatur maximus circulus $\gamma \alpha \theta$ (per præcedens theorema.) Quoniam ergo circumferentia $\Delta \alpha$ æqualis est circumferentiæ $\alpha \epsilon$: est verò etiam $\Delta \zeta$ circumferentia æqualis circumferentiæ $\zeta \epsilon$: tota igitur $\alpha \Delta \zeta$ æqualis est toti $\alpha \epsilon \zeta$. Quare circulus $\gamma \alpha \theta$ bifariam secat circulum $\alpha \beta \gamma$. Quia igitur in sphæra maximus circulus $\alpha \zeta \theta$, aliquem minorum circulorum in sphære superficie descriptorum bifariam secat: ergo eum etiam ad angulos rectos secat & per polos (per 14. theorema.) Quocirca circulus $\gamma \theta \alpha$ secat ad angulos rectos & per polos circulum $\alpha \beta \gamma$. secetur $\gamma \alpha$ circumferentia bifariam in puncto η (per 30. tertij Element.) Igitur punctum η est polus circuli $\alpha \beta \gamma$. Sedenim ponamus nunc circulum $\alpha \beta \gamma$ esse maximum. Eodem sanè modo, quo antea, ostendemus circumferentiâ $\alpha \Delta \zeta$, æqualem esse circumferentiæ $\alpha \epsilon \zeta$: Secetur itaque bifariam circumferentia $\alpha \gamma \zeta$ in puncto γ : utraq; igitur harum duarum circumferentiarum $\alpha \gamma$ nempe & $\gamma \zeta$, sigillatim est quarta circumferentiæ pars. Quamobrem circulus, qui polo quidem γ , intervallo autem $\gamma \zeta$ describetur, transibit per punctum α : punctum enim α puncto ζ , ex diametro opponitur. Sit igitur exempli gratiâ, circulus $\gamma \alpha \theta$, qui transeat per punctum α . Circulus ergo $\gamma \alpha \theta$ est maximus (per 17. theorema) propterea quod ea quæ ex eius polo, æqualis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti. Cum itaque punctum γ sit polus circuli $\gamma \alpha \theta$: igitur circulus $\alpha \beta \gamma$ circulum $\gamma \alpha \theta$ secat per polos: Et quia in sphæra maximus circulus $\alpha \beta \gamma$ circulum quendam $\gamma \alpha \theta$ in sphærica superficie descriptum secat per polos: igitur eum & bifariam & ad angulos rectos secat (per 15. theorema.) Quare circulus $\alpha \beta \gamma$ rectus est ad $\gamma \alpha \theta$ circulum: eademque ratione circulus $\gamma \alpha \theta$ rectus ad $\alpha \beta \gamma$ circulum. Quia ergo in sphæra maximus circulus $\gamma \alpha \theta$, ipsum $\alpha \beta \gamma$ circulum in sphærica superficie descriptum, ad angulos rectos secat: igitur eum & bifariam secat & per polos (per 13. theorema.) Quare circulus $\gamma \alpha \theta$ ipsum $\alpha \beta \gamma$ circulum & bifariam & per polos secat: secetur ergo bifariam circumferentia $\gamma \alpha$ in puncto η : Igitur punctum η polus est circuli $\alpha \beta \gamma$.



THEOREMA 22.

Si in sphæra recta linea per centrum ducta rectam aliquâ lineam non per centrum ductâ bifariam secet, ad angulos rectos ipsam secabit: quod si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque ipsam secabit.

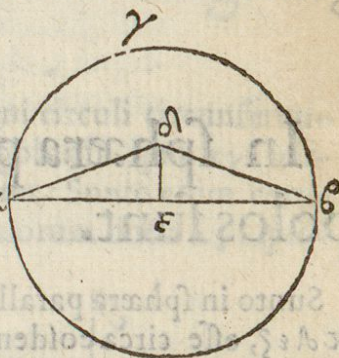
Demonstratio quæ valet in circularibus, hîc etiam valebit: Si enim duo plana educantur, alterum quidem per eam lineam quæ per sphære centrum traicitur,

traicitur, alterum verò per lineam alteram, quæ per centrum ducta non est, ea duo plena se mutuo secantia, sectiones facient rectam lineam & circulum: Eueniet ergo, ut in circulo recta quædam linea per centrum ducta rectam aliquam non per centrum ductam bifariam secet: ob idque ad angulos rectos ipsam secabit (per 3. tertij Elementorum.) Quod si ad angulos rectos ipsam secet, bifariam quoque eam secabit (per eandem 3. Element.)

THEOREMA. 23.

Si in sphaera sit circulus: à centro autem sphaeræ ad centrum circuli ducatur recta linea, ea erit perpendicularis ad planum circuli.

Sit enim in sphaera circulus $\alpha\beta\gamma$, cuius centrum sit punctum ϵ , centrum autem sphaeræ sit Δ , à quo ad ϵ ducatur recta linea $\delta\epsilon$. Dico rectam lineam $\delta\epsilon$, erectam esse ad planum ipsius $\alpha\beta\gamma$ circuli. Ducatur enim quomodolibet recta aliqua linea $\alpha\epsilon\beta$ in circulo $\alpha\beta\gamma$, quæ per ipsius centrum (quod est ϵ) transeat, connectanturque rectæ $\delta\alpha$ & $\delta\beta$. Quia itaque recta $\alpha\epsilon$ æqualis est ipsi $\epsilon\beta$: communis autem est $\epsilon\delta$: duæ ergo rectæ $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\delta$ duabus rectis $\beta\epsilon$ & $\epsilon\delta$ sunt æquales utraque utrique: basis quoque $\alpha\delta$ æqualis est basi $\delta\beta$: angulus igitur $\alpha\epsilon\delta$, æqualis est angulo $\Delta\epsilon\beta$: Igitur ambo hi anguli $\alpha\epsilon\delta$, & $\beta\epsilon\Delta$ recti sunt. Quare recta $\delta\epsilon$ ad angulos rectos est ipsi $\alpha\beta$. Eodem modo monstrabimus lineam rectam $\delta\epsilon$, angulos rectos facere cum lineis omnibus ductis per punctum ϵ , in plano ipsius $\alpha\beta\gamma$ circuli. Quocirca $\Delta\epsilon$ recta linea angulos rectos facit ad planum ipsius $\alpha\beta\gamma$ circuli.



FINIS PRIMI LIBRI
Sphaericorum.

C



THEODOSII LI- BER SECVNDVS.

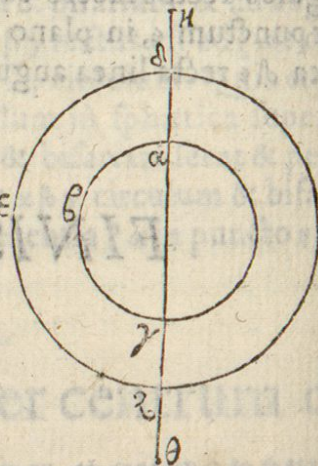
DEFINITIO.

In sphæra circuli se mutuò tangere dicuntur, cùm communis sectio planorum, utrunque circulum attraherit.

THEOREMA A. 1.

In sphæra paralleli circuli circa eosdem polos sunt.

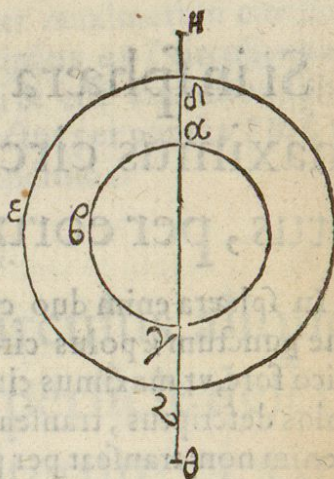
Sunto in sphæra paralleli circuli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$. Dico eos duos circulos $\alpha\beta\gamma$ & $\delta\epsilon\zeta$, esse circa eosdem polos: Sumantur enim poli ipsius $\alpha\beta\gamma$ circuli, sintque η & θ , (per 21. primi sphæricorum.) & connectatur recta linea $\eta\theta$. Quia ergo si sit in sphæra circulus, linea recta per circuli polos ducta, ad ipsum erecta est, transitque per centrū ipsius & sphære (per 10. primi:) Igitur linea $\eta\theta$, erecta est ad $\alpha\beta\gamma$ circulū: atqui circulus $\alpha\beta\gamma$ parallelus est ipsi $\delta\epsilon\zeta$ circulo: linea igitur $\eta\theta$ erecta est ad $\delta\epsilon\zeta$ circulum (per conuersam. 14. vndecimi Elemen.) Et quia in sphæra circulus est $\delta\epsilon\zeta$, ad quem à centrō sphære ducta est perpendicularis $\eta\theta$, quæ vtrinque producta occurrit superficiei sphæricæ in punctis η & θ : Si autem sit in sphæra circulus & à sphære centro ad ipsum circulum perpendicularis ducatur & vtrinque producat, cadet tandem in polos circuli (per 9. theorema primi:) puncta igitur η & θ sunt poli ipsius $\delta\epsilon\zeta$ circuli: ob eamque causam ambo circuli $\alpha\beta\gamma$ & $\delta\epsilon\zeta$ sunt circa eosdem polos.



THEOREMA. 2.

In sphæra, circuli qui sunt circa eosdem polos, sunt paralleli.

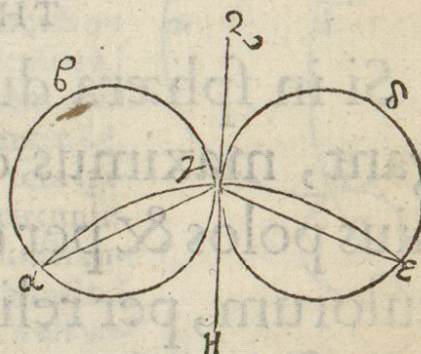
Sint in sphaera circuli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, circa eosdē polos η & θ . Dico ipsos $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, circulos esse parallelos. Cōnectatur enim recta linea $\eta\theta$: & quia in sphaera circulus est $\alpha\beta\gamma$, per cuius polos ducta est linea recta $\eta\theta$: igitur recta $\eta\theta$ erecta est ad $\alpha\beta\gamma$ circulum (per. 10 primi.) Eodem modo ostendemus eam erectam esse ad ipsum $\delta\epsilon\zeta$ circulum: Plana autem ad quæ recta eadem linea erecta est, nunquam concurrent, etiam si in infinitum producantur (per 14. vndecimi Elem.) Igitur si plana ipsorum $\alpha\beta\gamma$ & $\delta\epsilon\zeta$ circulorum in infinitum producantur, nunquam concurrent. Quocirca circulus $\alpha\beta\gamma$ parallelus est ipsi $\delta\epsilon\zeta$ circulo.



THEOREMA. 3.

Si in sphaera duo circuli secant in eodem puncto circumferentiam illius maximi circuli in quo polos habent, se mutuò tangent illi circuli.

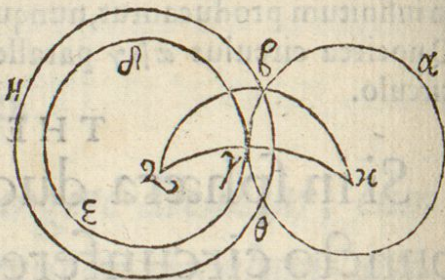
In sphaera enim duo circuli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\delta\epsilon$ secant magni circuli circumferentiam $\alpha\gamma\epsilon$ in eodem puncto, quod sit γ , habeantque polos in ipso $\alpha\gamma\epsilon$ circulo. Dico fore ut circuli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\delta\epsilon$ sese mutuò tangent: Sunt enim communes sectiones, ipsorum quidem $\alpha\gamma\epsilon$ & $\alpha\beta\gamma$ circulorum linea $\alpha\gamma$: ipsorum autem $\alpha\gamma\epsilon$ & $\gamma\delta\epsilon$, linea $\gamma\epsilon$: ipsorum denique $\alpha\beta\gamma$ & $\gamma\delta\epsilon$, linea $\eta\gamma\zeta$. Et quia in sphaera maximus circulus $\alpha\gamma\epsilon$ descriptum quendam in sphaerica superficie circulum $\alpha\beta\gamma$ videlicet, per polos secat, ipsum ergo & bifariam secat & ad angulos rectos (per 15. theorema primi.) Quocirca $\alpha\gamma$ est diameter circuli $\alpha\beta\gamma$. Eodem modo ostendemus rectam lineam $\gamma\epsilon$ esse diametrum circuli $\gamma\delta\epsilon$. Et quia circulus $\alpha\gamma\epsilon$ rectus est ad utrumque ipsorum $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\delta\epsilon$ circulorum, ob eamque causam eorum vterque rectus est ad ipsum $\alpha\gamma\epsilon$ circulum, igitur communis ipsorum sectio erecta est ad $\alpha\gamma\epsilon$ circulum (per 19. vndecimi Elementorum.) Atqui communis ipsorum sectio est $\zeta\gamma\eta$: ipsa igitur $\zeta\gamma\eta$ erecta est ad $\alpha\gamma\epsilon$ circulum, & ideo erecta est etiam ad omnes lineas ipsam tangentes & positas in plano ipsius $\alpha\gamma\epsilon$ circuli (per 2. defin. vndecimi Elem.) eam autem tangunt ipsæ $\alpha\gamma$ & $\gamma\epsilon$, posite in plano ipsius $\alpha\gamma\epsilon$ circuli. Quapropter $\zeta\eta$ erecta est ad utramque ipsarum $\alpha\gamma$ & $\gamma\epsilon$. Quia itaque recta $\zeta\eta$ ducta est ad angulos rectos ad extremitatem ipsius $\alpha\gamma$, quæ est diameter circuli $\alpha\beta\gamma$: igitur recta linea $\zeta\eta$ tangit circulum $\alpha\beta\gamma$ in puncto γ (per 16. tertij Elem.) Simili modo ostendetur linea $\zeta\eta$ tangere circulum $\gamma\delta\epsilon$ in puncto γ . Atqui in sphaera circuli se mutuò tangere dicuntur cum communis planorum sectio utrumque circulorum attigerit (per definitionem:) Recta autem $\zeta\eta$ tangit utrumque circulum in puncto γ : circuli ergo $\alpha\beta\gamma$ & $\gamma\delta\epsilon$ se mutuò tangunt.



THEOREMA 4.

Si in sphæra duo circuli se mutuò tangāt, maximus circulus per eorum polos descriptus, per eorum contactum transibit.

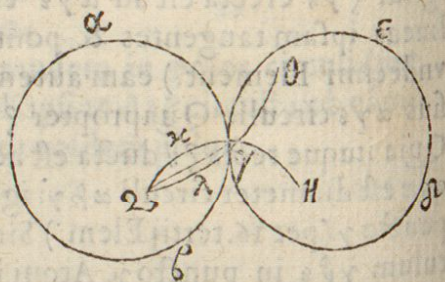
In sphæra enim duo circuli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\delta\epsilon$ se mutuò tangant in puncto γ , sit que punctum κ polus circuli $\alpha\beta\gamma$: punctum autem ζ sit polus circuli $\gamma\delta\epsilon$. Dico fore, ut maximus circulus per ζ & κ polos descriptus, transeat per punctum γ : si enim non transeat per punctum γ , transeat (si fieri possit) per aliud punctum, sitque ille circulus $\zeta\beta\kappa$: Et polo quidē ζ , in teruallo autē $\zeta\beta$ describatur circulus $\beta\eta\theta$: Igitur circulus $\zeta\delta\epsilon$ parallelus est circulo $\beta\eta\theta$, cum sint ambo circa eosdem polos (per 2. theorema huius libri.) Et quia in sphæra duo circuli $\alpha\beta\zeta$ & $\epsilon\eta\theta$ secant in eodem puncto ϵ nempe, circumferentiam maximi circuli $\zeta\beta\kappa$, in quo polos habent: igitur circuli $\alpha\beta\gamma$ & $\epsilon\eta\theta$ se mutuò tangant (per 3. theorema huius libri.) Atqui se etiam mutuò secant, quod est absurdum (per 3. definitionem tertij Element.) fieri ergo non potest quin maximus circulus descriptus per ζ & κ polos, transeat etiam per punctum γ . Quare maximus circulus descriptus per polos ipsorum $\alpha\beta\zeta$ & $\gamma\delta\epsilon$ circulo- rum, transibit etiam per eorum contactum.



THEOREMA 5.

Si in sphæra duo circuli se mutuò tangant, maximus circulus descriptus per vnius polos & per contactum amborum circulo- rum, per reliqui quoque circuli polos transibit.

In sphæra enim duo circuli $\alpha\beta\zeta$ & $\gamma\delta\epsilon$ tangant se mutuò in puncto ζ . Sit autem punctum ζ polus circuli $\alpha\beta\gamma$: punctum autem η polus circuli $\gamma\delta\epsilon$. Dico maximum circulum descriptum per puncta ζ & η , transire etiam per punctum γ : Si enim non transeat per punctum γ , transeat per aliud aliquod punctum, perinde atque circulus $\zeta\gamma\theta$: & per polos ζ & η describatur maximus circulus $\zeta\eta$ (per 20. primi Sphæricorum.) igitur circulus $\zeta\eta$ transibit per punctum γ (per præcedens theorema.) Connectatur recta linea $\zeta\eta$. Quia ambo circuli $\zeta\gamma\eta$ & $\zeta\gamma\theta$ sunt maximi: se igitur mutuò secant bifariam (per

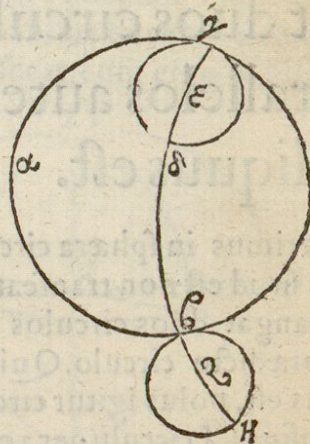


xi. primi sphæric.) Semicirculi ergo sunt $\gamma\iota$ & $\lambda\iota$, ob eamque causam recta linea $\gamma\iota$ est diameter sphæaræ, cum sit diameter maximorum circularum $\gamma\iota$ & $\lambda\theta$: Sed recta linea $\gamma\iota$ procedit ex polo ipsius $\alpha\beta\iota$ circuli, quod est absurdum: non enim potest esse ex polo circuli & esse dimetiens sphæaræ: Fieri ergo non potest quin maximus circulus ductus per puncta γ & ι , transeat etiam per punctum η : transibit igitur per punctum η .

THEOREMA 6.

Si in sphæra maximus circulus aliquem circularum in sphærica superficie descriptorum tangat, tanget & alterum ei æqualem & parallelum.

In sphæra enim maximus circulus $\alpha\beta\iota$ tangat circulum $\gamma\delta$, in puncto γ . Dico fore, ut circulus $\alpha\beta\gamma$ tangat alterum æqualem & parallelum ipsi $\gamma\delta$ circulo: Sumatur enim ipsius $\gamma\delta$ circuli polus, qui sit ϵ punctum (per 21. theorem. primi Sphæric.) & per puncta γ , ϵ describatur maximus circulus $\gamma\epsilon\delta$ (per 20. primi Sphæric.) sumaturque circumferentia $\beta\gamma$ æqualis circumferentiæ $\gamma\epsilon$: & polo γ , interuallo autem $\gamma\beta$, describatur circulus $\beta\eta$. Quia ergo in sphæra duo circuli $\alpha\beta\iota$ & $\gamma\delta$ se mutuò tangunt, maximus autem circulus $\gamma\epsilon\delta\beta\eta$ ductus est per eorum contactum & per polum alterius eorum duorum circularum, nempe per ϵ : igitur circulus $\gamma\epsilon\delta\beta\eta$ transiit per polos circuli $\alpha\beta\gamma$ (per præcedens theorema.) Item quia in sphæra duo circuli $\alpha\beta\gamma$ & $\beta\eta$ secant in vno puncto (quod est β) circumferentiam maximi circuli $\gamma\epsilon\delta\beta\eta$, in quo polos habent: igitur circuli $\alpha\beta\iota$ & $\beta\eta$ se mutuò tangunt (per 3. huius.) Item, quia circumferentia $\gamma\epsilon$ æqualis est circumferentiæ $\beta\gamma$, communis addatur circumferentia $\epsilon\beta$, tota igitur $\gamma\beta$ æqualis est toti $\epsilon\gamma$: Sed $\gamma\beta$ est circumferentia semicirculi: ergo etiam $\epsilon\gamma$ est circumferentia semicirculi. Quocirca punctum ϵ , puncto γ opponitur ex diametro. Atqui punctum ϵ est polus circuli $\gamma\delta$: ergo punctum γ est alter polus eiusdem $\gamma\delta$ circuli. Item, quia $\epsilon\gamma$ est circumferentia semicirculi: punctum autem γ est polus circuli $\beta\eta$: igitur punctum ϵ est alter polus ipsius $\beta\eta$ circuli. Quocirca duo hi circuli $\gamma\delta$ nempe & $\beta\eta$ cum sint circa eosdem polos, paralleli sunt (per 2. theorema huius libri) parallelus ergo est circulus $\gamma\delta$, ipsi $\beta\eta$ circulo. & quia $\gamma\epsilon$ æqualis est ipsi $\beta\gamma$: igitur circulus $\gamma\delta$ æqualis est circulo $\beta\eta$ (per 1. definition. tertij Element.) Atqui eidem etiam parallelus est: Circulus igitur $\alpha\beta\iota$ tangit circulum $\gamma\delta$ & alterum circulum ($\beta\eta$ nempe) æqualem & parallelum ipsi $\gamma\delta$ circulo.

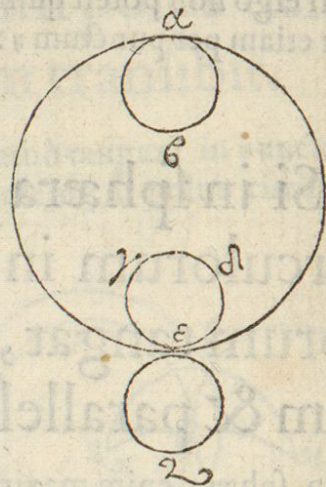


THEOREMA 7.

Si sint in sphæra duo æquales & paralleli circuli, maximus circulus, qui eorum al-

terum attigerit, reliquum quoque tanget.

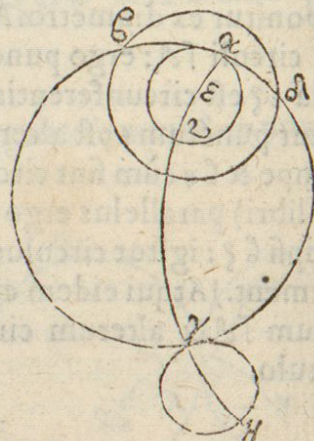
Sunto in sphaera duo circuli æquales & paralleli, $\alpha\beta$ & $\Gamma\Delta$. Dico fore, ut maximus circulus, qui tanget circulum $\alpha\beta$, tangat quoque circulum $\gamma\delta$. Alioqui maximus circulus $\alpha\epsilon$ tangat (si fieri possit) circulum $\alpha\beta$, in puncto α , circulum autem $\Gamma\Delta$ non tangat. Quia ergo in sphaera maximus circulus $\alpha\epsilon$, tangit aliquem in sphaera circulum $\alpha\beta$ uidelicet, tanget igitur & alterum circulum eidem $\alpha\beta$ circulo æqualem & parallelum (per præcedens theorema.) tangat ergo circulum $\epsilon\zeta$. Quoniam $\alpha\beta$ æqualis & parallelus est ipsi $\epsilon\zeta$: ipse verò etiam circulus $\alpha\beta$ æqualis & parallelus est circulo $\gamma\delta$: igitur $\Gamma\Delta$ circulus, ipsi $\epsilon\zeta$ circulo æqualis & parallelus est. Quocirca fieri poterit ut in sphaera sint tres circuli æquales & paralleli, quod fieri non potest. Fieri ergo non potest, quin maximus circulus tangens circulum $\alpha\beta$, tangat quoque circulum $\Gamma\Delta$. tanget igitur.



THEOREMA. 8.

Si in sphaera maximus circulus ad aliquem sphaeræ circulum obliquus sit, tanget duos circulos æquales quidem inter se, parallelos autem prædicto circulo ad quem obliquus est.

Maximus in sphaera circulus $\alpha\beta\Gamma$, ad $\beta\delta$ circulum eiusdem sphaeræ, obliquus sit, id est non transeat per eius polos. Dico fore, ut $\alpha\beta\gamma$ maximus circulus tangat duos circulos æquales quidem inter se, parallelos autem ipsi $\beta\delta$ prædicto circulo. Quia enim $\alpha\beta\Gamma$ circulus ad ipsum $\beta\delta$ circulum obliquus est, polus igitur circuli $\beta\delta$ non est in $\alpha\beta\Gamma$ circulo: Sumatur ergo polus ipsius $\beta\delta$ circuli (per 20. primi sphaeric.) sitque punctum ϵ : per punctum autem ϵ & per unum polorum circuli $\alpha\beta\Gamma$, describatur $\alpha\epsilon\zeta\eta$ maximus circulus (per 20. primi Sphaeric.) & polo ϵ , intervallo autem $\alpha\epsilon$, describatur circulus $\alpha\zeta$. Parallelus ergo est circulus $\alpha\zeta$, circulo $\beta\delta$ (per 2. huius.) Sunt enim ambo circa eosdem polos: Et quia in sphaera duo circuli, $\alpha\beta\Gamma$ nempe & $\alpha\zeta$, secant in vno puncto (quod est α) circumferentiam maximi circuli, in quo polos habent: sese igitur mutuò tangunt. Quare circulus $\alpha\beta\Gamma$ tangit circulum $\alpha\zeta$ (per 3. huius.) Cum ergo in sphaera maximus circulus $\alpha\beta\Gamma$ tangat ipsum $\alpha\zeta$ circulum: tanget igitur alterum quendam circulum æqualem & parallelum circulo $\alpha\zeta$ (per 6 huius:) tangat ergo circulum $\Gamma\eta$. Quia itaque circulus $\alpha\zeta$, æqualis & parallelus est circulo $\Gamma\eta$: idem autem circulus $\alpha\zeta$, parallelus est circulo $\beta\delta$: igitur circulus $\Gamma\eta$, pa-

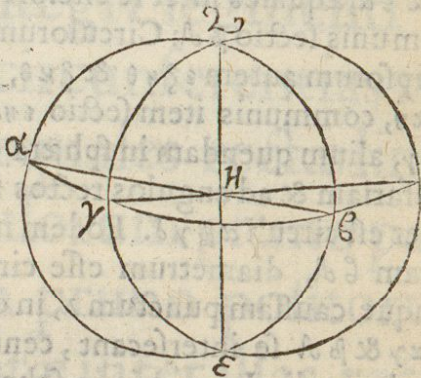


$\Gamma\eta$, parallelus est circulo $\beta\delta$. Quocirca circulus $\alpha\epsilon\zeta$ tangit duos circulos, $\alpha\zeta$ nempe & $\Gamma\eta$, æquales quidem inter se, parallelos autem ipsi $\beta\delta$ circulo.

THEOREMA 9.

Si in sphæra duo circuli se mutuò secant, maximus circulus per eorum polos ductus, secabit bifariam segmenta ipsorum circulorum.

Sint enim in sphæra duo circuli $\gamma\alpha\epsilon\zeta$, $\zeta\delta\epsilon\Gamma$, qui se mutuò secant in pūctis ϵ & ζ : per polos autem eorum describatur maximus circulus $\alpha\Gamma\beta\delta$ (per 20. primi.) Dico fore ut $\alpha\Gamma\beta\delta$ circulus, bifariam secet desumpta segmenta ipsorum circulorum, id est, dico fore ut circumferentia $\gamma\alpha$, æqualis sit circumferentia $\alpha\epsilon$, & circumferentia $\zeta\beta$, circumferentia $\beta\epsilon$ & circumferentia $\zeta\Gamma$, circumferentia $\Gamma\epsilon$: & circumferentia $\zeta\delta$, circumferentia $\delta\epsilon$. Est enim $\alpha\beta$, communis sectio circulorum $\alpha\gamma\beta\delta$ & $\gamma\alpha\epsilon\zeta$: recta autem $\Gamma\delta$, sit communis sectio circulorum $\alpha\Gamma\beta\delta$ & $\zeta\delta\epsilon\Gamma$. connectanturque rectæ lineæ $\gamma\eta$ & $\eta\epsilon$. Et quia puncta ζ , η , ϵ , sunt in plano circuli $\alpha\epsilon\beta\zeta$: sunt verò etiam in plano circuli $\gamma\delta\epsilon\Gamma$: Igitur puncta ζ , η , ϵ , sunt in communi sectione duorum planorum. Atqui duorum planorum communis sectio est linea recta (per 3. vndecimi Element.) Igitur $\gamma\eta$ est in directum ipsi $\eta\epsilon$. Et quia in sphæra maximus circulus $\alpha\Gamma\beta\delta$, alium quendam in sphæra circulum $\gamma\alpha\epsilon\zeta$, per polos secat, eum ergo & bifariam & ad angulos rectos secat (per 15. primi.) Quocirca recta $\alpha\beta$, diameter est circuli $\gamma\alpha\epsilon\beta$. Eodem modo monstrabimus rectam lineam $\Gamma\delta$, esse diametrum circuli $\zeta\delta\epsilon\Gamma$. Quia verò $\alpha\Gamma\epsilon\delta$ circulus, eum utroque ipsorum $\gamma\alpha\epsilon\beta$, $\zeta\delta\epsilon\Gamma$ circulorum angulos rectos facit, ergo uterque ipsorum $\gamma\alpha\epsilon\beta$, $\zeta\delta\epsilon\Gamma$, circulorum, ad ipsum $\alpha\gamma\epsilon\delta$ angulos rectos vicissim facit. Atqui si duo plana plano alicui sint ad angulos rectos, communis quoque ipsorum sectio ad angulos rectos erit eidem plano (per 19. vndecimi Elem.) Igitur communis sectio circulorum $\gamma\alpha\epsilon\beta$ & $\zeta\delta\epsilon\Gamma$, est ad angulos rectos ipsi $\alpha\gamma\epsilon\delta$ plano. Communis autem ipsorum sectio, est recta linea $\gamma\eta\epsilon$. Quare recta linea $\gamma\eta\epsilon$ erecta est ad $\alpha\epsilon\gamma\delta$ circulum: ob eamque causam angulos rectos facit ad omnes rectas lineas ipsam tangentes & iacentes in plano ipsius $\alpha\gamma\epsilon\delta$ circuli (per 2. definitionem vndecimi Element.) utraque autem ipsarum $\alpha\epsilon$ & $\gamma\delta$ in plano circuli $\alpha\gamma\epsilon\delta$ descripta, tangit ipsam $\gamma\eta\epsilon$. Igitur $\gamma\eta\epsilon$, erecta est ad utramque ipsarum $\alpha\epsilon$ & $\gamma\delta$: & vicissim utraque ipsarum $\alpha\epsilon$, $\gamma\delta$, erecta est ad ipsam $\gamma\eta\epsilon$. Quia ergo in circulo $\gamma\alpha\epsilon\zeta$, recta linea $\alpha\epsilon$ per centrum ducta, quandam aliam rectam lineam $\gamma\eta\epsilon$ non per centrum ductam ad angulos rectos secat, igitur eam bifariam quoque secat (per 3. tertij Elem.) Recta ergo $\gamma\eta$, æqualis est rectæ $\eta\epsilon$: ipsis autem communis & ad angulos rectos est ipsa $\eta\alpha$. Quare circumferentia $\gamma\alpha$, æqualis est circumferentia $\alpha\epsilon$. Eodem modo ostendemus circumferentiam $\zeta\beta$, æqualem esse circumferentia $\beta\epsilon$: & circumferentiam $\zeta\gamma$, cir-

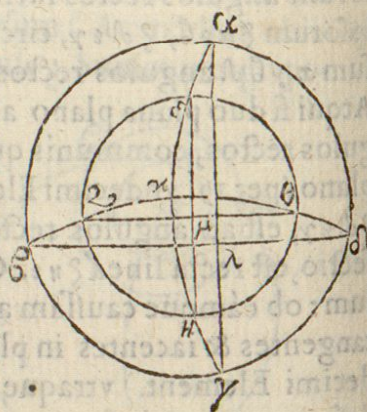


cunferentiæ $\gamma\epsilon$: & circumferentiam $\beta\delta$, circumferentiæ $\delta\epsilon$. Ergo circulus $\alpha\gamma\epsilon\delta$ secat bifariam segmenta ipsorum circularum.

THEOREMA 10.

Si sint in sphæra paralleli circuli, per quorum polos describantur maximi circuli, parallelorum quidem circumferentiæ inter maximos circulos interceptæ, similes sunt: maximorum autem circularum circumferentiæ inter parallelos circulos interceptæ, sunt æquales.

Sunto in sphæra circuli paralleli $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\epsilon\zeta\eta\theta$, per quorum polos describantur maximi circuli $\alpha\epsilon\eta\gamma$, $\beta\zeta\theta\delta$. Dico parallelorum circumferentias comprehensas inter duos maximos circulos, similes esse, id est circumferentiam $\beta\gamma$ similem esse circumferentiæ $\zeta\eta$: & circumferentiam $\gamma\delta$, circumferentiæ $\eta\theta$: & circumferentiam $\delta\alpha$, circumferentiæ $\theta\epsilon$: & ipsam $\alpha\beta$, ipsi $\epsilon\zeta$. Maximorum autem circularum circumferentias comprehensas inter parallelos circulos, inter se æquales esse, id est, quatuor has circumferentias $\beta\gamma$, $\eta\gamma$, $\theta\delta$ & $\epsilon\alpha$, æquales inter se esse. Sit enim duorum circularum $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\beta\zeta\theta\delta$, communis sectio $\beta\delta$: Circularum autem $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\alpha\epsilon\eta\gamma$, communis sectio, $\alpha\gamma$: ipsorum autem $\epsilon\zeta\eta\theta$ & $\zeta\mu\theta$, cōmunis sectio $\zeta\theta$: ipsorum denique $\epsilon\zeta\eta\theta$ & $\epsilon\kappa\eta$, communis item, sectio $\epsilon\eta$. Quia ergo in sphæra maximus circulus $\alpha\epsilon\eta\gamma$, alium quendam in sphæra circulum $\alpha\beta\gamma\delta$, per polos secat : ergo eū & bifariam & ad angulos rectos secat (per 15. primi.) Quare recta $\alpha\gamma$, diameter est circuli $\alpha\beta\gamma\delta$. Eodem modo ostēdemus rectam $\epsilon\delta$, diametrum esse circuli $\alpha\beta\gamma\delta$: ob eāque causam punctum λ , in quo duæ diametri $\alpha\gamma$ & $\beta\delta$ se intersecant, centrum esse ipsius $\alpha\beta\gamma\delta$ circuli. Item quia in sphæra maximus circulus $\alpha\epsilon\eta\gamma$, alium quendam in sphæra circulum $\epsilon\zeta\eta\theta$ per polos secat : bifariam ergo & ad angulos rectos eum secat (per 15. primi.) Quocirca recta linea $\epsilon\eta$, est diameter $\epsilon\zeta\eta\theta$ circuli : Similique modo ostendemus rectam lineam $\zeta\theta$, esse diametrum eiusdem $\epsilon\zeta\eta\theta$ circuli : punctum ergo μ , in quo eiusdem circuli duæ dimetientes sese intersecant, centrum est circuli $\epsilon\zeta\eta\theta$: Cum ergo duo plana parallela $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$ secantur ab vno plano $\beta\zeta\theta\delta$: ipsorum ergo planorum cōmunes sectiones sunt parallelæ (per 16. vndecimi Elementorū.) Quare recta $\beta\delta$, rectæ $\zeta\theta$, parallela est : Eodemque modo ostendemus rectam $\gamma\alpha$, parallelam esse rectæ $\epsilon\eta$. Et quia duæ rectæ lineæ sese tangentes in λ puncto, $\beta\lambda$ nempe & $\lambda\gamma$, parallelæ sunt ad duas alias lineas $\zeta\mu$ & $\mu\eta$, sese tangentes in puncto μ , nec in eodem plano positas : æquales ergo angulos continebunt (per 10. vndecimi Element.) Quare angulus $\zeta\mu\eta$, æqualis est angulo



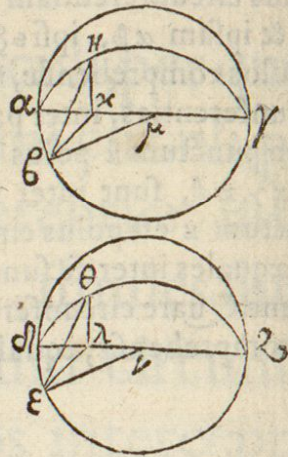
angulo $\beta \lambda \gamma$: sunt autem illi anguli duo $\gamma \mu \eta$ nempe & $\epsilon \lambda \gamma$, in centris ipso-
rum circulorum: & angulus quidem $\gamma \mu \eta$ subtenditur à circumferentia $\gamma \eta$:
angulus autem $\beta \lambda \gamma$, à circumferentia $\epsilon \gamma$: igitur circumferentia $\epsilon \gamma$, similis
est circumferentiæ $\gamma \eta$ (per 10. defin. tertij Element.) Eodem modo monstra-
bimus circumferentiam $\gamma \delta$, similem esse circumferentiæ $\eta \theta$. & ipsam $\alpha \delta$ ipsi
 $\epsilon \theta$: & ipsam $\alpha \beta$, ipsi $\epsilon \gamma$. Igitur circumferentiæ parallelorum inter maximos
circulos comprehensæ, similes sunt. Aio præterea maximorum circulorum
circumferentias, inter parallelos circulos comprehensas, esse æquales. Quia
enim punctum κ polus est circuli $\alpha \epsilon \gamma \delta$: quatuor ergo circumferentiæ $\kappa \alpha$,
 $\kappa \epsilon$, $\kappa \gamma$, $\kappa \delta$, sunt inter se æquales (per 5. defin. primi sphæric.) Item, quia
punctum κ est polus circuli $\epsilon \gamma \eta \theta$, quatuor ergo circumferentiæ $\kappa \epsilon$, $\kappa \gamma$, $\kappa \eta$,
 $\kappa \theta$, æquales inter se sunt: quatuor ergo reliquæ $\epsilon \alpha$, $\gamma \beta$, $\eta \gamma$, $\theta \delta$ æquales inter
se sunt. Quare circumferentiæ maximorum circulorum inter parallelos circu-
los comprehensæ, æquales inter se sunt.

THEOREMA II.

Si in diametris circulorum æqualium æ-
qualia circulorum segmenta ad angulos re-
ctos insistant, à quibus sumantur æquales
circumferentiæ, quarum quælibet incipiens
ab extremitate sui segmenti, sit minor se-
misse circumferentiæ integri segmenti, à
punctis autem æquales circumferentias ter-
minantibus ducantur æquales rectæ lineæ
ad circumferentias circulorum primo posi-
torum: ipsæ circulorum primo positorum
circumferentiæ interceptæ inter illas rectas
lineas & extremitates diametrorum, erunt
æquales.

Sunto æquales circuli $\alpha \beta \gamma$, $\delta \epsilon \zeta$, in quorum diametris $\alpha \gamma$ & $\delta \zeta$, æqua-
lia circulorum segmenta $\alpha \eta \gamma$ & $\delta \theta \zeta$ ad angulos rectos insistant, & ab ipsis
segmentis desumantur æquales circumferentiæ $\alpha \eta$ & $\delta \theta$: incæptæ ab extre-
mitatibus segmentorum, quæ extremitates sunt in punctis α & δ . Sit autem
 $\alpha \eta$, minor quàm semissis totius circumferentiæ $\alpha \eta \gamma$: item $\delta \theta$ sit minor quàm
semissis circumferentiæ $\delta \theta \zeta$: & à punctis æquales circumferentias terminanti-
bus, id est, à punctis η & θ , ad circumferentias primorum circulorum $\alpha \beta \gamma$ &
 $\delta \epsilon \zeta$, ducantur æquales rectæ lineæ $\eta \epsilon$ & $\theta \epsilon$. Dico circumferentiam $\alpha \epsilon$, æ-
qualem esse circumferentiæ $\delta \epsilon$. A punctis enim η & θ , ducantur perpendi-
culares ad plana ipsorum $\alpha \beta \gamma$, $\delta \epsilon \zeta$ circulorum (per 11. yndecimi Element.)

Illæ ergo perpendiculares cadent in communes sectiones, id est, in lineas $\alpha\Gamma$ & $\Delta\theta$ (per 38. vndecimi Element.) cadant ergo, sintque $\eta\kappa$ & $\theta\lambda$: sumantur que ipsorum $\alpha\epsilon\gamma$, $\delta\epsilon\gamma$ circularum centra μ & ν : & connectantur rectæ $\kappa\beta$, $\beta\mu$, $\lambda\epsilon$, $\epsilon\nu$. Quia ergo $\eta\kappa$ recta linea, erecta est ad planum circuli $\alpha\beta\gamma$. facit igitur angulos rectos cum omnibus lineis ipsam tangentibus & iacentibus in plano circuli $\alpha\beta\gamma$ (per 2. defin. vndecimi Elem.) ipsam autem $\eta\kappa$ tangit recta linea $\kappa\beta$, in plano posita ipsius $\alpha\beta\gamma$ circuli: angulus ergo $\eta\kappa\beta$ rectus est. Eodem modo ostendemus angulum $\theta\lambda\epsilon$, rectum esse. Cum itaque duo segmenta $\alpha\eta\gamma$ & $\delta\theta\gamma$ æqualia sint, æqualisque ab ipsis circumferentiæ $\alpha\eta$ & $\delta\theta$ desumptæ sint, & perpendiculares $\eta\kappa$ & $\theta\lambda$ ductæ sint: æqualis ergo est $\alpha\kappa$ ipsi $\delta\lambda$, & $\eta\kappa$ ipsi $\theta\lambda$. Sunt enim duo triangula $\eta\alpha\kappa$ & $\theta\delta\lambda$ (ut in figura sequentis theorematis) quæ habent angulum $\eta\kappa\alpha$ æqualem angulo $\theta\lambda\delta$, (per 4. postulatum) & angulum $\eta\alpha\kappa$ æqualem angulo $\theta\delta\lambda$ (per 27. tertij Elem.) & latus $\alpha\eta$ æquale lateri $\delta\theta$, (per 29. tertij Elem.) Quare reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, latus $\eta\kappa$ videlicet, ipsi $\theta\lambda$, & latus $\kappa\alpha$ ipsi $\lambda\delta$. Et quia $\beta\eta$ æqualis est ipsi $\theta\epsilon$: quadratū ergo quod fit ex $\beta\eta$ æquale est ei quod fit ex $\theta\epsilon$: quadrato autem facto ex $\epsilon\eta$, æquantur duo quadrata quæ fiunt ex $\eta\kappa$ & $\kappa\epsilon$: quadrato verò facto ex $\theta\epsilon$, æquantur duo quadrata facta ex $\theta\lambda$ & $\lambda\epsilon$: Quocirca quadrata quæ fiunt ex $\eta\kappa$ & $\kappa\epsilon$, æqualia sunt quadratis quæ fiunt ex $\theta\lambda$ & $\lambda\epsilon$: quorum illud quod fit ex $\eta\kappa$, æquale est ei quod fit ex $\theta\lambda$: reliquum ergo quod fit ex $\kappa\epsilon$, æquale est reliquo facto ex $\lambda\epsilon$, ob idque æqualis est $\kappa\epsilon$, ipsi $\lambda\epsilon$: Et quia æqualis est $\alpha\mu$ ipsi $\delta\nu$, & recta $\alpha\kappa$ rectæ $\delta\lambda$: Reliqua ergo $\kappa\mu$, reliquæ $\lambda\nu$, æqualis est: Est verò etiā $\beta\mu$, æqualis ipsi $\epsilon\nu$, cum sint ex centro æqualium circularum: Dux igitur rectæ $\kappa\mu$ & $\mu\beta$, duabus rectis $\lambda\nu$ & $\nu\epsilon$, sunt sigillatim æquales, basis quoque $\kappa\beta$ ostēsa est æqualis basi $\lambda\epsilon$: angulus igitur $\kappa\mu\beta$, æqualis est angulo $\lambda\nu\epsilon$ (per. 8. primi Element.) Atqui in circulis æqualibus, æquales anguli ab æqualibus circumferentiis subtenduntur, siue illi anguli in centro sint, siue in circumferentia (per 26. tertij Element.) Igitur circumferentia $\alpha\epsilon$, æqualis est circumferentiæ $\delta\epsilon$.

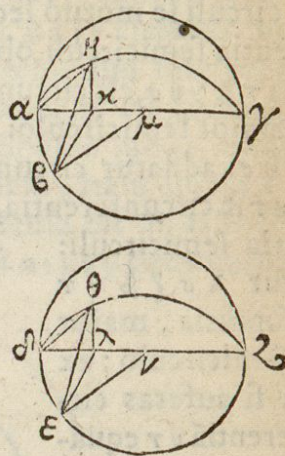


THEOREMA 12.

Si in diametris circulorum æqualium, æqualia segmenta circulorum erigantur, & ab ipsis segmentis æquales circumferentiæ ad extremitates segmentorum desumantur, minores dimidiis ipsorum partibus, ab ipsis autem circulis æquales circumferentiæ sumantur ad easdem partes quæ sunt ad extremitates diametrorum, rectæ lineæ ductæ

à punctis circumferentiæ segmentorum ad puncta circumferentiæ circulorum, erunt æquales.

Sunto duo circuli æquales $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, in quorum diametris $\alpha\gamma$ & $\delta\zeta$ erigantur duo æqualia circularū segmenta, $\alpha\eta\gamma$, $\delta\theta\zeta$, à quorum circumferentiis auferantur æquales portiones $\alpha\eta$ nepe & $\delta\theta$ versus partes α & δ , in quibus sunt extremitates ipsorum $\alpha\eta\gamma$ & $\delta\theta\zeta$ segmentorum: Sint autem $\alpha\eta$ & $\delta\theta$, minores dimidiis partibus circumferentiarum $\alpha\eta\gamma$ & $\delta\theta\zeta$. Porro ab ipsis $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$ circulis, sumantur æquales circumferentiæ ad partes extremitatum diametrorum, sintque circumferentiæ illæ $\alpha\beta$ & $\delta\epsilon$, & connectantur rectæ $\eta\beta$ & $\theta\epsilon$. Dico rectam $\eta\beta$, æqualem esse rectæ $\theta\epsilon$. A punctis enim η & θ , ducantur rectæ lineæ $\eta\kappa$ & $\theta\lambda$, perpendiculares ad plana circulorum $\alpha\beta\gamma$ & $\delta\epsilon\zeta$ (per 11. vndecimi Element.) Cadent ergo in communes sectiones (quæ sunt $\alpha\gamma$ & $\delta\zeta$.) Sumantur itaque ipsorum circularū centra μ & ν , & connectantur rectæ $\kappa\mu$, $\epsilon\mu$, $\lambda\nu$, $\epsilon\nu$. Et quia circumferentia $\alpha\beta$, æqualis est circumferentiæ $\delta\epsilon$ (ex hypothesi.) Igitur angulus $\alpha\mu\epsilon$, æqualis est angulo $\delta\nu\epsilon$ (per 27. tertij Elementorum.) Item, quia duo circulorum segmenta $\alpha\eta\gamma$ & $\delta\theta\zeta$, æqualia inter se sunt, & ablata ab iis circumferentiæ $\alpha\eta$ & $\delta\theta$ æquales sunt, perpendiculares quoque ductæ sunt $\eta\kappa$ & $\theta\lambda$: igitur $\alpha\kappa$ æqualis est ipsi $\delta\lambda$, & $\eta\kappa$ ipsi $\theta\lambda$: Cum ergo $\alpha\mu$ sit æqualis ipsi $\delta\nu$ (per 15. defin. primi Elementorum) & $\alpha\kappa$ ostensa sit æqualis ipsi $\delta\lambda$: reliqua igitur $\kappa\mu$ reliquæ $\lambda\nu$, æqualis est: Est verò etiam $\epsilon\mu$, æqualis rectæ $\nu\epsilon$. Dux igitur $\kappa\mu$ & $\mu\beta$, duabus $\lambda\nu$ & $\nu\epsilon$ sunt sigillatim æquales, & angulus $\kappa\mu\epsilon$, æqualis ostensus est angulo $\lambda\nu\epsilon$: basis ergo $\kappa\beta$, æqualis est basi $\lambda\epsilon$ (per 4. primi Elem.) Et quia $\eta\kappa$ erecta est ad planum circuli $\alpha\beta\gamma$, faciet ergo angulos rectos cum rectis lineis omnibus ipsam tangētibus, & iacentibus in plano circuli $\alpha\beta\gamma$ (per 2. defin. vndecimi Elem.) ipsam verò tangit recta linea $\kappa\epsilon$ posita in plano circuli $\alpha\beta\gamma$. Quare angulus $\eta\kappa\beta$ rectus est. Eodémque modo ostendemus angulum $\theta\lambda\epsilon$ rectum esse. Cum ergo $\eta\kappa$, æqualis sit ipsi $\theta\lambda$, & $\kappa\beta$ ipsi $\lambda\epsilon$: dux igitur $\eta\kappa$ & $\mu\epsilon$, duabus $\theta\lambda$ & $\lambda\epsilon$ sigillatim sunt æquales, comprehenduntque angulos rectos (vt monstratum est.) Quare basis $\eta\epsilon$, basi $\theta\epsilon$ æqualis est (per 4. primi Elementorum.)



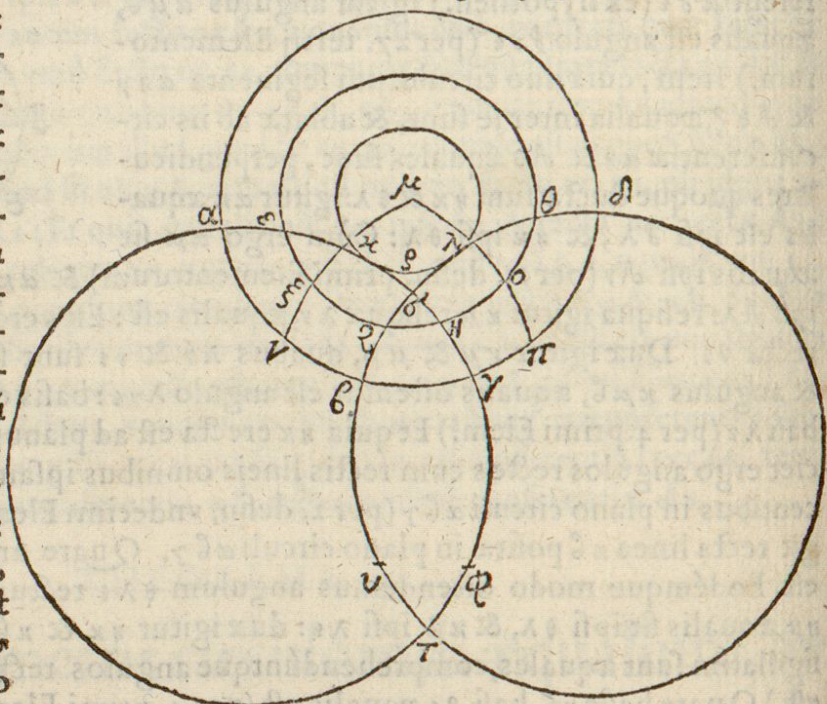
THEOREMA 13.

Si in sphaera sint paralleli circuli, & describantur maximi circuli, qui vnum quidem parallelorum tangant, reliquos verò secant: circumferentiæ parallelorum interceptæ inter eos maximorum circulorum

femicirculos qui non concurrunt, similes erunt: maximorum verò circulorum circumferentiæ inter parallelos interceptæ, erunt æquales.

Sunto in sphaera paralleli circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$, $\kappa\lambda$, & describantur maximi circuli $\alpha\epsilon\kappa\eta\gamma\phi\tau$, & $\beta\zeta\lambda\theta\delta\tau\nu$, qui tangant unum parallelorum, ipsum $\kappa\lambda$ videlicet, in punctis κ & λ : reliquos verò parallelos secant. Dico circumferentias parallelorum circulorum interceptas inter maximorum circulorum semicirculos, qui non concurrunt, similes esse. Quæ verò sint circumferentiæ interceptæ inter semicirculos non concurrentes, aut qui sint semicirculi non concurrentes, intelligemus hoc modo. Quia enim in sphaera maximi circuli se mutuò secant bifariam (per 11. primi) igitur $\sigma\kappa\epsilon\alpha\tau$ est circumferentia semicirculi, ob eamque causam $\kappa\epsilon\alpha\tau$, minor est semicirculo. Item quia $\tau\phi\gamma\eta\sigma$, est circumferentia semicirculi: igitur circumferentia $\kappa\sigma\eta\gamma\phi\tau$, est maior semicirculo: sed circumferentia $\kappa\epsilon\alpha\tau$, minor est semicirculo: igitur si ei addatur circumferentia $\phi\tau$, quæ sit æqualis circumferentiæ $\sigma\kappa$, tota $\kappa\epsilon\alpha\tau\phi$ circumferentia, erit semicirculus. Rursus quia $\sigma\zeta\epsilon\upsilon\tau$ est circumferentia semicirculi:

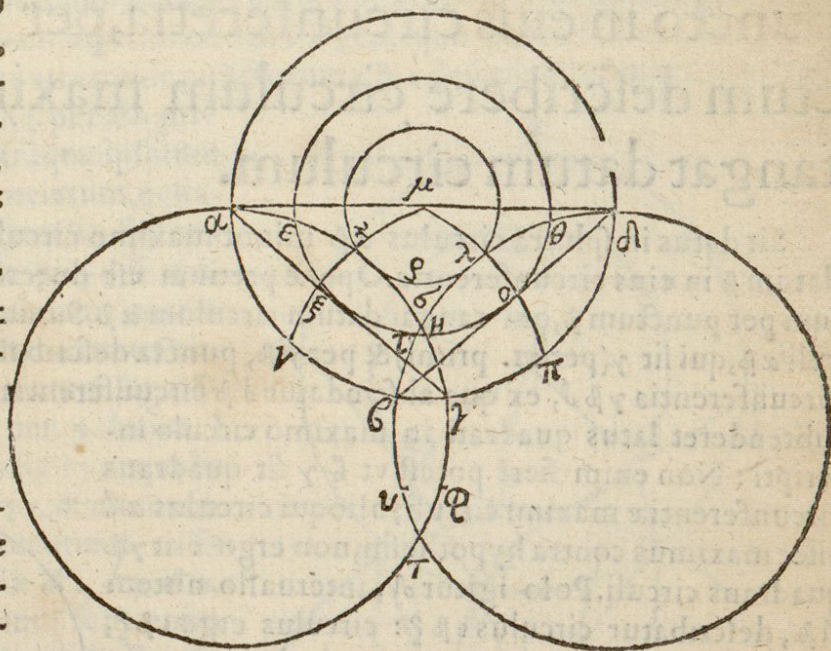
igitur $\lambda\sigma\zeta\beta\upsilon\tau$ circumferentia, maior est semicirculo: ex qua si auferas circumferentiã $\upsilon\tau$ æqualem ipsi $\lambda\sigma$, reliqua $\lambda\sigma\zeta\beta\upsilon$, erit circumferentia semicirculi. Quare semicirculus, cuius initium est in puncto κ , (cuiusmodi est $\kappa\epsilon\alpha\tau\phi$), non concurret cum semicirculo, cuius initium est in λ , id est cum $\lambda\sigma\zeta\beta\upsilon$. Eodem modo



semicirculus $\kappa\sigma\eta\gamma\phi$, non concurret cum semicirculo $\lambda\theta\delta\tau\nu$. Quare parallelorum circumferentiæ inter maximorum circulorum semicirculos non concurrentes, interceptæ, sunt $\kappa\rho\lambda$, $\epsilon\xi\zeta$, $\alpha\nu\beta$, $\eta\theta\theta$, $\gamma\pi\delta$. Dico itaque circumferentias $\kappa\rho\lambda$, $\epsilon\xi\zeta$, $\alpha\nu\beta$, similes inter se esse, circumferentias quoque $\kappa\rho\lambda$, $\eta\theta\theta$, & $\gamma\pi\delta$, similes esse: maximorum autem circulorum circumferentias interceptas inter parallelos circulos, æquales esse, id est quatuor has circumferentias $\epsilon\kappa$, $\kappa\eta$, $\zeta\lambda$, $\lambda\theta$, æquales esse: quatuor denique reliquas $\alpha\epsilon$, $\epsilon\zeta$, $\gamma\eta$ & $\theta\delta$ æquales quoque inter se esse. Sumatur enim polus circulorum parallelorum, qui sit μ , & per polum μ & utrumque punctorum κ & λ describantur maximi circuli, vel maximorum circulorum portiones $\mu\kappa\xi\nu$, & $\mu\lambda\theta\pi$ (per 10. primi) Quia itaque in sphaera duo circuli $\alpha\epsilon\kappa\sigma\eta\gamma\phi\tau$ & $\kappa\rho\lambda$ se mutuò tangunt in puncto κ , per polos autem ipsius $\kappa\lambda$ circuli, & per punctum contactus, quod est κ , descriptus est maximus circulus $\mu\kappa\xi\nu$: igitur

circulus

circulus $\mu\kappa\zeta\nu$ transit etiā per polos ipsius $\alpha\epsilon\kappa\sigma\eta\gamma\phi\tau$ circuli (per 5. huius) ob eāque cauſſam, eum & bifariam ſecat & ad angulos rectos (per 15. primi.) Eadem ratione monſtrabitur circunferentia $\mu\lambda\theta\pi$ bifariam & ad angulos rectos ſecare circulum $\beta\zeta\sigma\lambda\theta\delta\tau$, & per ipsius polos tranſire: Et quia ſuper circulorum $\alpha\epsilon\kappa\eta\gamma\phi\tau$, & $\beta\zeta\lambda\theta\delta\tau$ inter ſe æqualium diametris inceptis à punctis κ & λ , inſiſtunt ad angulos rectos æqualia circuli ſegmenta $\kappa\mu$ & $\lambda\mu$ cum complementis, quæ deſunt ipsis $\kappa\mu$ & $\lambda\mu$ ſegmentis, ad perficienda integra ſegmenta inſiſtentia diametris ipſorum $\alpha\epsilon\kappa\eta\gamma\phi\tau$, $\beta\zeta\lambda\theta\delta\tau$, circulorum, ab ipsis autem integris & æqualibus ſegmentis inſiſtentibus ſuper totis illis diametris, ablata ſunt æquales circunferentiæ $\kappa\mu$ & $\lambda\mu$ minores integris ſemiſſibus totorum ſegmentorum, & recta linea ducta ex μ in α , æqualis eſt rectæ lineæ ductæ ex μ in λ (ſunt enim ex polo eiſdem circuli) æquales igitur circunferentias auferunt (per 11. huius.) Quare circunferentia $\alpha\kappa$, æqualis eſt circunferentiæ $\lambda\delta$: eadēque ratione $\epsilon\kappa$, æqualis eſt ipſi $\lambda\theta$. Item quia in ſphæra duo circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha\epsilon\kappa\eta\gamma\tau$, ſe mutuò ſecant (per hypotheſin) per eorum autem polos deſcriptus eſt $\mu\kappa\zeta\nu$ circulus maximus: Ergo circulus $\mu\kappa\zeta\nu$ bifariam ſecat ipſorum circulorum intercepta ſegmenta (per 9. huius) Quocirca, circunferentia $\alpha\epsilon\kappa$ æqualis eſt circunferentiæ $\kappa\eta\gamma$: item circunferentia $\alpha\nu$, circunferentiæ $\nu\gamma$. Eodem modo oſtendemus ipſam $\epsilon\lambda$ ipſi $\lambda\delta$, & ipſam $\epsilon\pi$ ipſi $\pi\delta$ eſſe æqualem (Item ipſam $\epsilon\xi$ ipſi $\xi\eta$, & ipſam $\zeta\theta$ ipſi $\theta\delta$) Et quia circunferentia $\alpha\epsilon\kappa$ oſtenſa eſt æqualis circunferentiæ $\lambda\theta\delta$: ipſius autem $\alpha\epsilon\kappa$ circunferentiæ dupla eſt $\alpha\epsilon\kappa\eta\gamma$ circunferentia: ipſius autem $\lambda\theta\delta$ circunferentiæ,



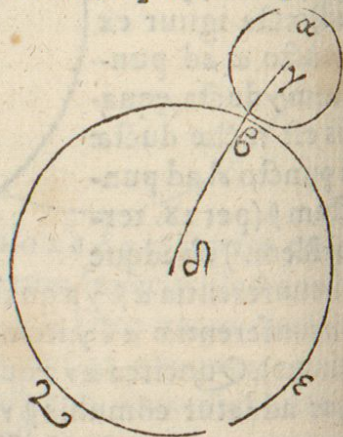
dupla eſt circunferentia $\beta\zeta\lambda\theta\delta$: igitur tota $\alpha\epsilon\kappa\eta\gamma$ toti $\beta\zeta\lambda\theta\delta$ æqualis eſt: ſuntque æquales circuli $\alpha\epsilon\kappa\eta\gamma\phi\tau$ & $\beta\zeta\sigma\lambda\theta\delta\tau$. Sunt enim ambo maximi (per hypotheſin) recta igitur ex puncto α ad punctum γ ducta, æqualis eſt rectæ ductæ à puncto λ ad punctum β (per 28. tertij Elem.) ob idque circunferentia $\alpha\beta\gamma$ æqualis eſt circunferentiæ $\lambda\gamma\beta$. Atqui $\alpha\nu$ eſt dimidium circunferentiæ $\alpha\epsilon\gamma$: item $\epsilon\pi$ eſt dimidium circunferentiæ $\epsilon\gamma\delta$ (ut monſtrauiſmus). Quocirca $\alpha\nu$ æqualis eſt ipſi $\epsilon\pi$ (per 7. cōmunem ſentent.) Earū vtriſque addatur cōmunis $\beta\nu$: tota igitur $\alpha\nu\epsilon$, æqualis eſt toti $\nu\epsilon\pi$: Sunt autem circunferentiæ eiſdem circuli. Quare circunferentia $\alpha\nu\epsilon$, ſimilis eſt circunferentiæ $\nu\beta\pi$: Atqui circunferentia $\nu\epsilon\pi$ ſimilis eſt circunferentiæ $\kappa\epsilon\lambda$. propterea quòd ſi ſint in ſphæra paralleli circuli, per quorum polos ducantur maximi circuli, circunferentiæ parallelorum interceptæ inter maximos circulos ſunt ſimiles (per 10. huius) ipſæ autem $\kappa\epsilon\lambda$ & $\nu\epsilon\gamma\pi$, ſunt circunferentiæ circulorum parallelorum interceptæ inter maximos circulos $\mu\nu$ & $\mu\pi$, qui etiam per eorundem parallelorum polos tranſeunt: Igitur $\alpha\nu\beta$ (cum ſit æqualis ipſi $\nu\beta\pi$) ſimilis eſt ipſi $\kappa\epsilon\lambda$. Eodem modo monſtrabimus

ipsam $\epsilon\zeta$, similem esse ipsi $\kappa\rho\lambda$. Quocirca circumferentia $\alpha\beta$, similis est circumferentiae $\epsilon\zeta$. Eodem modo ostendemus circumferentiam $\gamma\pi\delta$, similem esse circumferentiae $\eta\theta$. Quapropter parallelorum circularum circumferentiarum inter maximorum circularum semicirculos, qui non concurrunt, interceptae, similes inter se sunt. Aio praeterea maximorum circularum circumferentias inter parallelos circulos interceptas, aequales inter se esse. Quia enim quatuor hae circumferentiae $\alpha\epsilon\kappa$, $\kappa\eta\gamma$, $\beta\zeta\lambda$, $\lambda\theta\delta$ ostensae sunt aequales, & aliae item quatuor earum partes $\epsilon\kappa$, $\kappa\eta$, $\zeta\lambda$, $\lambda\theta$ monstratae sunt aequales, quia magnorum circularum circumferentiae $\lambda\pi$ & $\kappa\nu$ bifariam secant intercepta parallelorum segmenta, quae sunt $\epsilon\kappa\eta$, $\epsilon\zeta\eta$ & $\zeta\lambda\theta$, $\zeta\theta\theta$: aequalis ergo est $\epsilon\kappa$ ipsi $\kappa\eta$. Atqui $\epsilon\kappa$ aequalis est ipsi $\lambda\theta$ (ut monstratum est) igitur $\kappa\eta$ aequalis est ipsi $\lambda\theta$. Sed & $\theta\lambda$ ipsi $\lambda'\zeta$ aequalis est. Quare $\lambda\zeta$ aequalis est ipsi $\kappa\eta$. Quocirca quatuor circumferentiae, $\epsilon\kappa$, $\kappa\eta$, $\zeta\lambda$, $\lambda\theta$, aequales inter se sunt: atque ideo reliquae quatuor $\alpha\epsilon$, $\beta\zeta$, $\gamma\eta$, $\theta\delta$, aequales inter se sunt. Maximorum igitur circularum circumferentiarum inter parallelos circulos interceptae, aequales inter se sunt.

THEOREMA 14.

Circulo in sphaera dato, qui minor sit quam circulus maximus, datoque aliquo puncto in eius circumferentia, per illud punctum describere circulum maximum, qui tangat datum circulum.

Sit datus in sphaera circulus $\alpha\beta$ minor maximo circulo, sitque punctum datum β in eius circumferentia. Operae pretium est ducere maximum circulum per punctum β , qui tangat datum circulum $\alpha\beta$. Sumatur ergo polus circuli $\alpha\beta$, qui sit γ (per 21. primi) & per γ, β , puncta describatur maximi circuli circumferentia $\gamma\beta\delta$, ex qua abscindatur $\delta\beta$ circumferentia, aequalis ei quam subtenderet latus quadrati in maximo circulo inscripti: Non enim fieri potest ut $\epsilon\gamma$ sit quadrans circumferentiae maximi circuli, alioqui circulus $\alpha\epsilon$ esset maximus contra hypothesein, non ergo erit $\gamma\beta$ quadrans circuli. Polo igitur δ , intervatio autem $\delta\beta$, describatur circulus $\epsilon\beta\zeta$: circulus ergo $\epsilon\beta\zeta$, maximus est, cum ea quae ex eius polo deducitur sit aequalis lateri quadrati in maximo circulo inscripti (per 17. primi sphaeric.) Et quia in sphaera duo circuli $\alpha\beta$, $\epsilon\beta\zeta$ secant maximum circulum per ipsorum polos transeuntem $\epsilon\gamma\delta$, in eodem puncto ϵ , igitur sese mutuò tangent (per 3. huius) circulus ergo $\alpha\epsilon$, tangit circulum $\epsilon\beta\zeta$. Quocirca per datum punctum β , descriptus est maximus circulus $\epsilon\beta\zeta$, tangens datum circulum $\alpha\epsilon$ in puncto β .

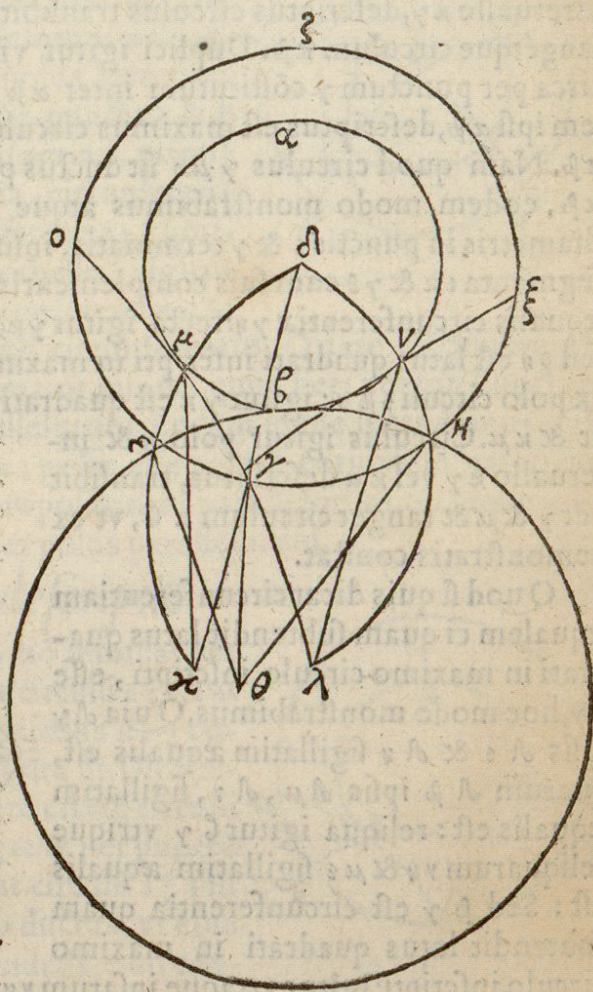


THEOREMA 15.

Circulo in sphaera dato, qui minor sit
maximo

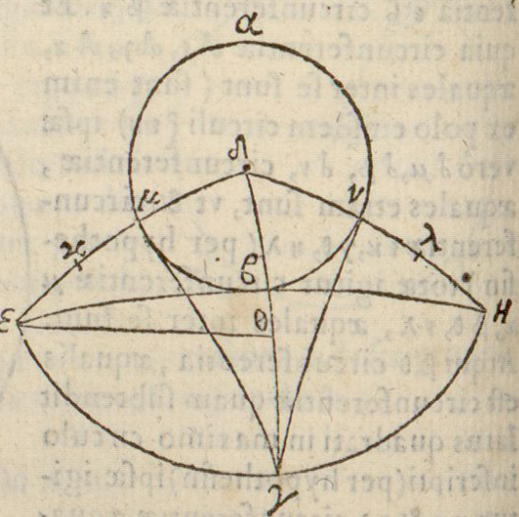
maximo circulo, & puncto aliquo dato in sphaerae superficie, quod sit inter datum circulum & alium eidem æqualem & parallelum, per punctum illud datum describere maximum circulum, qui tangat datum circulum maximo minorem.

Sit in sphaera datus circulus maximo minor $\alpha\beta$: datum autem punctum in sphaerica superficie sit γ , loco intermedio inter $\alpha\beta$ circulum & alterum æqualem & parallelum ipsi $\alpha\beta$. Oportet per punctum γ , describere maximum circulum, qui tangat ipsum $\alpha\beta$ circulum. Sumatur polus circuli $\alpha\beta$ (per 21. primi sphaeric.) sitque δ punctum: & polo δ , intervallo autem $\delta\gamma$, describatur circulus $\gamma\epsilon\zeta\eta$: per duo autem puncta δ & γ , ducatur maximus circulus $\delta\gamma\theta$ (per 20. primi Sphaeric.) & sumatur circumferentia $\beta\theta$, æqualis ei quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti: & polo θ , intervallo autem $\theta\beta$, describatur circulus $\epsilon\beta\eta$. Igitur circulus $\epsilon\beta\eta$ maximus est (per 17. primi) eò quod ex ipsius polo ducta recta linea, æqualis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti: tanget quoque ipsum $\alpha\beta$ circulum (per 3. huius). eò quod duo circuli $\epsilon\beta\eta$ & $\alpha\beta$, secant in vno eodemque puncto β , circumferentiam maximi circuli $\delta\epsilon\gamma\theta$, in quo polos habent. Per punctum igitur δ & per utrumque punctorum ϵ & η describantur maximi circuli duo $\delta\mu\epsilon\kappa$ & $\delta\nu\eta\lambda$ (per 20. primi) sumaturque utraque ipsarum $\epsilon\kappa$ & $\eta\lambda$ circumferentiarum, æqualis ipsi $\gamma\theta$. Quia igitur in sphaera duo circuli $\epsilon\beta\eta$, & $\gamma\epsilon\zeta\eta$ se mutuo secant: per ipsorum autem polos descriptus est maximus circulus $\delta\epsilon\gamma\theta$, igitur eorum segmenta bifariam secant (per 9. huius.) Quare circumferentia $\epsilon\gamma$, æqualis est circumferentia $\gamma\eta$, & circumferentia $\epsilon\beta$, circumferentia $\beta\eta$. Et quia circumferentia $\delta\epsilon$, $\delta\gamma$, $\delta\eta$, æquales inter se sunt (sunt enim ex polo eiusdem circuli $\gamma\epsilon\zeta\eta$) ipsæ verò $\delta\mu$, $\delta\beta$, $\delta\nu$, circumferentia, æquales etiam sunt, ut & circumferentia $\epsilon\kappa$, $\gamma\theta$, $\eta\lambda$ (per hypothesin) tota igitur circumferentia $\mu\kappa$, $\beta\theta$, $\nu\lambda$, æquales inter se sunt. Atqui $\beta\theta$ circumferentia, æqualis est circumferentia quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti (per hypothesin) ipsa igitur $\mu\kappa$ & $\nu\lambda$ circumferentia, æquales sigillatim sunt illi circumferentia, quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti. Et quia in



Sphaera maximus circulus $\alpha\beta\gamma\theta$, circulum quendam in sphaera descriptum $\zeta\epsilon\gamma\eta$, per polos secat (ex hypothesi) ergo eum & bifariam & ad angulos rectos secat (per 15. primi) Circulus ergo $\alpha\beta\gamma\theta$ rectus est ad circulum $\zeta\epsilon\gamma\eta$. Eodemque modo ostendemus circulos $\alpha\nu\eta\lambda$ & $\delta\mu\epsilon\kappa$ rectos esse ad circulum $\zeta\epsilon\gamma\eta$. Connectantur rectae $\lambda\nu, \lambda\gamma, \theta\epsilon$. Quia igitur in ipsius $\zeta\epsilon\gamma\eta$ circuli diametris ad puncta γ & η terminatis, insistant aequalia & recta circulorum segmenta $\gamma\theta$ & $\eta\lambda$ cum suis complementis, à quibus aequales circumferentiae desumptae sunt $\gamma\theta$ nempe & $\eta\lambda$, minores semissibus integris suorum segmentorum, & circumferentia $\epsilon\gamma$ ostensa est aequalis circumferentiae $\gamma\eta$: recta igitur $\theta\epsilon$ aequalis est rectae $\lambda\gamma$ (per 12. huius) Sed $\theta\epsilon$ est latus quadrati inscripti in maximo circulo. Quare & $\lambda\gamma$, aequalis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti. Est verò etiam $\lambda\nu$ latus quadrati in maximo circulo inscripti: aequalis ergo est recta $\lambda\gamma$ rectae $\lambda\nu$, ob eamque causam polo λ & intervallo $\lambda\gamma$ descriptus circulus transibit per punctum ν . transeat (inquam) per punctum ν , sitque exempli gratia, circulus $\gamma\nu\xi$: maximus ergo est circulus $\gamma\nu\xi$: recta enim ex eius polo deducta aequalis est lateri quadrati inscripti in maximo circulo. Et quia in sphaera duo circuli $\gamma\nu\xi$ & $\alpha\beta$, maximi circuli circumferentiam $\delta\nu\eta\lambda$ secant in eodem puncto ν , habentque suos polos in eodem circulo $\alpha\nu\eta\lambda$, quem secant, igitur $\gamma\nu\xi$ & $\alpha\beta$ circuli se mutuò tangunt (per 3. huius.) Eodem modo ostendemus fore ut circulus polo κ , intervallo verò $\kappa\gamma$ descriptus, transeat per punctum μ . Nam si connectamus rectas $\gamma\kappa, \theta\eta$, erunt inter se aequales: estque $\theta\eta$ latus quadrati in maximo circulo inscripti, quia deducitur è polo maximi circuli $\epsilon\zeta\eta$. igitur $\kappa\gamma$ est etiam latus quadrati inscripti in maximo circulo. Atqui recta etiam $\kappa\mu$, est latus quadrati in maximo circulo inscripti (eò quòd circumferentia $\mu\kappa$ aequalis ostensa est circumferentiae $\theta\zeta$) quare recta $\kappa\gamma$, aequalis est rectae $\kappa\mu$: polo igitur κ & intervallo $\kappa\gamma$, descriptus circulus transibit per punctum μ , ut circulus $\gamma\mu\omicron$, tangetque circulum $\alpha\beta$. Duplici igitur via problemati satisfacimus. Quo circa per punctum γ constitutum inter $\alpha\beta$ circulum & alium parallelum & aequalem ipsi $\alpha\beta$, descriptus est maximus circulus $\gamma\nu\xi$, vel $\gamma\mu\omicron$, tangens circulum $\alpha\beta$. Nam quod circulus $\gamma\mu\omicron$ sit ductus per punctum γ , & tangat circulum $\alpha\beta$, eodem modo monstrabimus atque in $\gamma\nu\xi$. Quia enim in $\epsilon\zeta\eta\gamma$ circuli diametris in punctis ϵ & γ terminatis, insistant aequalia & recta circulorum segmenta $\epsilon\kappa$ & $\gamma\theta$ cum suis complementis, estque circumferentia $\epsilon\gamma$, ostensa aequalis circumferentiae $\gamma\eta$: recta igitur $\gamma\kappa$, aequalis est rectae $\theta\eta$ (per 12. huius) sed $\theta\eta$ est latus quadrati inscripti in maximo circulo (per 16. primi). Est enim ex polo circuli $\epsilon\beta\eta$: igitur $\gamma\kappa$ est quadrati latus in maximo circulo inscripti ut & $\kappa\mu$. Circulus igitur polo κ & intervallo $\kappa\gamma$ vel $\kappa\mu$ descriptus, transibit per γ & μ & tanget circulum $\alpha\beta$, ut ex demonstratis constat.

Quod si quis dicat circumferentiam aequalem ei quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti, esse $\epsilon\gamma$, hoc modo monstrabimus. Quia $\alpha\gamma$ ipsis $\alpha\epsilon$ & $\alpha\eta$ sigillatim aequalis est, quarum $\alpha\beta$ ipsis $\alpha\mu$, $\alpha\nu$, sigillatim aequalis est: reliqua igitur $\epsilon\gamma$ utrique reliquarum $\nu\eta$ & $\mu\epsilon$ sigillatim aequalis est: Sed $\beta\gamma$ est circumferentia quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti: Igitur utraque ipsarum $\nu\eta, \mu\epsilon$, est item circumferentia quam subtendit

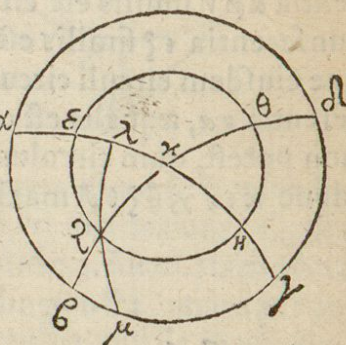


subtendit latus quadrati inscripti in maximo circulo: cū ergo $\nu\eta$ sit circumferentia quam subtendit latus quadrati maximo circulo inscripti, & $\eta\gamma$ item sit circumferentia quam subtendit latus quadrati inscripti in maximo circulo: igitur $\eta\gamma$ æqualis est ipsi $\nu\eta$. Quare polo η interuallōque $\gamma\eta$ descriptus circulus, transibit per punctum ν . Eodem modo ostendemus fore, ut polo ϵ , interuallō autem $\epsilon\gamma$ descriptus circulus, transeat per punctum μ , atque ita duplici modo satisfiet problemati.

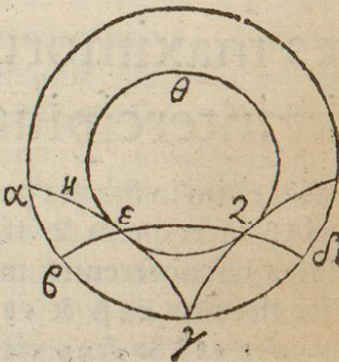
THEOREMA. 16.

Maximi circuli, qui similes circumferentias parallelorum in sphæra circulorum auferunt, aut per parallelorū polos transeunt, aut eundem parallelum tangunt.

In sphæra enim maximi circuli sint $\alpha\eta\gamma$, $\epsilon\zeta\theta\delta$, qui auferant similes circumferentias de circulis parallelis $\alpha\epsilon\gamma\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$, id est, intercipient circumferentiā $\alpha\beta$ similem circumferentiæ $\epsilon\zeta$. Dico fore ut $\alpha\eta\gamma$ & $\epsilon\zeta\theta\delta$ circuli maximi, vel per parallelorum polos transeant, vel vnum eundemque parallelū attingant. Circulus enim $\alpha\eta\gamma$, aut per parallelorum polos transit, aut non. Ponamus primū eum transire per polos parallelorum. Dico reliquum circulum maximum $\epsilon\zeta\theta\delta$ per polos etiam parallelorum transire, id est, dico punctum κ , per quod transeunt ambo maximi circuli $\alpha\kappa\gamma$ & $\beta\kappa\delta$, esse polum parallelorum $\alpha\epsilon\gamma\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$ circulorum: Si enim κ non sit polus ipsorum: esto punctum λ eorum polus: perque puncta λ & ζ describatur maximus circulus $\lambda\zeta\mu$ (per 20. primi) Similis ergo est $\alpha\beta\mu$ circumferentia, circumferentiæ $\epsilon\zeta$ (per 10. huius) Atqui circumferentia $\epsilon\zeta$ similis est circumferentiæ $\alpha\beta$ (per hypothesein): Igitur circumferentia $\alpha\mu$, similis est circumferentiæ $\alpha\beta$: sunt autem $\alpha\beta$ & $\alpha\mu$, eiusdem circuli circumferentiæ. Quare circumferentia $\alpha\mu$, æqualis est circumferentiæ $\alpha\beta$, maior minori, quod fieri nequit: Punctum ergo λ non est polus ipsorum parallelorum. Eodem modo ostendemus nullum aliud punctum præterquā κ , posse esse polum eorundem parallelorum. Quare punctum κ est polus propositorum parallelorum, ob idque $\alpha\eta\gamma$ & $\epsilon\zeta\theta\delta$ maximi circuli transeunt per polos parallelorum.

*Secunda descriptio.*

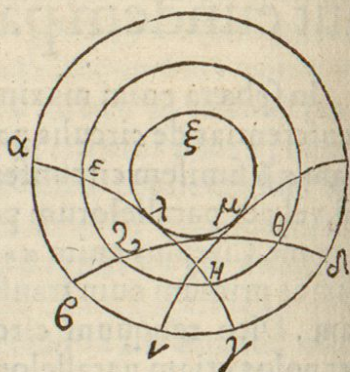
Sed enim circulus maximus $\alpha\eta\gamma$, nō transeat per polos parallelorū: aut igitur tangat circulū $\epsilon\zeta\theta$, aut ad eū obliquus erit: tangat primo circulus $\alpha\eta\gamma$ circulū $\epsilon\zeta\theta$ in puncto ϵ , ut in secūda figura fit. Dico reliquū maximū circulum $\zeta\epsilon$, tangere etiam circulū $\epsilon\zeta\theta$. Si enim fieri possit, esto, ne tāgat: & per punctū ζ describatur circulus $\zeta\gamma$ qui tangat circulū $\epsilon\zeta\theta$ in puncto γ (per 14. huius) sitque ita ductus, ut eius semicirculus à puncto ζ versus γ tendens, non concurrat cum semicirculo incipiente ab ϵ , & tenden-



te versus α . igitur circumferentia $\gamma\beta\alpha$ similis est circumferentiæ $\epsilon\zeta$ (per 13. huius.) Atqui circumferentia $\epsilon\zeta$ similis est circumferentiæ $\alpha\epsilon$, ex hypothesi: igitur $\gamma\alpha$ circumferentia, similis est circumferentiæ $\alpha\beta$, suntque ambæ eiusdem circuli circumferentiæ. Quare circumferentia $\gamma\alpha$ æqualis est circumferentiæ $\alpha\beta$, quod est absurdum. fieri ergo non potest quin circulus $\beta\zeta$ tangat circulum $\epsilon\zeta$. tanget igitur.

Tertia descriptio.

Iam circulus $\alpha\eta\gamma$, obliquus sit ad parallelos circulos, vt in tertia figura. tanget ergo duos circulos æquales quidem inter se, parallelos autem ipsis $\alpha\epsilon\gamma\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$ circulis (per 8. huius.) Dico similiter ipsum $\beta\zeta\theta\delta$ circulum, obliquum esse ad parallelos, & tangere eundem circulum quem tangit circulus $\alpha\eta\gamma$. Alioqui enim, si fieri possit, circulus quidem $\alpha\epsilon\eta\gamma$ tangat vnum parallelorum, $\mu\xi$ nempe, in puncto λ : circulus autem $\epsilon\zeta\theta\delta$ ne tangat ipsum $\mu\xi$. & per ζ punctum positum inter circulum $\mu\xi$ & alium ipsi $\mu\xi$ æqualem & parallelum, describatur maximus circulus $\nu\zeta\mu$ tangens circulum $\lambda\mu\xi$ in puncto μ , habeatque idem circulus $\nu\zeta\mu$ semicirculum $\mu\eta\nu$ nō concurrentem cum semicirculo incipiente à λ & tendente versus α . igitur circumferentia $\alpha\beta\nu$ similis est circumferentiæ $\epsilon\zeta$: sed circumferentia $\epsilon\zeta$ similis est circumferentiæ $\alpha\beta$, suntque eiusdem circuli circumferentiæ. Quare circumferentia $\nu\alpha$, æqualis est circumferentiæ $\alpha\beta$, quod est absurdum. Fieri ergo non potest, quin circulus $\delta\theta\beta$, tangat circulum $\lambda\mu\xi$. eum igitur tanget, ob idque $\alpha\epsilon\eta\gamma$, $\epsilon\zeta\theta\delta$ maximi circuli eundem parallelum tangent.

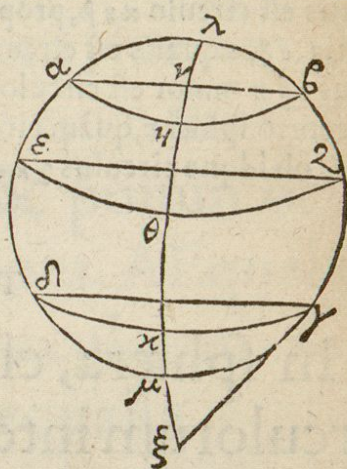


THEOREMA 17.

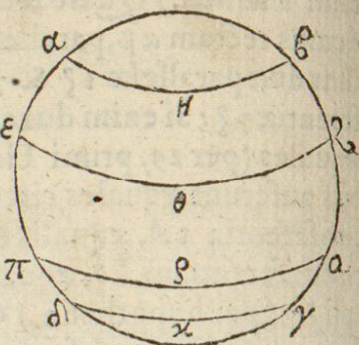
In sphæra paralleli circuli, inter quos & maximum parallelorum æquales circumferentiæ maximorum circulorum intercipiuntur, sunt inter se æquales: illi verò inter quos & maximum parallelorum maiores maximorum circulorum circumferentiæ intercipiuntur, sunt minores.

Sint enim in sphæra paralleli circuli $\alpha\eta\beta$, $\gamma\kappa\delta$ & $\epsilon\theta\zeta$, quorum maximus sit $\epsilon\theta\zeta$, inter quem & vtrunque reliquorum parallelorum intercipientur æquales circumferentiæ maximi circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, id est circumferentia $\beta\zeta$, quæ inter circulos $\alpha\eta\beta$ & $\epsilon\theta\zeta$ interiicitur, æqualis sit circumferentiæ $\zeta\gamma$ interiectæ inter $\epsilon\theta\zeta$ & $\delta\kappa\gamma$ circulos. Dico circulum $\alpha\eta\beta$ æqualem esse circulo $\gamma\kappa\delta$. Sit enim recta linea $\alpha\epsilon$, communis sectio ipsorum $\alpha\eta\epsilon$ & $\alpha\beta\gamma\delta$ circulorum

culorum: recta autem $\epsilon\zeta$ sit communis sectio circularum $\epsilon\theta\zeta$ & $\alpha\epsilon\gamma\delta$: ipsa denique $\gamma\delta$ recta linea, sit communis sectio circularum $\gamma\kappa\delta$ & $\alpha\beta\gamma\delta$. Quia ergo duo plana parallela, quæ sunt $\epsilon\theta\zeta$ & $\gamma\kappa\delta$, secantur à plano ipsius $\alpha\beta\gamma\delta$ circuli: communes ergo ipsorum sectiones, sunt parallelæ (per 16. vndecimi Element.) Quare recta $\epsilon\zeta$, parallela est rectæ $\gamma\delta$. Eodem modo ostendamus rectam $\alpha\beta$, parallelam esse rectæ $\epsilon\zeta$. Et quia in circulo $\alpha\beta\gamma\delta$, ductæ sunt duæ parallelæ $\epsilon\zeta$ & $\gamma\delta$: Igitur circumferentia $\delta\epsilon$, æqualis est circumferentiæ $\gamma\zeta$: Si enim duxerimus rectam lineam $\epsilon\gamma$, fient duo alterni anguli æquales (per 29. primi Element.) æquales autem anguli in circulis æqualibus auferunt æquales circumferentias (per 26. tertij Elem.) Quapropter circumferentia $\delta\epsilon$, æqualis est circumferentiæ $\gamma\zeta$. Eodem modo ostendamus circumferentiam $\epsilon\zeta$, æqualem esse circumferentiæ $\alpha\epsilon$. Atqui $\beta\zeta$, æqualis est ipsi $\gamma\gamma$ (per hypothesin.) Quare & $\alpha\epsilon$, æqualis erit ipsi $\delta\delta$, ob eamque causam $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\zeta$ simul sumptæ, æquales sunt ipsis $\epsilon\delta$, $\gamma\gamma$ simul sumptis. Cum ergo tota circumferentia $\epsilon\alpha\lambda\beta\zeta$ æqualis sit toti $\gamma\gamma\mu\delta\epsilon$ circumferentiæ (maximi enim sunt circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\epsilon\theta\zeta$, ob idque se bifariam secant. (per 11. primi) in punctis ϵ & ζ . & ideo $\epsilon\alpha\lambda\beta\zeta$ & $\gamma\gamma\mu\delta\epsilon$ sunt semicirculi vnus & eiusdem circuli) & ex his ablata $\alpha\epsilon$ & $\beta\zeta$, æquales sunt ablati ambabus $\delta\epsilon$ & $\gamma\zeta$: reliqua igitur $\alpha\lambda\epsilon$, reliquæ $\delta\mu\gamma$ æqualis est. Sed $\alpha\lambda\epsilon$ & $\delta\mu\gamma$ sunt circumferentiæ eiusdem circuli. Quare recta linea $\alpha\beta$ æqualis est rectæ $\gamma\delta$ (per 29. tertij Element.) His ita monstratis, circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, circulos $\alpha\eta\beta$ & $\delta\kappa\gamma$, per polos secat, aut non. Primò eos per polos secet: bifariam igitur eos secabit (per 15. primi Sphæric.) igitur recta $\alpha\beta$ est diameter circuli $\alpha\eta\beta$: & recta $\delta\gamma$, est diameter circuli $\delta\kappa\gamma$: estque $\alpha\beta$ æqualis ipsi $\gamma\delta$, vt ostendimus. Quare circulus $\alpha\eta\beta$, æqualis est circulo $\gamma\kappa\delta$ (per primam defin. 3. Elem.) Iam ponamus circulum $\alpha\beta\gamma\delta$, secare ipsos $\alpha\eta\epsilon$, $\gamma\kappa\delta$, per alia puncta, quàm per polos, sumaturque ipsorum $\alpha\eta\epsilon$, $\gamma\kappa\delta$, parallelorum polus, qui sit in puncto ν (per 21. primi) & per punctum ν , perque vnum polorum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, describatur maximus circulus $\lambda\nu\theta\kappa\mu\xi$: de quo sumatur $\mu\xi$ circumferentia æqualis ipsi $\lambda\nu$, & earum vtrique addatur communis circumferentia $\nu\kappa\mu$. tota igitur $\lambda\eta\kappa\mu$, æqualis est toti $\nu\kappa\mu\xi$: sed $\lambda\eta\kappa\mu$, est circumferentia semicirculi: Ergo $\nu\kappa\mu\xi$, est etiam circumferentia semicirculi: Quocirca punctum ν puncto ξ opponitur ex diametro: sed punctum ν est polus ipsorum $\alpha\eta\epsilon$, $\delta\kappa\gamma$, parallelorum circularum (per hypothesin): igitur punctum ξ , est reliquus polus eorundem parallelorum (per 4. definitionem primi Sphæric.) Et quia in sphæra duo circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\delta\kappa\gamma$, se mutuò secant, perque eorum polos descriptus est maximus circulus $\lambda\theta\kappa\xi$: Igitur circulus $\lambda\theta\kappa\xi$, bifariam secat ipsorum segmenta (per 9 huius.) Quocirca circumferentia $\gamma\mu$, æqualis est circumferentiæ $\mu\delta$, ob eamque causam tota $\gamma\mu\delta$ circumferentia, est dupla ipsius $\mu\gamma$ circumferentiæ. Eodem modo ostendemus circumferentiæ $\alpha\lambda\beta$, duplam esse circumferentiæ $\alpha\lambda$: Sed circumferentia $\delta\mu\gamma$ ostensa est æqualis circumferentiæ $\alpha\lambda\beta$. igitur $\mu\delta$ circumferentia, æqualis est circumferentiæ $\alpha\lambda$. In ipsius ergo $\alpha\epsilon\gamma\delta$ circuli diametro, quæ est à puncto λ in punctum μ , æqualia & recta circuli segmenta insunt, $\lambda\theta\kappa\mu$, & $\mu\xi$ cum suo cõplemento: & ab iis segmentis rectis & æqualibus æquales circumferentiæ desumptæ sunt $\lambda\nu$ & $\mu\xi$, quarum vtraque minor est semisse eius segmenti à quo desumpta



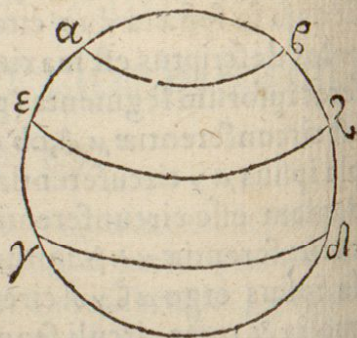
est: à proposito autem $\alpha\beta\gamma\delta$ circulo, desumptæ sunt æquales circumferentiæ $\alpha\lambda$ & $\mu\gamma$. Ergo recta linea $\nu\alpha$ æqualis est rectæ ductæ à puncto ξ in punctum γ (per 12. huius.) Sed recta linea $\nu\alpha$ est ex polo ipsius $\alpha\eta\beta$ circuli: recta item $\xi\gamma$, est ex polo circuli $\gamma\kappa\delta$: linea ergo deducta ex polo circuli $\alpha\eta\beta$, æqualis est lineæ deductæ ex polo circuli $\gamma\kappa\delta$: sed circuli sunt æquales quorum quæ ex polis ductæ lineæ sunt æquales: Ergo circulus $\alpha\eta\beta$, circulo $\gamma\kappa\delta$ æquatur. Contra verò sit $\gamma\zeta$ circumferentia, maior quàm circumferentia $\beta\zeta$. Dico circulum $\delta\kappa\gamma$, minorem esse circulo $\alpha\eta\beta$. Quia enim maior est $\gamma\zeta$ quàm $\beta\zeta$, ab ipsa $\gamma\zeta$ longiore auferatur $\zeta\theta$ quæ sit æqualis ipsi $\beta\zeta$ breviori, & per punctum θ describatur circulus $\theta\rho\pi$ parallelus: Igitur circulus $\theta\rho\pi$ æqualis est circulo $\alpha\eta\beta$, propterea quòd circumferentia $\theta\zeta$, æqualis est circumferentiæ $\beta\zeta$: sed circulus $\theta\rho\pi$ maior est circulo $\gamma\kappa\delta$ (per 6. primi.) Circulus enim $\theta\rho\pi$ vicinior est centro sphaeræ, quàm circulus $\gamma\kappa\delta$. Igitur circulus $\alpha\eta\beta$ maior est circulo $\gamma\kappa\delta$, ob idque circulus $\gamma\kappa\delta$ minor est circulo $\alpha\eta\beta$.



THEOREMA. 18.

In sphaera, circumferentiæ maximorum circulorum interceptę inter maximum parallelorum & duos alios circulos æquales & parallelos, sunt æquales: illæ verò quæ intercipiuntur inter maiorem parallelum & maximum, sunt minores.

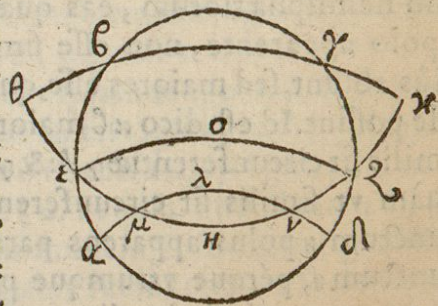
In sphaera enim, circuli æquales & paralleli $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ auferant circumferentias $\beta\zeta$ & $\zeta\delta$, à maximo circulo $\alpha\epsilon\gamma\delta$, ita vt circumferentia $\beta\zeta$ contineatur inter $\alpha\beta$ parallelum, & $\epsilon\zeta$ maximum parallelorum: Item $\delta\zeta$ contineatur inter $\epsilon\zeta$ maximum parallelorum, & $\gamma\delta$ circulum parallelum & æqualem ipsi $\alpha\beta$. Dico circumferentiam $\beta\zeta$ æqualem esse circumferentiæ $\zeta\delta$: Si enim circumferentia $\beta\zeta$ non sit æqualis circumferentiæ $\zeta\delta$, nec circulus $\alpha\beta$ æqualis erit circulo $\gamma\delta$ (per posteriorem partem præcedentis theoremat.) Atqui $\alpha\beta$ circulus æqualis est circulo $\gamma\delta$ (ex hypothesi.) igitur $\beta\zeta$ circumferentia, æqualis est circumferentiæ $\zeta\delta$. Contra verò sit circulus $\alpha\beta$ maior circulo $\gamma\delta$. Dico circumferentiam $\beta\zeta$ minorem esse circumferentiâ $\zeta\delta$: Si enim $\beta\zeta$ non sit minor, quàm $\zeta\delta$, neque $\alpha\epsilon$ circulus maior erit circulo $\gamma\delta$: Atqui $\alpha\beta$ est maior, quàm $\gamma\delta$ (ex hypothesi) minor ergo est $\epsilon\zeta$ circumferentia quàm circumferentia $\zeta\delta$.



THEOREMA 19.

Si in sphaera maximus circulus parallelus aliquot circulos in sphaerica superficie descriptos secet quidem, non tamen per polos: in partes inæquales eos secabit, excepto maximo parallelorum. De parallelorum autem segmentis in vno hemisphaeriorum interceptis, ea quæ sunt inter maximum parallelorum & polum conspicuum, sunt maiora semicirculo: reliqua verò quæ sunt inter maximum parallelorum & polum occultum, sunt semicirculo minora. AEqualium denique ac parallelorum circulorum alterna segmenta, sunt inter se æqualia.

Maximus enim in sphaera circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, parallelus quosdam in sphaerica superficie descriptos $\alpha\delta, \epsilon\zeta, \epsilon\eta$, secet quidem, non tamen per polos. Sit autem parallelorum maximus $\epsilon\zeta$: Dico fore, ut $\alpha\beta\gamma\delta$ circulus maximus, secet in partes inæquales, omnes parallelus, excepto ipso $\epsilon\zeta$ maximo, quem (per. 11. primi Sphaeric.) bifariam secat. Dico etiam fore, ut de parallelorum segmentis inæqualibus in vno hemisphaeriorum interceptis, ea sint maiora semicirculo, quæ inter maximum parallelorum & polum conspicuum intercipiuntur: reliqua verò sint minora semicirculo: AEqualium denique & parallelorum alterna segmenta sint æqualia: Sit enim conspicuus parallelorum polum η punctum (per 20. primi) & per puncta ϵ , & η , describatur maximus circulus $\epsilon\theta$: Si ergo circumferentia $\theta\epsilon\eta$ compleatur, transibit per punctum ζ (per 11. primi) nam punctum ϵ , ex diametro opponitur puncto ζ , eò quod vterque ipsorum $\epsilon\zeta$ & $\alpha\beta\gamma\delta$, maximus est: transeat (inquam) per punctum ζ , ut facit circumferentia $\eta\zeta\kappa$: compleatur item circulus $\beta\gamma$ vsque ad puncta θ & κ . Quia ergo in sphaera maximus circulus $\theta\epsilon\mu\eta\zeta\kappa$, per polos secet aliquot circulos in sphaerica superficie descriptos $\alpha\mu\gamma\delta, \epsilon\zeta, \theta\beta\gamma\kappa$, igitur eos & bifariam secat & ad angulos rectos (per. 15. primi). Quare $\mu\lambda\gamma$ est semicirculus: item $\epsilon\theta\zeta$ & $\theta\beta\gamma\kappa$ sunt circumferentiæ semicirculorum: Cum itaque $\mu\lambda\gamma$ sit semicirculus: igitur $\alpha\mu\lambda\gamma\delta$ maior est semicirculo. Eodem modo ostendamus omnia segmenta parallelorum contenta inter $\epsilon\theta\zeta$ maximum parallelum & η polum conspicuum, esse maiora semicirculo. Contra verò, quia $\theta\beta\gamma\kappa$ est semicirculus, igitur $\beta\gamma$ est minor semicirculo. Eodem modo ostend-

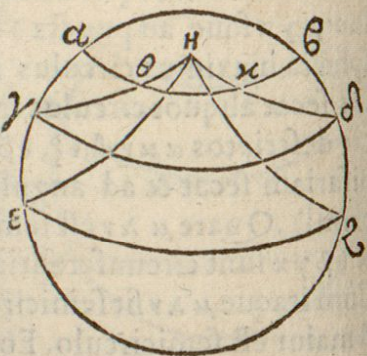


demus omnia segmenta contenta inter $\epsilon\theta\gamma$ & polum occultum in vno eodemque hemisphærio, esse minora semicirculis. Iam verò sit circulus $\alpha\lambda\delta$ & circulo $\beta\gamma$ æqualis & parallelus. Dico altera segmenta ipsorum $\alpha\lambda\delta$ & $\gamma\beta$ circulo æqualia inter se esse. Quia enim circulus $\alpha\lambda\delta$, æqualis & parallelus est circulo $\beta\gamma$, igitur $\alpha\epsilon$ circumferentia, æqualis est circumferentiæ $\epsilon\beta$, & circumferentia $\delta\zeta$, circumferentiæ $\zeta\gamma$ (per præcedens theorema). Atqui $\alpha\epsilon$ æqualis est ipsi $\delta\zeta$: & $\epsilon\beta$ ipsi $\zeta\gamma$ (ex corollario propositionis. 26. tertij Elem.) igitur circumferentiæ $\alpha\epsilon$ & $\delta\zeta$ simul sumptæ, æquales sunt circumferentiis $\epsilon\beta$ & $\zeta\gamma$ simul sumptis: Est verò etiam tota $\epsilon\alpha\delta\zeta$, æqualis toti $\epsilon\beta\gamma\zeta$, reliqua igitur $\alpha\delta$, æqualis est reliquæ $\beta\gamma$, propterea quòd $\epsilon\alpha\delta\zeta$ & $\epsilon\beta\gamma\zeta$ sunt circumferentiæ semicirculorum: Duo enim circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\epsilon\theta\gamma$ sunt maximis (ex hypothesi) suntque ipsæ $\alpha\delta$ & $\beta\gamma$, eiusdem circuli circumferentiæ, igitur recta linea $\alpha\delta$, æqualis est rectæ $\beta\gamma$: Sed recta $\alpha\delta$, subtendit circumferentiam $\alpha\delta$, recta verò $\beta\gamma$ subtendit circumferentiam $\beta\gamma$: in circulis autem æqualibus æquales rectæ lineæ auferunt circumferentias, æquales, maiorem maiori, & minorem minori. (per 28. tertij Elem.) Igitur maior circumferentia ipsius $\alpha\delta$ circuli, æqualis est maiori circumferentiæ ipsius $\beta\gamma$ circuli: minor verò circumferentia ipsius $\alpha\delta$ circuli, æqualis minori circumferentiæ circuli $\beta\gamma$: Est autem $\alpha\delta$ circumferentia maior semicirculo, circumferentia verò $\beta\gamma$ minor semicirculo: Altera igitur segmenta ipsorum $\alpha\delta$, & $\beta\gamma$ circulo æqualia inter se sunt.

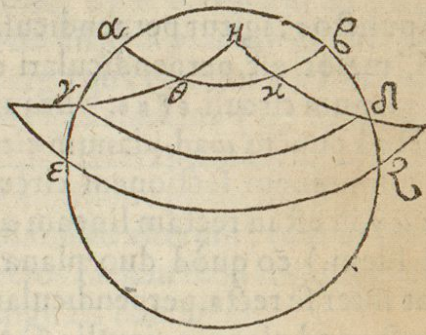
THEOREMA 20.

Si in sphæra maximus circulus parallelus aliquot circulos secet, non tamen per polos: de parallelorum assumptis circumferentiis in vno hemisphærio, illæ quæ propius accedunt ad polum conspicuum, erunt maiores quàm vt similes esse possint illis, quæ ab eodem conspicuo polo longius absunt.

In sphæra enim, maximus circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, parallelus aliquot circulos $\alpha\epsilon$, $\gamma\delta$, & $\epsilon\zeta$, secet quidem, ita tamen vt sectio illa non transeat per eorum polos. Dico circumferentiarum interceptarum in vno hemisphæriorum, eas quæ propius absunt à polo apparente, non esse similes his quæ longius absunt, sed maiores esse, quàm vt eis similes esse possint. Id est, dico $\alpha\epsilon$ maiorem esse, quàm vt similis sit circumferentiæ $\gamma\delta$: & $\gamma\delta$ maiorem esse, quàm vt similis sit circumferentiæ $\epsilon\zeta$. Sit enim punctum θ polus apparens parallelorum, & per punctum θ , perque vtrumque punctorum γ & δ , ducantur maximi circuli $\theta\gamma$ & $\theta\delta$: ipsi igitur circuli $\theta\gamma$ & $\theta\delta$, similes intercipiunt circumferentias inter eos interiectas (per 10. huius). Quare $\theta\epsilon$ similis est ipsi $\gamma\delta$, ob eamque causam



tota circumferentia $\alpha\theta\kappa\epsilon$, maior est quàm
ut similis sit circumferentiæ $\gamma\delta$. Eodem
modo ostendemus ipsam $\gamma\delta$ maiorem esse,
quàm ut similis sit circumferentiæ $\epsilon\zeta$, quod
fiet si per punctum η , perque utrumque
punctorum ϵ & ζ describerimus maximos
circulos. Potest etiam demonstrari sine de-
scriptione horum maximorum circulorũ,
si modo protraxerimus $\eta\theta\gamma$, $\eta\kappa\delta$, $\epsilon\zeta$, cir-
culos, ut in figura subiecta.

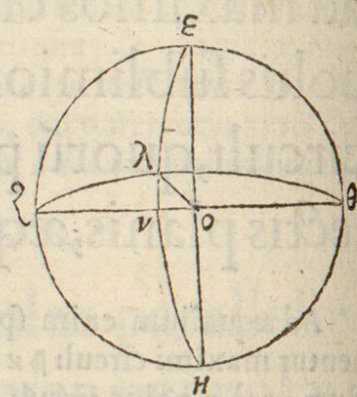
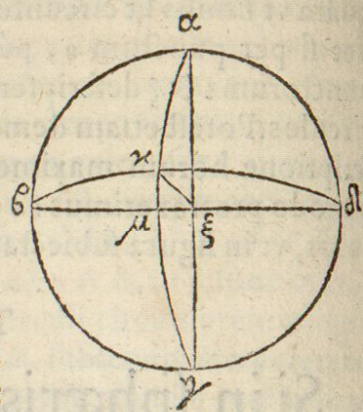


THEOREMA 21.

Si in sphæris æqualibus maximi circuli
ad maximos circulos inclinentur, ille cuius
polus sublimior erit, inclinatio erit: illi verò
circuli, quorũ poli æqualiter distant à sub-
iectis planis, æqualiter inclinantur.

Ad æqualium enim sphærarum maximos circulos $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$, incli-
nentur maximi circuli $\beta\kappa\delta$, $\zeta\lambda\theta$: sitque punctum μ polus circuli $\beta\kappa\delta$: pun-
ctum verò ν polus circuli $\zeta\lambda\theta$, sitque μ polus sublimior, quàm ν . Dico circu-
lum $\epsilon\kappa\delta$ ad circumulum $\alpha\beta\gamma\delta$ magis inclinari, quàm circumulum $\zeta\lambda\theta$ ad circu-
lum $\epsilon\zeta\eta\theta$: Per punctum enim μ , perque unum polorum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, ducatur
maximus circumulum $\alpha\kappa\mu\gamma$: item per punctum ν , & per unum polorum cir-
culi $\epsilon\zeta\eta\theta$, ducatur circumulum maximus $\epsilon\lambda\nu\theta$: sit verò circulorum $\alpha\beta\gamma\delta$,
& $\beta\kappa\delta$, communis sectio $\beta\delta$: circulorum autem $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\alpha\kappa\mu\gamma$,
communis sectio $\alpha\gamma$: circulorum denique $\beta\kappa\delta$ & $\alpha\kappa\mu\gamma$, communis sectio
 $\kappa\xi$. Item sit ipsorum $\epsilon\zeta\eta\theta$ & $\zeta\lambda\theta$ circulorum communis sectio $\zeta\theta$: ipsorum
verò $\epsilon\zeta\eta\theta$ & $\epsilon\lambda\nu\theta$, communis sectio $\epsilon\eta$: ipsorum denique $\epsilon\lambda\nu\theta$ & $\zeta\lambda\theta$, com-
munis sectio $\lambda\theta$. Et quia in sphæra maximus circumulum $\alpha\kappa\mu\gamma$, circulos
aliquot in sphære superficie descriptos $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\beta\kappa\delta$, secat per polos, eos
ergo & bifariam & ad angulos rectos secat (per 15. primi.) Ergo circumulum
 $\alpha\kappa\mu\gamma$, rectus est ad ipsos $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\kappa\delta$, circulos: Atque ideo uterque ipso-
rum $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\kappa\delta$ circulorum rectus est ad circumulum $\alpha\kappa\mu\gamma$. Atqui si duo plana
se mutuò secantia, recta sint ad planum aliquod, ipsorum quoque communis
sectio ad idem planum recta erit (per 19. vndecimi Element.) igitur ipsorum
 $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\beta\kappa\delta$, circulorum communis sectio $\beta\delta$, angulos rectos facit ad cir-
culum $\alpha\kappa\mu\gamma$, atque ideò ad omnes rectas lineas ipsam tangentes, & in eo-
dem plano circuli $\alpha\kappa\mu\gamma$ positas, angulos rectos faciet: ipsam verò $\beta\delta$ tan-
gunt ambæ $\kappa\xi$ & $\xi\alpha$ rectæ lineæ positæ in plano circuli $\alpha\kappa\mu\gamma$. Igitur $\beta\delta$, an-
gulos rectos facit ad utramque ipsarum $\kappa\xi$ & $\xi\alpha$. Et quia duo plana $\alpha\beta\gamma\delta$
& $\beta\kappa\delta$, se mutuò secant: ad eorum autem communem sectionem (quæ est
 $\beta\delta$) duæ rectæ lineæ $\kappa\xi$ & $\xi\alpha$ ductæ sunt, angulos rectos cum ea facientes,
quarum $\kappa\xi$ quidem iacet in plano circuli $\beta\kappa\delta$, ipsa verò $\xi\alpha$ in plano cir-
culi $\alpha\beta\gamma\delta$: angulus igitur $\kappa\xi\alpha$, est inclinatio, qua planum $\beta\kappa\delta$, ad planum
 $\alpha\beta\gamma\delta$, inclinatur. Eodem modo ostendemus angulum $\lambda\theta\epsilon$, esse inclinatio-
nem, qua planum $\zeta\lambda\theta$, inclinatur ad planum $\epsilon\zeta\eta\theta$. Dico igitur angulum $\kappa\xi\alpha$,

minorem esse angulo $\lambda o e$. Quia enim ex hypothese punctum μ sublimius est puncto v : igitur perpendicularis ducta à puncto μ ad planum circuli $\alpha \beta \gamma \delta$ $\gamma \delta$, maior est perpendiculari ducta à puncto v ad planum circuli $\epsilon \zeta \eta \theta$. Atqui perpendicularis ducta à puncto μ ad planum circuli $\alpha \beta \gamma \delta$, cadit in communem sectionem circulorum $\alpha \beta \gamma \delta$ & $\alpha \kappa \mu \gamma$, id est in rectam lineam $\alpha \gamma$ (per 38. vndecimae Elem.) eo quod duo plana $\alpha \beta \gamma \delta$ & $\alpha \kappa \mu \gamma$ sunt inter se recta. perpendicularis autem ducta à puncto v ad planum circuli $\epsilon \zeta \eta \theta$, cadit in $\epsilon \eta$: perpendicularis ergo ducta à puncto μ in rectam $\alpha \gamma$, maior est perpendiculari ducta à puncto v in rectam $\epsilon \eta$: Cum itaque duo circulorum segmenta $\alpha \kappa \mu \gamma$, & $\lambda v \eta$, sint æqualia: in iisque sumpta sint quomodolibet puncta μ & v : sitque perpendicularis ducta à puncto μ in $\alpha \gamma$, maior perpendiculari ducta à puncto v in $\epsilon \eta$: igitur circumferentia $\mu \gamma$ maior est circumferentiâ $v \eta$. Aequalis autem est circumferentia $\mu \kappa$, circumferentiâ $v \lambda$ (vtraque enim earum æqualis est ei circumferentiâ, quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti, propterea quod puncta μ & v sunt poli circulorum $\beta \kappa \delta$ & $\zeta \lambda \theta$) tota ergo $\kappa \mu \gamma$ circumferentia, maior est quàm tota $\lambda v \eta$ circumferentia. Cum itaque tota $\alpha \kappa \mu \gamma$, æqualis sit toti $\epsilon \lambda v \eta$, inde verò ablata $\kappa \mu \gamma$, maior sit quàm $\lambda v \eta$: reliqua igitur $\alpha \kappa$, minor est quàm reliqua $\epsilon \lambda$: circumferentia autem $\alpha \kappa$ subtendit angulum $\kappa \xi \alpha$: circumferentia verò $\lambda \epsilon$, angulum $\lambda \epsilon$: minor ergo est angulus $\kappa \xi \alpha$, angulo $\lambda o e$ (per ultimam 6. Elem.) Et quia angulus $\kappa \xi \alpha$, est inclinatio, qua planum $\beta \kappa \delta$ inclinatur ad planum circuli $\alpha \beta \gamma \delta$: angulus autem $\lambda o e$ inclinatio est qua planum $\zeta \lambda \theta$, inclinatur ad planum circuli $\epsilon \zeta \eta \theta$. Igitur inclinatio circuli $\beta \kappa \delta$ ad circulum $\alpha \beta \gamma \delta$ minor est, quàm inclinatio circuli $\zeta \lambda \theta$ ad circulum $\epsilon \zeta \eta \theta$. Sedenim poli ipsorum $\beta \kappa \delta$, $\zeta \lambda \theta$ circulorum æqualiter distent à subiectis planis, id est sit perpendicularis ducta à puncto μ ad planum circuli $\alpha \beta \gamma \delta$, æqualis perpendiculari ductæ à puncto v ad planum circuli $\epsilon \zeta \eta \theta$. Dico circulos $\beta \kappa \delta$, $\zeta \lambda \theta$, similiter inclinatos esse ad circulos $\alpha \beta \gamma \delta$, $\epsilon \zeta \eta \theta$: id est dico angulū $\kappa \xi \alpha$ æqualem esse angulo $\lambda o e$. manente enim eadem figurarum constructione, iisdem quibus antea vñ sumus rationibus ostendemus, angulum $\kappa \xi \alpha$ esse inclinationem quâ planum circuli $\beta \kappa \delta$ inclinatur ad planum circuli $\alpha \beta \gamma \delta$: & angulū $\lambda o e$ inclinationem item esse quâ planum circuli $\zeta \lambda \theta$ inclinatur ad planum circuli $\epsilon \zeta \eta \theta$. Dico itaque angulum $\kappa \xi \alpha$ angulo $\lambda o e$ esse æqualem. Quia enim duo sunt æqualia circulorum segmenta $\alpha \kappa \mu \gamma$ & $\epsilon \lambda v \eta$, in quibus puncta quomodo lubet sumpta, sunt μ , & v , & perpendicularis ducta à puncto μ in rectam $\alpha \gamma$, æqualis est perpendiculari ductæ à puncto v ad rectam $\epsilon \eta$: igitur circumferentia $\mu \gamma$, æqualis est circumferentiâ $v \eta$. Est verò etiam $\mu \kappa$, æqualis ipsi $v \lambda$: vtraque enim ipsarum est æqualis circumferentiâ, quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti: tota ergo $\kappa \mu \gamma$ toti $\lambda v \eta$ est æqualis: Est autem & tota $\alpha \kappa \mu \gamma$, toti $\epsilon \lambda v \eta$ æqualis. Quare reliqua circumferentia $\alpha \kappa$, reliquæ circumferentiæ $\epsilon \lambda$ æqualis est. Atqui circumferentia $\alpha \kappa$ subtendit angulum $\kappa \xi \alpha$, circumferentia autem $\epsilon \lambda$ subtendit angulum $\lambda o e$: igitur angulus $\kappa \xi \alpha$, æqualis est angulo $\lambda o e$ (per 27. tertij Element.) est autem



autem angulus $\kappa \xi$ & inclinatio qua planū circuli $\epsilon \kappa \delta$ inclinatur ad planū circuli $\alpha \epsilon \gamma \delta$: angulus verò $\lambda \theta$ & inclinatio item est, quā planum circuli $\zeta \lambda \theta$ inclinatur ad planum circuli $\epsilon \zeta \eta \theta$: inclinatio ergo quā circulus $\beta \kappa \delta$ inclinatur ad circulum $\alpha \beta \gamma \delta$, æqualis est inclinationi quā circulus $\zeta \lambda \theta$ inclinatur ad circulum $\epsilon \zeta \eta \theta$: ipsi ergo $\beta \kappa \delta$, $\zeta \lambda \theta$ circuli, similiter inclinantur ad circulos $\alpha \epsilon \gamma \delta$, $\epsilon \zeta \eta \theta$: didicimus enim (in sexta definitione primi libri) planum ad planum similiter inclinari, atque alterum planū ad alterum, cum in utroque plano ductæ rectæ lineæ, quæ angulos rectos faciant cum communi sectione planorum in iisdem punctis, æquales angulos continent.

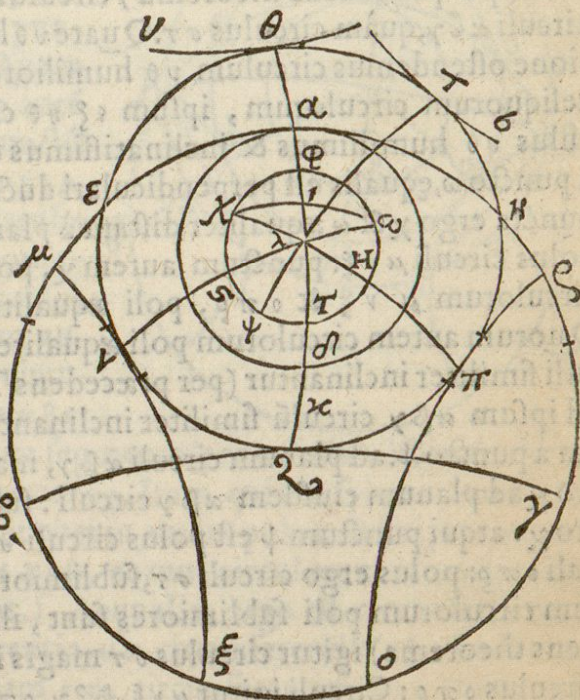
THEOREMA 22.

Si in sphæra maximus circulus vnum quidem circulum tangat, alium verò ei parallelum secet, positum inter sphæræ centrum & eum circulum quem tangit maximus circulus, polus autem maximi circuli fuerit inter vtrunque parallelorum, describanturque maximi circuli tangentes duorum parallelorum maiorem: hi omnes erunt inclinati ad maximum circulum: & eorum rectissimus quidem erit ille, cuius contactus erit in eo puncto, in quo maius segmentum bifariam diuiditur. humillimus verò & maximè inclinatus, cuius contactus erit in eo puncto, in quo minus segmentum bifariam diuiditur. reliquorum autem, illi quidem qui æqualiter distant ab alterutro eorum punctorum in quibus segmenta bifariam secantur, sunt similiter inclinati: qui verò contactum remotiorem habet à puncto, in quo maius segmentum bifariam secatur, inclinatio perpetuò est, quàm qui conta-

ctum eidem puncto propiorem habet. poli
denique maximorum circulorum erunt in
vno circulo, qui & minor erit eo circulo,
quem tangit maximus in principio circu-
lus, & eidem parallelus erit.

In sphaera enim maximus circulus $\alpha\epsilon\gamma$, circulum aliquem in eadem sphæ-
ra descriptum $\alpha\delta$ nempe, tangat in puncto α : secet autem alium circulum
 $\epsilon\zeta\eta\theta$ parallelum ipsi $\alpha\delta$, & positum inter sphærae centrum & ipsum $\alpha\delta$ cir-
culum: sit autem polus circuli $\alpha\beta\gamma$ inter circulos $\alpha\delta$ & $\epsilon\zeta\eta\theta$, in puncto κ :
& describantur maximi circuli $\mu\nu\xi$, $\beta\zeta\gamma$, $\sigma\pi\rho$, $\sigma\tau$, $\theta\nu$ qui tangant ipsum
 $\epsilon\zeta\eta\theta$ maiorem parallelorum. & circulus quidem $\beta\zeta\gamma$ tangat ipsum $\epsilon\zeta\eta\theta$
in puncto ζ , in quo $\epsilon\zeta\eta$ maius segmentum circuli $\epsilon\zeta\eta\theta$, bifariam se-
catur: item $\nu\theta$ circulus, tangat eundem circulum $\epsilon\zeta\eta\theta$ in puncto θ , in
quo ipsum $\epsilon\theta\eta$ minus segmentum circuli $\epsilon\zeta\eta\theta$, bifariam diuiditur: puncta
autem ν & π , in quibus duo circuli $\mu\nu\xi$ & $\sigma\pi\rho$ tangunt ipsum $\epsilon\zeta\eta\theta$
circulum, æqualiter distent ab alterutro punctorum, in quibus segmenta $\epsilon\theta\eta$
& $\epsilon\zeta\eta$ bifariam secantur, id est, ab alterutro punctorum θ & ζ : circulus deni-
que $\tau\sigma$ tangat circulum $\epsilon\zeta\eta\theta$ in alio quouis puncto. Dico circulos $\mu\nu\xi$, $\beta\zeta\gamma$,
 $\sigma\pi\rho$, $\sigma\tau$, $\theta\nu$, inclinatos esse ad circulum $\alpha\beta\gamma$: & eorum rectissimum esse $\beta\zeta\gamma$:
inclinatissimum verò $\nu\theta$: ipsos autem $\mu\nu\xi$ & $\sigma\pi\rho$, similiter esse inclinatos:
ipsum item $\sigma\tau$ magis inclinatum esse ad circulum $\alpha\beta\gamma$, quàm circulum $\sigma\pi\rho$.
polos denique ipsorum $\mu\nu\xi$, $\beta\zeta\gamma$, $\sigma\pi\rho$, $\sigma\tau$, $\theta\nu$, circulorum, esse in vno circu-
lo, qui & parallelus erit ipsi $\alpha\delta$, & minor erit ipso $\alpha\delta$. Sumatur enim polus
ipsorum $\alpha\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$, parallelorum, qui sit λ punctum, & per puncta α & λ de-
scribatur maximus circulus $\alpha\lambda$ (per 20. primi.) Et quia in sphaera duo circuli
 $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\delta$, se mutuò tangunt, per contactum autem & polos vnus descri-
ptus est maximus circulus $\alpha\lambda$: igitur circulus $\alpha\lambda$ transit etiam per polos cir-
culi $\alpha\beta\gamma$ (per. 5. huius). Ergo circulus $\alpha\lambda$, rectus est ad circulum $\alpha\epsilon\gamma$ (per. 15.
primi). Atqui punctum κ est polus circuli $\alpha\beta\gamma$ (per hypothesin) Igitur si cir-
culus $\alpha\lambda$ compleatur, transibit per punctum κ : transeat ergo, sitque $\alpha\lambda\kappa$ cir-
culus. Quia ergo in sphaera duo circuli $\alpha\beta\gamma$, $\epsilon\zeta\eta\theta$ se mutuò secant: perque eo-
rum polos maximus circulus $\alpha\lambda\kappa$ descriptus est: igitur circulus $\alpha\lambda\kappa$ bifa-
riam secat intercepta circulorum segmenta (per. 9. huius). Sit ergo punctum
 ζ , in quo segmentum $\epsilon\zeta\eta$ bifariam sectum est: punctum autem θ , in quo seg-
mentum $\epsilon\theta\eta$, bifariam sectum est. ergo si $\alpha\lambda\kappa$ circulus compleatur, transibit
etiam per puncta θ & ζ : transeat ergo per ea puncta, sitque circulus $\theta\alpha\lambda\kappa\zeta$.
Et quia punctum κ est polus circuli $\alpha\beta\gamma$: circulus autem $\alpha\epsilon\gamma$, maximus est:
igitur $\alpha\kappa$ æqualis est circumferentiæ quam subtendit latus quadrati in ma-
ximo circulo inscripti. Et quia circulus $\epsilon\zeta\eta\theta$ minor est maximo circulo, &
descriptus est inter sphærae centrum & circulum $\alpha\delta$, estque eius polus in
puncto λ : igitur circumferentia $\lambda\zeta$, minor est quàm ea quâ subtendit latus
quadrati in maximo circulo inscripti. Quia ergo $\alpha\kappa\zeta$ maior est quàm ea quâ
subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti: ipsa autem $\lambda\zeta$ minor est
eâ quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti: Si ergo de-
sumamus circumferentiam æqualem ei quam subtendit latus quadrati in
maximo circulo inscripti, cuius initium sit à puncto ζ , ea cadet inter puncta
 λ & α : Sumatur ergo circumferentia æqualis ei quam subtendit latus qua-
drati

drati in maximo circulo inscripti, sitque φ , & polo λ , intervalloque $\lambda\phi$, describatur circulus $\phi\chi\omega$: is ergo circulus parallelus est ipsis $\alpha\delta$, $\epsilon\eta\theta$, circulis. Iam per punctum λ & per singula ipsorum π , ν , τ , punctorum, ducantur maximi circuli $\nu\lambda\omega$, $\pi\lambda\chi$, $\tau\lambda\phi$: & quia $\nu\lambda$ æqualis est ipsi $\lambda\varphi$: (vtraque enim est ex polo circuli $\epsilon\eta\theta$) & $\lambda\omega$ æqualis est ipsi $\lambda\phi$, eò quòd vtraque est ex polo circuli $\phi\chi\omega$: tota igitur $\nu\lambda\omega$, æqualis est toti $\varphi\lambda\phi$: Sed $\varphi\lambda\phi$ æqualis est ei quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti (per constructionem) Ergo & $\nu\lambda\omega$ æqualis est ei quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti. Eodem modo ostendemus singulas ipsarum $\chi\lambda\pi$, $\phi\lambda\tau$, $\tau\lambda\theta$ circumferentiarum, æquales esse ei circumferentiæ, quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti: Et quia in sphæra duo circuli $\mu\nu\xi$, $\epsilon\eta\theta$, se mutuò tangunt: per eorum autem contactum & per polos vnus, nempe per polos ipsius $\epsilon\eta\theta$, descriptus est maximus circulus $\nu\lambda\omega$: igitur circulus $\nu\lambda\omega$ trāssit per polos circuli $\mu\nu\xi$ (per, 5. huius) ob eamque causam circulus $\nu\lambda\omega$ rectus erit ad circulum $\mu\nu\xi$ (per. 15. primi Sphæric) Quia verò circulus $\mu\nu\xi$ est maximus: ergo ea quæ ex eius polo deducitur æqualis est ei quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti. Est autem circumferentia $\nu\lambda\omega$ æqualis ei circumferentiæ quam subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti (vt monstratum est) Ergo connexa linea $\nu\omega$ erit ex polo circuli $\mu\nu\xi$: ob eamque causam punctum ω polus est circuli $\mu\nu\xi$. Eodem modo ostendemus punctum ϕ esse polum circuli $\beta\gamma$, & punctum χ polum esse circuli $\sigma\pi$: & punctum ϕ , polum esse circuli $\sigma\tau$: & punctum τ polum esse circuli $\nu\theta$. Quare circuli $\mu\nu\xi$, $\beta\gamma$, $\sigma\pi$, $\sigma\tau$, $\nu\theta$, polos habent in vno eodémque circulo $\phi\chi\omega$, qui & parallelus est ipsi $\alpha\delta$ circulo, & minor eodem $\alpha\delta$. Aio præterea circulos $\mu\nu\xi$, $\beta\gamma$, $\sigma\pi$, $\sigma\tau$, $\nu\theta$, inclinatos esse ad circulum $\alpha\beta\gamma$, & eorum rectissimum quidem esse $\beta\gamma$, inclinatissimum autem $\nu\theta$. ipsos autem $\mu\nu\xi$ & $\sigma\pi$ similiter esse inclinatos: ipsum denique $\sigma\tau$ magis inclinari ad $\alpha\beta\gamma$ circulum, quàm circulum $\sigma\pi$. Quia enim (ex hypothesi) circumferentia $\nu\varphi$ æqualis est circumferentiæ $\varphi\pi$, suntque circumferentiæ eiusdem circuli: igitur circumferentia $\nu\varphi$ similis est circumferentiæ $\varphi\pi$: Sed circumferentia $\nu\varphi$, similis est circumferentiæ $\sigma\tau$, circumferentia autem $\varphi\pi$ circumferentiæ $\tau\eta$: suntque $\sigma\tau$ & $\tau\eta$ eiusdem circuli circumferentiæ. Quare circumferentia $\sigma\tau$ æqualis est circumferentiæ $\tau\eta$: Atqui circumferentia $\tau\eta$ æqualis est circumferentiæ $\chi\phi$ (anguli enim $\chi\lambda\phi$ & $\tau\lambda\eta$, quos illæ circumferentiæ subtendunt, ad verticem sunt, & ob id æquales) & circumferentia $\sigma\tau$ circumferentiæ $\phi\omega$: igitur circumferentia $\phi\omega$ æqualis est circumferentiæ $\phi\chi$. In circuli ergo $\phi\chi\omega$ diametro interiectâ inter puncta ϕ & τ erectum est circuli segmentum $\kappa\tau\phi$, de quo desumpta est circumferentia $\tau\kappa$, quæ minor est dimidia parte totius $\kappa\tau\phi$ segmenti: à circulo autem $\phi\chi\omega$, æquales circumferentiæ desumptæ sunt $\chi\phi$ nempe & $\phi\omega$: igitur recta ducta à puncto κ in punctum χ æqualis est rectæ ductæ à puncto κ ad punctum ω (per 12. huius) Quocirca



F ij

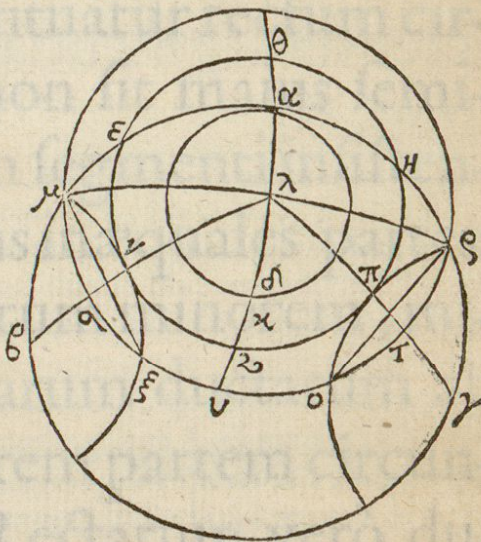
circulus polo κ & interuallo $\kappa\chi$ descriptus, transibit etiam per punctum ω :
 transeat ergo, sitque ut circulus $\chi\omega$: circulus ergo $\chi\omega$, parallelus est circu-
 lo $\alpha\beta\gamma$: sunt enim circa eosdem polos, eò quod punctum κ , est polus circuli
 $\alpha\beta\gamma$: & quia circulus $\chi\omega$, parallelus est circulo $\alpha\beta\gamma$: igitur perpendicularis
 ducta à puncto χ , ad planum circuli $\alpha\beta\gamma$, æqualis est perpendiculari ductæ à
 puncto ω , ad idem planum circuli $\alpha\beta\gamma$, & earum perpendicularium utriusque
 æqualis est perpendicularis ducta à puncto ι ad illud ipsum planum, ad quod
 reliquæ duæ à punctis ω & χ ductæ sunt: Sed perpendicularis ducta à puncto
 ι ad planum circuli $\alpha\beta\gamma$, maior est quàm perpendicularis ducta à puncto ϕ
 ad planum eiusdem $\alpha\beta\gamma$ circuli: ergo perpendicularis ducta à puncto ω , ad
 planum circuli $\alpha\beta\gamma$, maior est perpendiculari ducta à puncto ϕ ad planum
 circuli $\alpha\beta\gamma$: eodémque modo perpendicularis à puncto χ , maior est perpen-
 diculari ducta à puncto ϕ : eò quod utraque perpendicularium ductarum à
 punctis χ & ω , æqualis est perpendiculari ductæ à puncto ι . Quare punctum
 ω sublimius est puncto ϕ . Atqui punctum ω , polus est circuli $\mu\nu\xi$: punctum
 autem ϕ , polus est circuli $\beta\zeta\gamma$: polus igitur circuli $\mu\nu\xi$ sublimior est polo
 circuli $\beta\zeta\gamma$: Sed quorum circulorum poli sublimiores sunt, illi circuli in-
 clinationes sunt (per præcedens theorema) igitur circulus $\mu\nu\xi$ inclinatio-
 est ad circulum $\alpha\beta\gamma$, quàm circulus $\beta\zeta\gamma$, ob idque circulus $\beta\zeta\gamma$ rector est
 circulo $\mu\nu\xi$. Eodémque modo ostendemus circulum $\beta\zeta\gamma$, rectorum esse
 quolibet reliquorum circulorum tangentium circulum $\epsilon\zeta\eta\theta$. Quare circu-
 lus $\beta\zeta\gamma$ rectissimus omnium est. Aio etiam circulum $\nu\theta$ esse inclinatis-
 simum. Quia enim perpendicularis ducta à puncto τ ad planum circuli $\alpha\beta\gamma$,
 maior est perpendiculari ducta à puncto $\downarrow$ ad planum eiusdem $\alpha\beta\gamma$ circuli:
 punctum ergo τ sublimius est puncto $\downarrow$: est autem punctum τ polus circuli
 $\nu\theta$, punctum autem $\downarrow$ polus est circuli $\sigma\tau$: polus ergo circuli $\nu\theta$ sublimior est
 polo circuli $\sigma\tau$: Circuli autem, quorum poli sunt sublimiores, inclinationes
 sunt (per præcedens theorema) circulus ergo $\nu\theta$, inclinatio est ad planum
 circuli $\alpha\beta\gamma$, quàm circulus $\sigma\tau$: Quare $\nu\theta$ humilior est, quàm $\sigma\tau$. eadem ra-
 tione ostendemus circulum $\nu\theta$ humiliorem & inclinatiorem esse quolibet
 reliquorum circulorum, ipsum $\epsilon\zeta\eta\theta$ circulum tangentium. Quare cir-
 culus $\nu\theta$ humillimus & inclinatissimus est: Et quia perpendicularis ducta
 à puncto ω , æqualis est perpendiculari ductæ à puncto χ ad planum circuli $\alpha\beta\gamma$:
 puncta ergo χ & ω æqualiter distant à plano circuli $\alpha\beta\gamma$: est autem punctum ω
 polus circuli $\mu\nu\xi$: punctum autem χ , polus est circuli $\sigma\pi\rho$: duorum ergo
 circulorum $\mu\nu\xi$ & $\sigma\pi\rho$, poli æqualiter distant à plano circuli $\alpha\beta\gamma$:
 Quorum autem circulorum poli æqualiter distant ab eodem plano, ipsi cir-
 culi similiter inclinantur (per præcedens Theorema.) Circuli ergo $\mu\nu\xi$, $\sigma\pi\rho$
 ad ipsum $\alpha\beta\gamma$ circulum similiter inclinantur. Item quia perpendicularis du-
 cta à puncto $\downarrow$, ad planum circuli $\alpha\beta\gamma$, maior est perpendiculari ducta à pun-
 cto χ ad planum eiusdem $\alpha\beta\gamma$ circuli: sublimius ergo est punctum $\downarrow$, pun-
 cto χ : atqui punctum $\downarrow$ est polus circuli $\sigma\tau$: punctum verò χ polus est cir-
 culi $\sigma\pi\rho$: polus ergo circuli $\sigma\tau$, sublimior est polo circuli $\sigma\pi\rho$: quorum au-
 tem circulorum poli sublimiores sunt, illi magis sunt inclinati (per præce-
 dens theorema) igitur circulus $\sigma\tau$ magis inclinatur ad circulum $\alpha\beta\gamma$, quàm
 circulus $\sigma\pi\rho$: Circuli igitur $\mu\nu\xi$, $\beta\zeta\gamma$, $\sigma\pi\rho$, $\sigma\tau$, $\nu\theta$, ad circulum $\alpha\beta\gamma$ incli-
 nantur, & eorum rectissimus quidem & minimùm inclinatus est circulus
 $\beta\zeta\gamma$: humillimus autem & maximè inclinatus est circulus $\nu\theta$: Circuli au-
 tem $\mu\nu\xi$ & $\sigma\pi\rho$, similiter inclinantur: Circulus autem $\sigma\tau$ ad circulum $\alpha\beta\gamma$
 magis inclinatur, quàm circulus $\sigma\pi\rho$: poli denique omnium ipsorum sunt
 in vno circulo parallelo ipsi $\alpha\beta$, & minore quàm sit ipse $\alpha\beta$ circulus.

THEOREMA 23.

Iisdem positis, si circumferentiæ à contactibus ad nodos sint æquales, prædicti circuli maximi similiter inclinati erunt.

Sint enim circumferentiæ æquales $\nu\mu$ & $\pi\rho$, quæ à contactibus ν , & π , pergunt ad nodos (qui sunt puncta μ & ρ). Dico fore ut circuli $\mu\nu\xi$, & $\pi\rho$ sint similiter inclinati ad circumulum $\alpha\beta\gamma$: sumatur enim polus circulorum $\alpha\delta$, & $\epsilon\zeta$, & $\eta\theta$ parallelorum, qui sit punctum λ : & per puncta α , λ , describatur maximus circulus $\theta\alpha\lambda\kappa\zeta\nu$. transibit ergo per punctum κ (per 5. huius) cum sit polus circuli $\alpha\beta\gamma$. per punctum ergo λ & per utrunque punctorum ν & π , describantur maximi circuli $\lambda\nu\beta$, $\lambda\pi\gamma$ (per 20. primi.) Et quia in sphæra duo circuli $\epsilon\zeta\eta\theta$ & $\mu\nu\xi$, se mutuò tangunt: per unius autem polum & mutuuum contactum descriptus est maximus circulus $\lambda\nu\beta$: igitur circulus $\lambda\nu\beta$ transit per polos circuli $\mu\nu\xi$ (per 5. huius) ob eamque causam circulus $\lambda\nu\beta$ ad circumulum $\mu\nu\xi$ rectus est, (per 15. primi.) Eodem modo monstrabimus circumulum $\lambda\pi\gamma$ transire per polos circuli $\pi\rho$, & rectum esse ad eum. Quia verò in circulis æqualibus $\mu\nu\xi$ & $\pi\rho$, inque eorum diametris inceptis à punctis ν & π , æqualia & recta circulorum segmenta insistant $\nu\lambda$ nempe & $\pi\lambda$, & cætera quæ faciunt ad integritatem segmentorum ipsis diametris insistentium, à quibus æquales circumferentiæ $\nu\lambda$ & $\pi\lambda$ ablatae sunt minores existentes integris semissibus totorum segmentorum toti diametro insistentiū.

A circulis autem primò positis æquales circumferentiæ $\mu\nu$ & $\pi\rho$ desumptæ sunt: recta ergo linea ducta à puncto λ ad punctum μ , æqualis est rectæ ductæ à puncto λ ad punctum ρ (per 12. huius) Quare circulus polo quidem λ , intervallo autē $\lambda\mu$ descriptus, transibit etiam per punctū ρ : transeat ergo, sitque circulus $\mu\xi\sigma\rho$, qui parallelus sit ipsis $\alpha\delta$, & $\epsilon\zeta\eta\theta$ circulis (habet enim eosdem polos ex hypothesi.) Et quia in sphæra duo circuli $\alpha\beta\gamma$, $\mu\xi\sigma\rho$, se mutuò secant: per eorum autem polos descriptus est maximus circulus $\theta\alpha\lambda\kappa\zeta\nu$: igitur circulus $\theta\alpha\lambda\kappa\zeta\nu$,



bifariam secat intercepta circulorum segmenta (per 9. huius.) Quare circumferentiā $\mu\nu$, æqualis est circumferentiæ $\nu\rho$. Item quia in sphæra duo circuli $\mu\nu\xi$ & $\mu\xi\sigma\rho$, se mutuò secant: per eorum autem polos descriptus est maximus circulus $\lambda\nu\beta$ igitur circulus $\lambda\nu\beta$, eorum circulorum intercepta segmenta bifariam secat (per 9. huius.) Æqualis ergo est circumferentiā $\mu\nu$ circumferentiæ $\nu\xi$: item circumferentiā $\mu\sigma$ circumferentiæ $\sigma\xi$. Eodemque modo ostendemus circumferentiā $\pi\rho$, circumferentiæ $\pi\gamma$: & circumferentiā $\pi\tau$, circumferentiæ $\tau\rho$ esse æqualem. Quia ergo circumferentiā $\mu\nu$ æqualis est circumferentiæ $\pi\rho$ (ex hypothesi) circumferentiā autem $\mu\nu\xi$ dupla est ipsius $\mu\nu$, circumferentiā autem $\pi\rho$ dupla est ipsius $\pi\rho$: igitur $\mu\nu\xi$ æqualis est ipsi $\pi\rho$: suntque $\mu\nu\xi$ & $\pi\rho$ circumferentiæ æqualium circulorum. Quocirca recta linea subtendens circumferentiā $\mu\nu\xi$ æqualis est rectæ subtendenti circumferentiā $\pi\rho$ (per 29. tertij Elem.) Atqui recta

Subtendens circumferentiam $\mu\nu\xi$, subtendit etiam circumferentiam $\mu\sigma\xi$: recta autem subtendens circumferentiam $\sigma\pi\rho$, subtendit etiam circumferentiam $\sigma\tau\rho$: recta igitur subtendens circumferentiam $\mu\sigma\xi$, æqualis est rectæ subtendenti circumferentiam $\sigma\tau\rho$. atqui $\mu\sigma\xi$ & $\sigma\tau\rho$ sunt circumferentiæ eiusdem circuli: æqualis ergo est circumferentia $\mu\sigma\xi$ circumferentiæ $\sigma\tau\rho$: sed circumferentia $\mu\sigma$ est semissis circumferentiæ $\mu\sigma\xi$: circumferentia autem $\rho\tau$ est semissis circumferentiæ $\sigma\tau\rho$: æqualis ergo est $\mu\sigma$ ipsi $\rho\tau$. est verò etiam tota $\mu\sigma\xi\nu$, æqualis toti $\nu\sigma\tau\rho$. Quare reliqua $\sigma\xi\nu$, æqualis est reliquæ $\nu\sigma\tau$: sunt autem $\sigma\xi\nu$ & $\nu\sigma\tau$ circumferentiæ eiusdem circuli: similis ergo est $\sigma\xi\nu$ ipsi $\nu\sigma\tau$. Atqui circumferentia $\sigma\xi\nu$, similis est circumferentiæ $\nu\zeta$: circumferentia autem $\nu\sigma\tau$ circumferentiæ $\zeta\pi$ (per 10. huius) Ergo $\nu\zeta$ circumferentia, similis est circumferentiæ $\zeta\pi$: sunt verò $\nu\zeta$ & $\zeta\pi$, eiusdem circuli circumferentiæ: æqualis igitur est circumferentia $\nu\zeta$, circumferentiæ $\zeta\pi$. Circuli ergo $\mu\nu\xi$ & $\sigma\pi\rho$, æqualiter distant ab utralibet sectionum in quibus segmenta $\epsilon\zeta\eta$ & $\epsilon\theta\eta$ secantur bifariam: similiter ergo inclinantur (per præcedentem propositionem.) Circuli ergo $\mu\nu\xi$ & $\sigma\pi\rho$ ad circumulum $\alpha\beta\gamma$ similiter inclinantur.

Finis secundi Sphæricorum Theodosij.

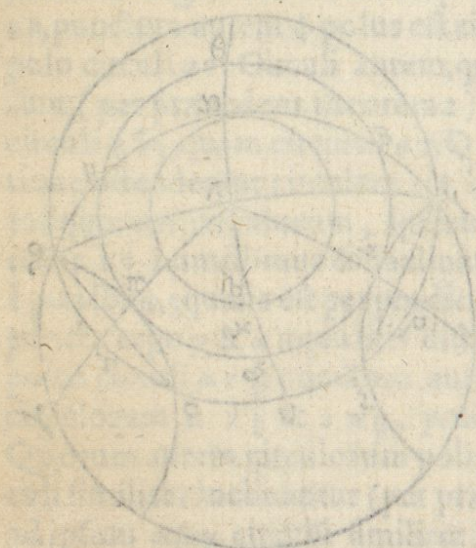


Diagram illustrating the geometric proof of the proposition. The sphere is represented by a circle with center α . Several great circles are drawn, intersecting at various points. The diagram shows the relationship between the arcs and angles involved in the proof, specifically the arcs $\mu\nu\xi$, $\sigma\pi\rho$, $\mu\sigma\xi$, $\sigma\tau\rho$, $\mu\sigma$, $\rho\tau$, $\sigma\xi\nu$, $\nu\sigma\tau$, $\nu\zeta$, and $\zeta\pi$.



THEODOSII TRI-
POLITÆ SPÆRICORVM,
LIBER TERTIVS,

*Ioanne Pena Regio Mathematico
interprete.*

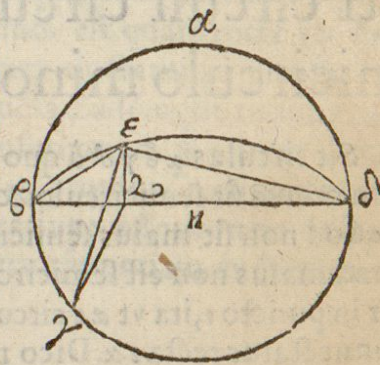
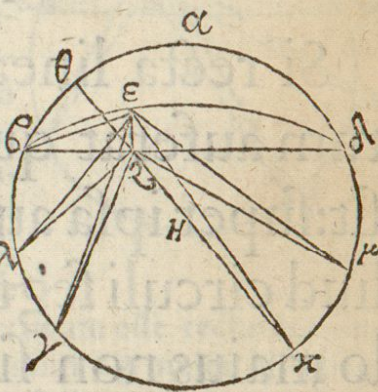
THEOREMA I.

Si recta linea circulum in partes inæqua-
les secet, super qua constituatur rectum cir-
culi segmentum, quod non sit maius semi-
circulo: diuidatur autem segmenti insisten-
tis circumferentia in duas inæquales partes:
recta linea subtendēs earum minorem, mi-
nima est linearum rectarum ductarum ab
eodem puncto ad maiorem partem circun-
ferentiæ primi circuli. Rectarum verò du-
ctarum ab eo ipso puncto ad circunferen-
tiam interceptam inter illam minimam re-
ctam, & diametrum in quam cadit perpen-
dicularis deducta ab illo puncto, semper
minimę propior, remotiore minor est. Om-
nium autem maxima est ea quæ ab illo eo-
dem puncto ducitur ad extremitatem eius-

dem diametri. Item recta subtendens maiorem circumferentiam segmenti insistentis, minima est earum quæ cadunt in circumferentiam interceptam inter ipsam & diametrum, semperque huic propior remotiore minor est. Si verò recta linea subiectum circulum secans, sit eius diameter, & reliqua omnia eadem sint vt supra, recta linea subtendens minorem partem circumferentiæ segmenti insistentis, minima est rectarum ductarum ab illo eodem puncto ad primi & subiecti circuli circumferentiam, ea verò quæ maiorem partem circumferentiæ segmenti insistentis subtendit, maxima est.

Sit enim circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, quem secet in partes inæquales recta linea $\beta\delta$, ita vt circumferentia $\beta\gamma\delta$ sit maior quàm circumferentia $\beta\alpha\delta$, & super recta linea $\epsilon\delta$ insinat rectum circuli segmentum $\beta\epsilon\delta$, quod non sit maius semicirculo: diuidaturque circumferentia $\beta\epsilon\delta$ in partes inæquales in puncto ϵ , ita vt circumferentia $\epsilon\delta$ sit minor quàm circumferentia $\epsilon\beta$, connectaturque recta linea $\epsilon\beta$. Dico rectam $\beta\epsilon$ minimam esse earum omnium quæ à puncto ϵ in circumferentiam $\beta\gamma\delta$, duci possint: ducatur enim perpendicularis à puncto ϵ ad planum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, quæ sit $\epsilon\zeta$ (per 11. vndecimi Elementorum) cadet ergo in lineam $\epsilon\delta$, id est in communem sectionem planorum $\alpha\beta\gamma\delta$ & $\beta\epsilon\delta$: propterea quòd segmentum $\beta\epsilon\delta$ rectum est ad circulum $\alpha\beta\gamma\delta$. Sumatur centrum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, sitque punctum η , ducaturque recta $\zeta\eta$ quæ producat vtrunque ad partes θ & κ , & à puncto ϵ ad $\beta\gamma\delta$ circumferentiam, ducatur recta $\epsilon\lambda$, connectaturque recta $\zeta\lambda$. Et quia $\epsilon\zeta$ erecta est ad planum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, facit igitur angulos rectos cum omnibus rectis lineis ipsam tangentibus, & positus in eodem plano circuli $\alpha\beta\gamma\delta$. Atqui vtraque ipsarum $\zeta\epsilon$ & $\zeta\lambda$ posita est in plano circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ & tangit ipsam $\epsilon\zeta$: rectus ergo est vterque $\beta\zeta\epsilon$ & $\lambda\zeta\epsilon$ angulorum. Item, quia $\epsilon\zeta$ minor est quàm $\lambda\zeta$ (per 7. tertij Elementorum) quadratum ergo quod fit à $\epsilon\zeta$ minus est quadrato quod fit à $\lambda\zeta$, vtrique addatur commune quadratum quod fit ex $\epsilon\zeta$: duo quadrata ergo quæ fiunt ex $\epsilon\zeta$, $\zeta\beta$, minora sunt duobus quadratis factis ex $\epsilon\zeta$, $\zeta\lambda$: atqui duobus quadratis factis ex $\epsilon\zeta$, $\zeta\epsilon$, æquale est quadratum factum ex $\epsilon\beta$: duobus autem quadratis factis ex $\epsilon\zeta$, $\zeta\lambda$ æquale est quadratum quod fit ex $\epsilon\lambda$ (per 47. primi Elem.) quadratum ergo quod fit

ex $\epsilon\beta$, minus est quadrato facto ex $\epsilon\lambda$. Quare recta linea $\epsilon\beta$, minor est quàm recta linea $\epsilon\lambda$. Eadem ratione ostendemus rectam lineam $\epsilon\beta$ esse minorem qualibet rectâ ductâ à puncto ϵ ad $\beta\gamma\delta$ circumferentiam. Igitur recta $\epsilon\beta$ minima est rectarum linearum ductarum à puncto ϵ ad $\beta\gamma\delta$ circumferentiam. Dico præterea rectarum linearum omnium ductarum à puncto ϵ ad circumferentiam interiectam inter puncta β & κ , eam quæ propior sit ipsi $\epsilon\beta$, minorem esse remotiore: Ducatur enim recta $\epsilon\gamma$, connectaturque recta $\gamma\delta$. quia ergo $\gamma\lambda$ minor est quàm $\gamma\delta$: ergo quadratum quod fit ex $\gamma\lambda$, minus est quadrato facto ex $\gamma\delta$: addatur utrique commune quadratum quod fit ex $\epsilon\gamma$: duo igitur quadrata facta ex lineis $\epsilon\gamma$ & $\gamma\lambda$, minora sunt duobus quadratis factis ex lineis $\epsilon\gamma$ & $\gamma\delta$: Sed quadrata facta ex $\lambda\gamma$, $\gamma\delta$ æqualia sunt quadrato facto ex $\lambda\epsilon$: quadrata autem facta ex $\gamma\delta$, $\gamma\epsilon$ æqualia sunt quadrato facto ex $\gamma\epsilon$. quadratum ergo factum ex $\lambda\epsilon$, minus est quadrato facto ex $\gamma\epsilon$. Quocirca, recta linea $\lambda\epsilon$ minor est quàm recta linea $\gamma\epsilon$. Eodem modo ostendemus rectarum ductarum à puncto ϵ ad circumferentiam quæ est inter puncta β & κ , eam quæ propior sit ipsi $\beta\epsilon$, esse minorem remotiore ducantur rectæ $\epsilon\delta$, $\epsilon\kappa$. Dico rectam $\epsilon\kappa$ maximam esse rectarum ductarum à puncto ϵ ad circumferentiam interiectam inter puncta β & δ , id est ad circumferentiam $\beta\kappa\delta$. Quia enim $\kappa\gamma$ maior est quàm $\gamma\delta$ (per 7. tertij Elem.) quadratum ergo quod fit ex $\kappa\gamma$, maius est quadrato facto ex $\gamma\delta$: addatur utrique eorum commune quadratū quod fit ex $\gamma\epsilon$: quadrata igitur quæ fiunt ex $\kappa\gamma$, $\gamma\epsilon$ (id est quadratū quod fit ex $\kappa\epsilon$) maiora sunt quadratis quæ fiunt ex $\gamma\delta$, $\gamma\epsilon$, id est quadrato facto ex $\gamma\epsilon$. Quare recta linea $\kappa\epsilon$ maior est quàm $\gamma\epsilon$. Eodem modo ostendemus rectam $\kappa\epsilon$ maiorem esse qualibet ductarum à puncto ϵ ad circumferentiam interiectam inter puncta κ , δ . Igitur $\epsilon\kappa$ maxima est rectarum ductarum à puncto ϵ ad circumferentiam $\beta\kappa\delta$. Dico etiam rectam $\epsilon\delta$ minimam esse rectarum ductarum à puncto ϵ ad circumferentiam interiectam inter κ & δ puncta: ducatur enim recta $\epsilon\mu$ & connectatur recta $\gamma\mu$: & quia $\gamma\delta$ minor est quàm $\gamma\mu$ (per 7. tertij Element.) quadratum ergo quod fit à $\gamma\delta$ minus est quadrato quod fit à $\gamma\mu$: utrique horum quadratorum addatur commune quadratum quod fit ex $\gamma\epsilon$: quadrata ergo quæ fiunt ex $\gamma\delta$, $\gamma\epsilon$ (id est quadratum quod fit ex $\delta\epsilon$) minora sunt quadratis factis ex $\gamma\mu$, $\gamma\epsilon$ (id est quadrato facto ex $\epsilon\mu$): Itaque minor est recta $\delta\epsilon$, quàm recta $\mu\epsilon$. Eadem ratione ostendemus rectam $\epsilon\delta$ minorem esse quâlibet rectarum linearum ductarum à puncto ϵ ad circumferentiā $\kappa\delta$, quæ inter puncta κ & δ continetur. Igitur $\epsilon\delta$ minima est rectarum ductarum à puncto ϵ ad $\kappa\delta$ circumferentiam contentam inter puncta κ & δ , semperque ea recta linea, quæ ipsi $\epsilon\delta$ propior est, minor est remotiore. Sed enim $\beta\delta$ recta linea circulum disspescens, sit diameter circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, sintque reliqua omnia posita ut prius. Dico rectam $\epsilon\beta$ minimam esse rectarum ductarum à puncto ϵ ad circumferentiam circuli $\alpha\beta\gamma\delta$: rectam autem $\epsilon\delta$, esse maximam: facta enim eadem cōstructione, ut in præcedente figura, quia circumferentia $\delta\epsilon$ maior est quàm circumferentia $\epsilon\beta$ (ex hypothesi) à puncto verò ϵ ducta est perpendicularis



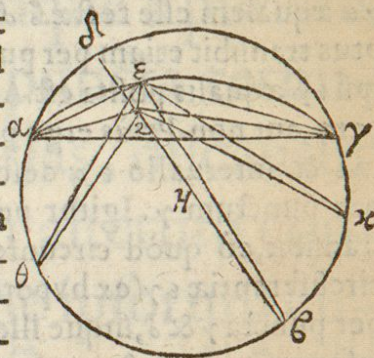
$\epsilon \zeta$ maior ergo est recta $\delta \zeta$ quàm recta $\zeta \delta$. Atqui $\beta \delta$ est diameter circuli $\alpha \beta \gamma \delta$: igitur centrum circuli est in linea $\delta \zeta$. Quare $\zeta \delta$ maior est quàm $\gamma \zeta$ & $\gamma \zeta$ maior quàm $\zeta \beta$ (per. 7. tertij Element.) ob eamque causam quadratum quod fit ex $\zeta \delta$ maius est quadrato facto ex $\gamma \zeta$, & quadratum factum ex $\gamma \zeta$ maius est quadrato facto ex $\zeta \beta$. illis omnibus quadratis addatur commune quadratum quod fit ex $\zeta \epsilon$. Quadrata ergo quæ fiunt ex $\delta \zeta$, $\zeta \epsilon$ (id est quadratum quod fit ex $\delta \epsilon$) maiora sunt quadratis quæ fiunt ex $\gamma \zeta$, $\zeta \epsilon$, id est quadrato quod fit ex $\gamma \epsilon$. Quadrata autem quæ fiunt ex $\gamma \zeta$, $\zeta \epsilon$, (id est quadratum ex $\gamma \epsilon$) maiora sunt quadratis quæ fiunt ex $\zeta \beta$, $\zeta \epsilon$, id est quadrato facto ex $\beta \epsilon$. Quare recta $\delta \epsilon$ maior est quàm $\epsilon \gamma$. & $\epsilon \gamma$ maior est, quàm $\epsilon \beta$. Eadem ratione ostendemus omnium rectarum cadentium à puncto ϵ in circumferentiam circuli $\alpha \beta \gamma \delta$, maximam quidem esse ipsam $\epsilon \delta$ minimam autem ipsam $\epsilon \beta$. Igitur omnium ductarum rectarum à puncto ϵ ad circumferentiam circuli $\alpha \beta \gamma \delta$, maxima est $\epsilon \delta$, minima autem $\epsilon \beta$.

THEOREMA 2.

Si recta linea circulum secans, segmentum auferat quod semicirculo minus non sit: super ipsa autem recta linea statuatur aliud circuli segmentum quod & semicirculo maius non sit, & inclinatum sit ad segmentum quod semicirculo maius non est, diuidatur verò insistentis segmenti circumferentia in partes inæquales: recta linea subtendens minorem circumferentiæ partem, minima est rectarum omnium ductarum ab illo puncto à quo ipsa ducitur, ad subiecti circuli circumferentiam illam, quæ semicirculo minor non est.

Sit circulus $\alpha \beta \gamma \delta$ à quo recta linea $\alpha \gamma$ auferat segmentum $\alpha \beta \gamma$, quod non minus sit semicirculo: & super recta $\alpha \gamma$, statuatur circuli segmentum $\alpha \epsilon \gamma$, quod non sit maius semicirculo, sitque inclinatum ad segmentum $\alpha \delta \gamma$, quod maius non est semicirculo: diuidaturque circumferentia $\alpha \epsilon \gamma$ inæqualiter in puncto ϵ , ita ut $\alpha \epsilon$ circumferentia minor sit quàm circumferentia $\epsilon \gamma$, & connectatur recta $\epsilon \alpha$. Dico rectam $\epsilon \alpha$ minimam esse rectarum ductarum à puncto ϵ ad circumferentiam $\alpha \beta \gamma \delta$: ducatur enim perpendicularis à puncto ϵ ad planū circuli $\alpha \beta \gamma \delta$: ea ergo cadet inter lineam $\alpha \gamma$ & circumferentiā $\alpha \delta \gamma$, eò quod segmentum $\alpha \epsilon \gamma$ inclinatur ad segmentum $\alpha \delta \gamma$: cadat ergo, sitque $\epsilon \zeta$, appliceturque plano circuli $\alpha \beta \gamma \delta$ in puncto ζ : sumaturque centrum circuli $\alpha \beta \gamma \delta$.

$\alpha\beta\gamma$ & centrum igitur illud erit vel in linea $\alpha\gamma$, vel inter lineam $\alpha\gamma$ & circumferentiam $\alpha\beta\gamma$, propterea quod posuimus segmentum $\alpha\epsilon\gamma$, non esse minus semicirculo. Prius ergo ponamus centrum circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, esse inter rectam $\alpha\gamma$ & $\alpha\beta\gamma$ circumferentiā, sitque punctū δ , & ducatur recta $\delta\epsilon$, quæ utrinque producat̃ usque ad δ & ϵ p̃uncta: & à p̃uncto ϵ ad circumferentiā $\alpha\beta\gamma$ ducatur recta linea $\epsilon\theta$, cōnectantur denique rectæ $\alpha\delta$, $\delta\theta$: Et quia $\epsilon\delta$ erecta est ad planū circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, ad omnes ergo rectas lineas ipsam tangentes & iacentes in plano circuli $\alpha\beta\gamma\delta$, rectos angulos facit (per 2. defin. vndecimi Element.) Ipsam autem $\epsilon\delta$, tangit vtraque ipsarum $\alpha\delta$ & $\delta\theta$ in circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ plano iacens: anguli ergo $\alpha\delta\epsilon$ & $\theta\delta\epsilon$, recti sunt. Item quia $\alpha\delta$ minor est quàm $\theta\delta$, quadratum ergo quod ex $\alpha\delta$, minus est quadrato facto ex $\theta\delta$: eorum vtriusque addatur quadratum factum ex $\epsilon\delta$: quadrata ergo quæ fiunt ex $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$, (id est quadratum quod fit ex $\alpha\epsilon$) minora sunt quadratis quæ fiunt ex $\theta\delta$, $\delta\epsilon$, id est quadrato facto ex $\theta\epsilon$. Quare $\alpha\epsilon$ recta linea minor est, quàm $\theta\epsilon$. Eodem modo monstrabimus rectam $\alpha\epsilon$ minimam esse rectarum ductarum à puncto ϵ in circumferentiā $\alpha\beta\gamma$. Quare $\alpha\epsilon$ minima est rectarum ductarum à puncto ϵ in circumferentiā $\alpha\beta\gamma$. Eodémque omnino modo monstrabimus rectarum à puncto ϵ cadentium in circumferentiā $\alpha\beta$ comprehensam inter puncta α & ϵ , rectam illam quæ propior sit ipsi α , minorem esse remotiore. Iam connectatur recta $\epsilon\beta$. Dico $\epsilon\beta$ maximam esse rectarum ductarum à puncto ϵ in $\alpha\beta\gamma$ circumferentiā. Quia enim $\beta\delta$ maior est quàm $\theta\delta$, quadratum ergo quod ex $\beta\delta$, maius est quadrato facto ex $\theta\delta$: eorum vtriusque addatur commune quadratum quod fit ex $\delta\epsilon$. Quadrata ergo facta ex $\beta\delta$, $\delta\epsilon$ (id est quadratum $\epsilon\beta$) maiora sunt quadratis factis ex $\theta\delta$, $\delta\epsilon$, id est quadrato facto ex $\theta\epsilon$. Quocirca $\beta\epsilon$ maior est quàm $\theta\epsilon$. Eadem ratione ostendemus rectam $\epsilon\beta$ maximam esse rectarum ductarum à puncto ϵ in circumferentiā $\alpha\beta\gamma$. Igitur $\epsilon\beta$ maxima est rectarum ductarum à puncto ϵ ad circumferentiā $\alpha\beta\gamma$. Connectatur verò etiam ipsa $\epsilon\gamma$. Dico $\epsilon\gamma$ rectam, minimam esse rectarum ductarum à puncto ϵ in circumferentiā $\beta\gamma$, contentam inter puncta ϵ & γ : ducatur enim aliqua alia linea à puncto ϵ , quæ cadat inter β & γ puncta, quæ sit $\epsilon\kappa$: & connectantur rectæ $\beta\gamma$, $\gamma\kappa$: Et quia $\beta\gamma$ est minor quàm $\gamma\kappa$, quadratum ergo factum ex $\beta\gamma$ minus est quadrato facto ex $\gamma\kappa$: eorum vtriusque addatur quadratum quod ex $\epsilon\gamma$. Quadrata ergo facta ex $\beta\gamma$, $\epsilon\gamma$ (id est quadratum quod fit ex $\epsilon\beta$) minora sunt quadratis factis ex $\gamma\kappa$, $\epsilon\gamma$, id est quadrato facto ex $\epsilon\kappa$. Quocirca recta $\epsilon\gamma$ minor est, quàm recta $\epsilon\kappa$. Eadem ratione docebimus $\epsilon\gamma$ minimam esse rectarum ductarum à puncto ϵ in $\beta\gamma$ circumferentiā, contentam inter β & γ puncta. Eodémque ratione rursum ostendemus rectarum à puncto ϵ in circumferentiā $\beta\gamma$ inter ϵ & γ puncta cadentium, semper eam rectam quæ ipsi $\epsilon\gamma$ propior sit, minorem esse remotiore. Quod si $\alpha\beta\gamma$ sit semicirculus, simili ratione ostendemus rectam $\alpha\epsilon$ minimam esse rectarum à puncto ϵ in $\alpha\beta\gamma$ circumferentiā ductarum.

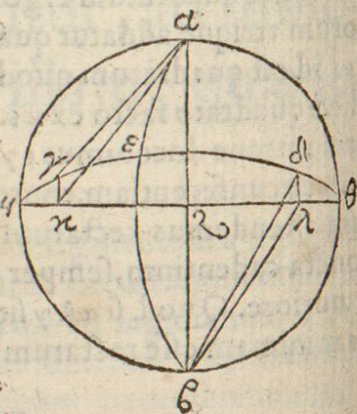
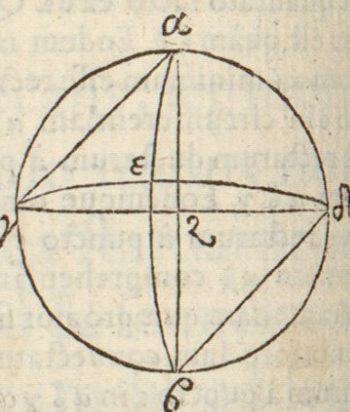


THEOREMA 3.

Si in sphæra duo maximi circuli se mutuò secant, ab eorum verò vtroque æquales

circunferentiæ defumantur vtrunque à pū-
cto in quo se secant: rectæ lineæ quæ extre-
ma circunferentiarum connectunt ad eas-
dem partes, æquales inter se sunt.

In sphaera enim duo maximi circuli $\alpha \epsilon \beta$, $\gamma \epsilon \delta$ se mutuò secant in puncto ϵ , & ab utroque ipsorum sumantur circunferentiæ à puncto ϵ vtrunque æqua-
les, nempe circunferentia $\epsilon \alpha$ æqualis circunferentiæ $\epsilon \beta$, & circunferentia $\epsilon \gamma$,
æqualis circunferentiæ $\epsilon \delta$: connectanturque rectæ $\gamma \alpha$ & $\beta \delta$. Dico rectam
 $\gamma \alpha$ æqualem esse rectæ $\beta \delta$: circulus enim polo ϵ , interuallo autem $\epsilon \alpha$ descri-
ptus transibit etiam per punctum β , eò quòd $\epsilon \alpha$
ipsi $\epsilon \beta$ æqualis posita est. Aut ergo transibit etiam
per γ , aut non. Prius ergo ponamus, circulum po-
lo ϵ & interuallo $\epsilon \alpha$ descriptum transire etiam
per punctum γ . Igitur per punctum quoque δ
transibit, eò quòd circunferentia $\epsilon \delta$ æqualis est
circunferentiæ $\epsilon \gamma$ (ex hypothesi) Transeat (inquam)
per puncta γ & δ , sitque ille circulus $\alpha \gamma \beta \delta$. sitque
ipsorum $\alpha \gamma \beta \delta$ & $\alpha \epsilon \beta$ circulorum communis
sectio $\alpha \epsilon$, ipsorum autem $\alpha \gamma \beta \delta$ & $\gamma \epsilon \delta$ circulo-
rum communis sectio $\gamma \delta$. Et quia in sphaera ma-
ximus circulus $\alpha \epsilon \beta$, alium in sphaera circulum α
 $\gamma \beta \delta$ secat per polos: ergo eum & bifariam secat
& ad angulos rectos (per 15. primi) quare recta $\alpha \epsilon$ est diameter circuli $\alpha \gamma \beta \delta$.
Simili modo ostendemus rectam $\gamma \delta$, esse diametrum circuli $\alpha \gamma \beta \delta$. qua-
tuor igitur hæ rectæ lineæ $\alpha \zeta$, $\zeta \gamma$, $\zeta \beta$, $\zeta \delta$, æquales inter se sunt. Quia igitur
duæ rectæ $\alpha \zeta$ & $\zeta \gamma$ duabus rectis $\zeta \delta$ & $\zeta \beta$ sunt sigillatim æquales, & angulus
 $\alpha \zeta \gamma$ æqualis est angulo $\beta \zeta \delta$ (per 15. primi Elem.) basis ergo $\alpha \gamma$ æqualis est
basi $\beta \delta$ (per 4. primi Elem.) Contra verò circulus polo ϵ & interuallo $\epsilon \alpha$ de-
scriptus ne transeat per punctum γ , sed transiliat ipsum: transibit ergo per
punctum ϵ , per punctum tamen δ non transibit, sed ipsum etiam transiliet.
Ducatur ergo, sitque circulus $\alpha \eta \beta \theta$, & compleatur vtrunque circunferentia
 $\gamma \epsilon \delta$, vsque ad puncta η & θ : sitque recta $\alpha \epsilon$ com-
munis sectio circulorum $\alpha \eta \beta \theta$ & $\alpha \epsilon \beta$: sit item $\eta \theta$
communis sectio circulorum $\alpha \eta \beta \theta$ & $\eta \epsilon \theta$: Eodem
modo vt antea, ostendemus punctum ζ esse cen-
trum circuli $\alpha \eta \beta \theta$, & vtrumque ipsorum $\alpha \epsilon \beta$, $\eta \epsilon \theta$
circulorum, rectum esse ad circulum $\alpha \eta \beta \theta$. Iam
ergo à punctis γ & δ ducantur perpendiculares ad
planum circuli $\alpha \eta \beta \theta$, quæ sint $\gamma \kappa$ & $\delta \lambda$, conne-
ctanturque rectæ $\alpha \kappa$ & $\beta \lambda$: Et quia circunferentia
 $\epsilon \eta$, æqualis est circunferentiæ $\epsilon \theta$ (eò quòd pun-
ctum ϵ est polus circuli $\alpha \eta \beta \theta$) & circunferentia $\gamma \epsilon$
circunferentiæ $\epsilon \delta$: reliqua igitur $\gamma \eta$ reliquæ $\delta \theta$
æqualis est. Item quia $\eta \epsilon \theta$ est rectum circuli seg-
mentum, à quo æquales circunferentiæ sumptæ sunt $\eta \gamma$ & $\delta \theta$, ductæque sunt
perpendiculares $\gamma \kappa$ & $\delta \lambda$ ad planum ipsius $\alpha \eta \beta \theta$ circuli: æqualis ergo est
 $\gamma \kappa$ ipsi $\delta \lambda$, & $\eta \kappa$ ipsi $\theta \lambda$. Sed & tota $\eta \zeta$ toti $\zeta \theta$ æqualis est: reliqua ergo $\kappa \zeta$
reliquæ $\lambda \zeta$ æqualis est: est verò etiā $\alpha \zeta$ æqualis ipsi $\zeta \epsilon$, & angulus $\alpha \zeta \kappa$ æqua-
lis



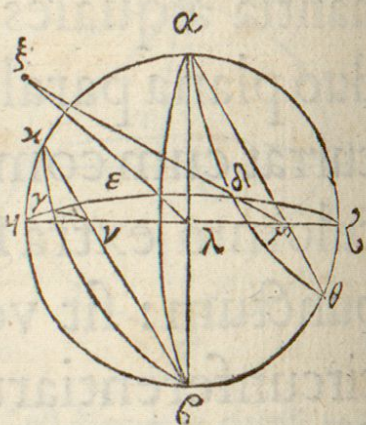
lis angulo $\beta\gamma\lambda$ (per 15. primi Element.) basis igitur $\alpha\kappa$ æqualis est basi $\beta\lambda$. Quia ergo $\alpha\kappa$ æqualis est ipsi $\beta\lambda$, & $\gamma\kappa$ ipsi $\delta\lambda$: duæ ergo rectæ $\alpha\kappa$ & $\kappa\gamma$, duabus rectis $\beta\lambda$ & $\lambda\delta$ sunt sigillatim æquales, & angulus $\gamma\kappa\alpha$ angulo $\delta\lambda\beta$ est æqualis: uterque enim rectus est: basis ergo $\alpha\gamma$ æqualis est basi $\beta\delta$ (per 4. primi Element.)

THEOREMA 4.

Si in sphæra duo maximi circuli se mutuò secant, ab eorúmque altero æquales circumferentiæ sumantur, vtrinque à puncto in quo se interfecant, & per puncta terminantia æquales circumferentias, ducantur duo plana parallela, quorum alterum concurrat cum communi sectione ipsorum circulorum extra sphæram versùs prædictum punctum: sit verò vna illarum æqualium circumferentiarum maior vtralibet circumferentiarum interceptarum inter prædictum punctum & vtrumque planorum parallelorum: ea circumferentia quæ est inter illud punctum & planum quod non concurrat cum communi sectione ipsorum circulorum, maior est quàm ea eiusdem circuli circumferentia quæ est inter idem punctum & planum quod concurrat cum communi sectione circulorum.

In sphæra enim duo maximi circuli $\alpha\epsilon\beta$, $\gamma\epsilon\delta$ se mutuò secant in puncto ϵ : ab vno autem eorum, videlicet ab ipso $\alpha\epsilon\beta$ sumantur circumferentiæ $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\beta$, æquales vtrinque à puncto ϵ : & ducantur duo plana parallela, alterum quidem per puncta α & δ , quod sit $\alpha\delta$: alterum verò per puncta γ & β , quod sit $\gamma\beta$. & horum planorum ipsum $\alpha\delta$ concurrat cum communi sectione ipsorum $\alpha\epsilon\beta$, $\gamma\epsilon\delta$ circulorum extra sphærae superficiem, exempli gratiâ versùs punctum ϵ : vtrius autem ipsarum $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$ circumferentiarum æqualium, maior sit, quàm utrauis ipsarum $\gamma\epsilon$, $\epsilon\delta$. Dico circumferentiam

$\gamma\epsilon$, maiorem esse, quàm $\epsilon\delta$ circumferentiam. Circulus enim polo ϵ & inter-
uallo $\epsilon\alpha$ descriptus, transibit quidem per punctum β , transiet verò puncta
 γ & δ , eò quòd vtralibet ipsarum $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$, maior est quàm vtralibet ipsarum
 $\gamma\epsilon$, $\epsilon\delta$ (ex hypothesi.) Transeat ergo ille circulus per punctum ζ , sitque
 $\alpha\eta\beta\zeta$, & absoluantur circuli, concurratque circulus $\alpha\delta$ cum circulo $\alpha\eta\beta\zeta$
in puncto θ : circulus autem $\beta\gamma$ concurrat cum circulo $\alpha\eta\beta\zeta$ in puncto κ :
sitque circulorum $\alpha\eta\beta\zeta$ & $\alpha\epsilon\beta$ communis sectio recta linea $\alpha\beta$: circu-
lorum autem $\alpha\eta\beta\zeta$ & $\eta\epsilon\zeta$, communis sectio, recta linea $\eta\zeta$. Circulorum ve-
rò $\alpha\delta\theta$ & $\alpha\eta\beta\zeta$, communis sectio recta $\alpha\theta$. Circulorum etiam $\kappa\gamma\beta$ & $\alpha\eta\beta\zeta$
communis sectio, recta $\kappa\zeta$: ipsorum quoque $\eta\epsilon\zeta$ & $\alpha\delta\theta$ communis sectio,
 $\delta\mu$ recta linea: Circulorum denique $\kappa\gamma\beta$ & $\eta\epsilon\zeta$, communis sectio sit recta
linea $\gamma\nu$. Et quia planum $\alpha\delta$ concurret cum communi sectione ipsorum
 $\eta\epsilon\zeta$ & $\alpha\epsilon\beta$ planorum, id est cum recta linea $\epsilon\lambda$, extra sphaeræ superficiem,
veluti versus eas sphaeræ partes in quibus est punctum ϵ : Concurrant ergo
in pñcto ξ , quod & extra sphaeræ superficiem est,
& versus eas partes in quibus est punctum ϵ : &
producatur recta $\lambda\epsilon$, vsque ad punctum ξ . Igitur
punctum ξ est in plano $\alpha\delta\theta$, estque idem punctũ
 ξ etiam in plano $\eta\epsilon\zeta$. Quinetiam puncta δ & μ
sunt in vtroque ipsorum $\alpha\delta\theta$, $\eta\epsilon\zeta$ planorum. Si
ergo $\mu\delta$ producatur, concurret cum $\lambda\epsilon$, extra
sphaeræ superficiem, versus eas partes, in quibus
est ϵ , in puncto ξ videlicet. Et quia in sphaera ma-
ximus circulus $\alpha\epsilon\beta$, circulũ quendam in sphaera
descriptum $\alpha\eta\beta\zeta$, per polos secat: eum ergo &
bifariam & ad angulos rectos secat (per 15. primi
Sphaeric.) Quare $\alpha\beta$ est diameter circuli $\alpha\eta\beta\zeta$.



Eodem modo ostēdemus rectam $\eta\zeta$, esse diametrum circuli $\alpha\eta\beta\zeta$: atque ideo
punctum λ centrum est circuli $\alpha\eta\beta\zeta$. Quia verò duo parallela plana $\kappa\gamma\beta$,
nempe & $\alpha\delta\theta$ secantur à plano circuli $\alpha\eta\beta\zeta$, communes ergo eorum sectio-
nes sunt parallelæ (per 16. vndecimi Element.) Quare recta $\kappa\zeta$ parallela est
rectæ $\alpha\theta$: Item quia duo plana parallela $\kappa\gamma\beta$ & $\alpha\delta\theta$ secantur à plano $\eta\epsilon\zeta$,
communes ergo eorum sectiones sunt parallelæ. Quare $\gamma\nu$ parallela est ipsi
 $\delta\mu$. Quia verò vtrunque planorum $\alpha\epsilon\beta$, $\eta\epsilon\zeta$, rectum est ad planum circuli
 $\alpha\eta\beta\zeta$: Ergo eorum etiam communis sectio rectos angulos facit ad planum
circuli $\alpha\eta\beta\zeta$ (per 19. vndecimi Elem.) communis autem ipsorum sectio est
 $\epsilon\lambda$: Igitur $\epsilon\lambda$, angulos rectos facit ad planum circuli $\alpha\eta\beta\zeta$, & ob id ad om-
nes lineas ipsam tangentes, & positas in plano circuli $\alpha\eta\beta\zeta$, angulos rectos
facit. Atqui rectæ lineæ $\alpha\beta$ & $\eta\zeta$ posite in plano circuli $\alpha\eta\beta\zeta$, tangunt ip-
sam $\epsilon\lambda$. Igitur $\epsilon\lambda$ facit angulos rectos cum vtraque ipsarum, $\alpha\beta$, $\eta\zeta$: & quia
angulus $\xi\lambda\nu$ est exterior angulus trianguli $\xi\mu\lambda$: maior ergo est interiore &
opposito angulo $\xi\mu\lambda$: Sed angulus $\xi\lambda\nu$ rectus est, vt monstratum est: angu-
lus ergo $\xi\mu\lambda$ est acutus, ob idque angulus $\xi\mu\zeta$ est obtusus. Et quia $\gamma\nu$ pa-
rallela est ipsi $\delta\mu$, in easque incidit recta $\eta\zeta$: igitur angulus $\gamma\nu\eta$ æqualis est
angulo $\xi\mu\lambda$ (per 29. primi Element.) Atqui angulus $\xi\mu\lambda$ acutus est: angulus
ergo $\gamma\nu\eta$ acutus etiam est. Et quia $\alpha\mu$ parallela est ipsi $\nu\beta$, ductæque sunt
duæ rectæ lineæ $\alpha\beta$ & $\mu\nu$, & ipsa $\alpha\lambda$ ipsi $\lambda\beta$ æqualis est. æqualis ergo etiam
est $\gamma\lambda$ ipsi $\lambda\mu$. Atqui tota $\eta\lambda$ æqualis est toti $\lambda\zeta$: reliqua ergo $\eta\nu$ reliquæ $\mu\zeta$
est æqualis. Quia itaque $\eta\epsilon\zeta$ est circuli segmentum & sumptæ sunt æquales
rectæ $\eta\nu$ & $\mu\zeta$, ductæque sunt rectæ lineæ parallelæ $\gamma\nu$ & $\delta\mu$, & angulus $\gamma\nu\eta$
acutus est: angulus autem $\delta\mu\zeta$ obtusus: igitur circumferentia $\eta\gamma$ minor est,
quàm circumferentia $\delta\zeta$: & quia tota $\eta\epsilon$ circumferentia æqualis est toti
circun-

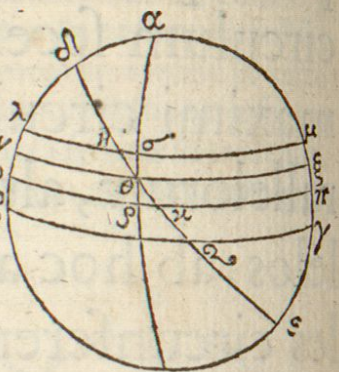
circunferentiæ $\gamma\epsilon$: & ab æqualibus ablata sunt inæquales $\gamma\gamma$ & $\delta\gamma$, quarum $\gamma\gamma$ minor est, quàm $\delta\gamma$: reliqua ergo circunferentia $\gamma\epsilon$ maior est, quàm reliqua $\epsilon\delta$ circunferentia.

THEOREMA 5.

Si in circunferentia maximi circuli sit polus parallelorum, huncque maximum circulum secant ad angulos rectos duo alij maximi circuli, quorum alter sit vnus parallelorum, alter verò obliquus sit ad parallelum: ab hoc autem obliquo circulo æquales circunferentiæ sumantur deinceps ad eandem partem maximi parallelorum, perque illa puncta terminantia æquales circunferentias, describantur paralleli circuli: circunferentiæ maximi illius circuli primò positi inter parallelum interceptæ, inæquales erunt, semperque ea quæ propior fuerit maximo parallelorum, remotiore maior erit.

Sit parallelorum polus α in circunferentia maximi circuli $\alpha\beta\gamma$, huncque circulum secant ad angulos rectos duo alij maximi circuli $\beta\gamma\gamma$, $\delta\gamma\epsilon$, quorum ipse quidem $\beta\gamma\gamma$ sit vnus parallelorum, ipse autem $\delta\gamma\epsilon$ sit obliquus ad parallelum, & à $\delta\gamma\epsilon$ circulo obliquo, sumantur æquales circunferentiæ $\kappa\theta$ & $\theta\eta$, quæ & continuæ sint, & ad easdem partes circuli $\beta\gamma\gamma$, qui maximus est parallelorum, nempe versus eas partes quæ sunt à puncto γ ad punctum δ : per puncta verò κ, θ, η , ducantur paralleli circuli $\omicron\kappa\pi$, $\nu\theta\xi$, $\lambda\eta\mu$. Dico circulos $\omicron\kappa\pi$, $\nu\theta\xi$, $\lambda\eta\mu$. intercipere inæquales arcus de circunferentia maximi circuli $\alpha\beta\gamma$ primò positi: & eum arcum qui propior sit circulo $\beta\gamma\gamma$ maiorem esse remotiore, id est Dico arcum $\omicron\nu$, maiorem esse arcu $\nu\lambda$. Per puncta enim α & θ describatur maximus circulus $\alpha\theta\rho$: & quia punctum α , est polus circuli $\omicron\kappa\pi$, circunferentia $\alpha\nu\omicron$ æqualis est circunferentiæ $\alpha\theta\rho$ (vtraque enim est ex polo circuli $\omicron\kappa\pi$) Item quia punctum α est polus circuli $\nu\theta\xi$, æqualis ergo est circunferentia $\alpha\lambda\nu$ circunferentiæ $\alpha\theta\theta$: reliqua igitur $\nu\omicron$, reliqua $\theta\rho$ æqualis est. Eodem modo docebimus circunferentiam $\lambda\nu$ æqualem esse circunferentiæ $\sigma\theta$. Quare $\nu\omicron$ ipsi $\theta\rho$ æqualis est & $\lambda\nu$ ipsi $\sigma\theta$. Et quia in sphaera maximus circulus $\alpha\theta\rho$ alium quendam in sphaera circulum $\omicron\kappa\pi$ secat per

polos: cum ergo & bifariam secat & ad angulos rectos (per. 15. primi Sphæric.) Circulus ergo $\alpha\theta\rho$, rectus est ad $\circ\kappa\pi$ circulum. Igitur in ipsius $\circ\kappa\pi$ circuli diametro incipiente à puncto ρ , insistit rectum circuli segmentum $\rho\theta$ cum suo complemento, & ab eo toto segmento desumpta est circumferentia $\rho\theta$, minor existens semisse totius segmenti super tota diametro constituti: ergo recta linea ducta à puncto θ ad punctum ρ , minima est rectarum omnium ductarum à puncto θ ad $\circ\kappa\pi$ circumferentiam (per primam huius.) Quare recta linea ducta à puncto θ ad punctum ρ , minor est quam recta linea ducta à puncto θ ad punctum κ . Sunt autem $\alpha\theta\rho$ & $\delta\lambda\epsilon$ æquales circuli (eorum enim uterque est maximus) igitur circumferentia $\theta\rho$ minor est, quam circumferentia $\theta\kappa$. Eodem modo ostendemus $\theta\sigma$ minorem esse, quam $\theta\eta$: tali enim modo ratiocinabimur. In ipsius $\lambda\eta\mu$ circuli diametro incepta à puncto σ , insistit rectum circuli segmentum $\sigma\theta$ cum suo complemento: & à toto segmento ablata est circumferentia $\sigma\theta$, quæ minor est semisse circumferentiæ segmenti insistentis: recta ergo linea ducta à puncto θ ad punctum σ , minor est recta lineâ ducta à puncto θ ad punctum η (per primam huius) Atqui $\kappa\theta$ æqualis est ipsi $\theta\eta$ (ex hypothesi) utraque ergo ipsarum $\kappa\theta$, $\theta\eta$, maior est quam utraque ipsarum $\rho\theta$, $\theta\sigma$: & quia circulus $\circ\rho\kappa\pi$ est parallelus circulo $\lambda\sigma\mu$: planum autem circuli $\circ\rho\kappa\pi$ concurrit cum communi sectione circulorum $\eta\theta\kappa$ & $\alpha\theta\rho$ intra sphæram, id est versus sphære centrum. Igitur planum circuli $\lambda\eta\mu$ concurret cum communi sectione ipsorum $\eta\theta\kappa$, $\alpha\theta\rho$ circulorum extra sphære superficiem versus eas partes, in quibus est punctum θ . Quia ergo in sphæra duo maximi circuli $\eta\theta\kappa$, $\sigma\theta\rho$, se mutuò secant, ab altero autem eorum, nempe ab ipso $\eta\theta\kappa$, sumptæ sunt circumferentiæ $\kappa\theta$, $\theta\eta$, utrinque à puncto θ æquales, & per puncta η & κ , ducta sunt plana parallela $\lambda\eta\mu$ & $\circ\kappa\pi$, quorum ipsum $\lambda\eta\mu$ planum, concurrit cum communi sectione ipsorum $\eta\theta\kappa$ & $\sigma\theta\rho$ planorum extra sphære superficiem versus eas partes in quibus est punctum θ : vna autem ipsarum $\kappa\theta$, $\theta\eta$ æqualium circumferentiarum, maior est quam utralibet ipsarum $\rho\theta$, $\theta\sigma$ (ut ostensum est) maior est igitur $\rho\theta$ circumferentia, quam $\theta\sigma$ circumferentia (per præcedens theorema). Atqui $\rho\theta$ æqualis est ipsi $\circ\nu$, & ipsa $\theta\sigma$ ipsi $\nu\lambda$ (per. 10. secundi) igitur $\circ\nu$ circumferentia est maior quam $\nu\lambda$ circumferentia.

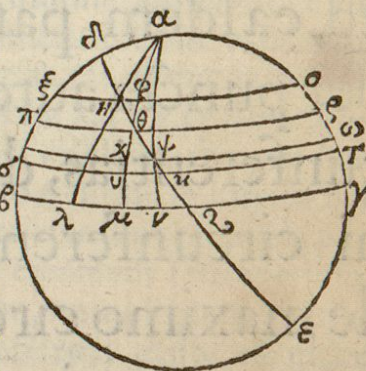


THEOREMA 6.

Si in circumferentia maximi circuli sit polus parallelorum, huncque maximum circulum ad angulos rectos secet duo alij maximi circuli, quorum alter sit vnus parallelorum, alter verò obliquus sit ad parallelos, sumantur autē ab obliquo circulo æquales circumferentiæ deinceps ad easdem partes
maximi

maximi illius paralleli, & per puncta terminantia æquales circumferentias, perque polum, describantur maximi circuli: hi circumferentias inæquales intercipient de maximo parallelorum, quarum propior maximo circulo primò posito, semper erit remotiore maior.

In circumferentia enim maximi circuli $\alpha\beta\gamma$, sit punctum α polus parallelorum: ipsum verò $\alpha\beta\gamma$ circumferentiam secant ad angulos rectos duo alij maximi circuli $\beta\zeta\gamma$, & $\delta\zeta\epsilon$, quorum $\beta\zeta\gamma$ sit vnus parallelorum, circulus autem $\delta\zeta\epsilon$ sit obliquus ad parallelos. & ab ipso $\delta\zeta\epsilon$ obliquo circulo, sumantur æquales circumferentiæ $\kappa\theta$ & $\theta\eta$, deinceps & continuè ad easdem partes ipsius $\beta\zeta\gamma$ maximi parallelorum, per polum autem α & per singula κ , η , θ puncta, describantur maximi circuli, $\alpha\eta\lambda$, $\alpha\theta\mu$, $\alpha\kappa\nu$. Dico circumferentiam $\lambda\mu$ maiorem esse circumferentiâ $\mu\nu$: per puncta enim η , θ , κ , ducantur paralleli circuli $\xi\eta\sigma$, $\pi\theta\rho$, $\sigma\kappa\tau$. Iam ergo (per præcedens theorema) circumferentia $\sigma\pi$ maior est quàm circumferentia $\pi\xi$. Sed $\sigma\pi$, æqualis est ipsi $\nu\theta$: ipsa autem $\pi\xi$, ipsi $\theta\phi$ (per 10. secundi) igitur $\nu\theta$ maior est quàm $\theta\phi$. Ponatur itaque $\theta\chi$ æqualis ipsi $\theta\phi$: Est verò etiam $\eta\theta$ æqualis ipsi $\theta\kappa$ (ex hypothesi) igitur recta linea ducta à puncto η ad punctum ϕ æqualis est rectæ ductæ à puncto χ in punctum κ : Per punctum ergo χ ducatur circulus $\chi\psi\omega$ parallelus reliquis parallelis circulis antea descriptis. Quia ergo maximus circulus $\alpha\psi\kappa\nu$, alium quendam in sphaera circumferentiam $\chi\psi\omega$ per polos secat: cum igitur & bifariam secat & ad angulos rectos (per 1. primi.) Quare circulus $\alpha\psi\kappa\nu$, rectus est ad circumferentiam $\chi\psi\omega$, ob eamque causam circulus $\chi\psi\omega$, rectus vicissim est ad circumferentiam $\alpha\psi\kappa\nu$. Et quia duo plana parallela $\beta\zeta\gamma$ & $\chi\psi\omega$, secantur ab vno plano $\alpha\psi\kappa\nu$: communes ergo eorum sectiones sunt parallelæ (per 16. vndecimi Element.) Igitur comunis sectio ipsorum $\alpha\psi\kappa\nu$ & $\beta\zeta\gamma$ circulorum, quæ est diameter circuli $\alpha\psi\kappa\nu$ incepta à puncto ν , & comunis sectio ipsorum $\alpha\psi\kappa\nu$ & $\chi\psi\omega$ circulorum, parallelæ inter se sunt. Itaque comunis sectio circulorum $\alpha\psi\kappa\nu$ & $\chi\psi\omega$, parallelæ est diametro circuli $\alpha\psi\kappa\nu$: Et quia in circulo $\alpha\psi\kappa\nu$, ducta est recta quædam linea comunis nempe sectio ipsorum $\alpha\psi\kappa\nu$ & $\chi\psi\omega$ circulorum, quæ circumferentiam $\alpha\psi\kappa\nu$ secat in duas inæquales partes, propterea quòd parallelæ est diametro circuli $\alpha\psi\kappa\nu$, & super ea insistit rectum circuli segmentum $\chi\psi$ cum suo complemento, secta est autem circumferentia segmenti insistentis, inæqualiter in puncto χ : igitur recta linea ducta à puncto χ ad punctum ψ , minima est rectorum ductarum à puncto χ ad circumferentiam $\psi\kappa\nu$ (per primam huius.) Quare recta linea ducta à puncto χ ad punctum ψ , minor est quàm recta linea ducta à puncto χ ad punctum κ , ob idque recta linea ducta à puncto χ ad punctum κ maior est quàm recta ducta à puncto χ ad punctum ψ : atqui



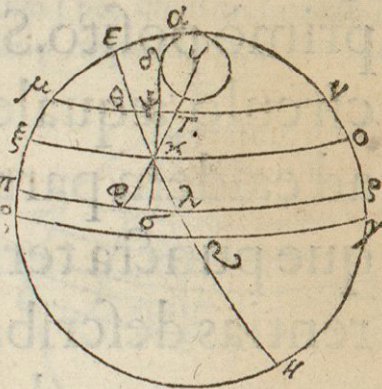
recta ducta à puncto χ ad punctum μ , est æqualis rectæ ductæ à puncto η ad punctum ϕ (vt ostendimus) quare recta ducta à puncto η ad punctum ϕ , maior est quàm recta ducta à puncto χ ad punctum $\downarrow$. Quia verò circulus $\chi\downarrow\omega$ est centro propior quàm circulus $\xi\eta\theta$, igitur circulus $\chi\downarrow\omega$ maior est circulo $\xi\eta\theta$ (per 6. primi Sphæric.) Quia itaque duo circuli inæquales sunt $\chi\downarrow\omega$ & $\xi\eta\theta$, & eorum minor est $\xi\eta\theta$ circulus, inque ipsis circulis ductæ sunt rectæ lineæ, in circulo quidem $\xi\eta\theta$, recta linea ducta ab η ad ϕ : in circulo autem $\chi\downarrow\omega$, recta linea ducta à χ ad $\downarrow$: & earum rectarum linearum ea quæ ducitur à puncto η ad punctum ϕ maior est quàm ea quæ ducitur à puncto χ ad punctum $\downarrow$: igitur circumferentia $\eta\phi$ maior est, quàm vt similis esse possit circumferentiæ $\chi\downarrow$ (per 20. secundi) atqui circumferentia $\eta\phi$ similis est circumferentiæ $\lambda\mu$, circumferentia item $\chi\downarrow$ similis est circumferentiæ $\mu\nu$ (per 10. secundi) Igitur circumferentia $\mu\lambda$ maior est quàm vt similis sit circumferentiæ $\mu\nu$. Atqui $\lambda\mu$ & $\mu\nu$ sunt eiusdem circuli circumferentiæ: maior ergo est circumferentia $\lambda\mu$, quàm circumferentia $\mu\nu$.

THEOREMA 7.

Si in sphæra maximus circulus tangat aliquem sphærae circulum, alius autem maximus circulus ad parallelos obliquus sit, tangatque circulos maiores illis quos tangit maximus circulus primò positus, fuerintque eorum contactus in maximo circulo primò posito, & sumantur à circulo obliquo circumferentiæ æquales & continuæ ad easdem partes maximi parallelorum, per puncta autem terminantia æquales circumferentias, describantur paralleli circuli: hi circumferentias inæquales intercipient de maximo circulo primò posito, quarum ea quæ propior erit maximo parallelorum, erit maior remotiore.

In sphæra enim maximus circulus $\alpha\epsilon\gamma$ tangat descriptum in sphæra circulum $\alpha\delta$ in puncto α , alius autem maximus circulus $\epsilon\zeta\eta$ obliquus ad parallelos, tangat alios circulos maiores quàm sint duo circuli paralleli, quos tangit $\alpha\epsilon\gamma$ circulus, quorum duorum parallelorum alter est $\alpha\delta$ ex hypothese, alter verò est parallelus & æqualis ipsi $\alpha\delta$ (per 6. Secundi) illa verò puncta in

Et in quibus circulus obliquus $\epsilon \zeta \eta$ tangit eos circulos, sint in circumferentia circuli $\alpha \beta \gamma$, sintque illa puncta ϵ & η , maximus autem parallelorum sit $\epsilon \zeta \gamma$, & ab obliquo circulo $\epsilon \zeta \eta$ sumantur circumferentiarum æquales & continuæ $\lambda \kappa$ & $\kappa \theta$ ad easdem partes maximi illius paralleli $\epsilon \zeta \gamma$, nempe versus eas partes quæ sunt à puncto ζ ad punctum ϵ , per puncta verò θ, κ, λ , describantur paralleli circuli $\mu \theta \nu, \xi \kappa \sigma, \pi \lambda \rho$. Dico circumferentiam $\pi \xi$ maiorem esse circumferentiâ $\xi \mu$. Per punctum enim κ describatur maximus circulus $\delta \kappa \sigma$, qui tangat circulum $\alpha \delta$ (per 15. Secundi) ita tamen ut semicirculus incipiens à puncto α & tendens ab α versus β , non concurrat cum semicirculo incipiente à puncto δ & tendente à δ versus σ , (quod quo modo fiat ostensum est tredecimo theoremate Secundi) Sumatur verò polus parallelorum qui sit ν , & per puncta ν, κ , ducatur maximus circulus $\nu \kappa \phi$. Quia ergo in sphaera maximus circulus $\nu \kappa \phi$, alium quendam in sphaera circulum $\pi \lambda \rho$, per polos secat, eum ergo & bifariam & ad angulos rectos secat (per 15. primi Sphaeric.) Quare $\nu \kappa \phi$ circulus, rectus est ad circulum $\pi \lambda \rho$. ob idque super ipsius $\pi \lambda \rho$ circuli diametro incipiente à puncto ϕ , insistit rectum circuli segmentum $\phi \kappa \nu$ cum suo complemento: circumferentia verò totius segmenti toti diametro insistentis, diuisa est inæqualiter in puncto κ , ita ut circumferentia $\phi \kappa$ sit minor semisse circumferentiæ dicti segmenti. Igitur recta linea ducta à κ in ϕ , minima est rectarum ductarum à puncto κ ad $\pi \lambda \rho$ circumferentiam (per primam huius) Semperque recta linea propior ipsi $\kappa \phi$ rectæ, remotiore minor est, (per eandem) Recta ergo ducta à κ ad σ minor est quàm recta ducta à κ in λ . Sunt verò circuli $\delta \kappa \sigma$ & $\epsilon \lambda \eta$ inter se æquales, eò quòd eorum vterque est maximus. maior ergo est circumferentia $\kappa \lambda$ quàm circumferentia $\kappa \sigma$. Eadem ratione docebimus circumferentiam $\theta \kappa$ maiorem esse quàm circumferentiam $\kappa \downarrow$. æqualis autem est $\theta \kappa$ ipsi $\kappa \lambda$ ex hypothesi. vna igitur ipsarum $\theta \kappa, \kappa \lambda$ circumferentiarum, maior est quàm vtralibet ipsarum $\kappa \sigma, \kappa \downarrow$, circumferentiarum. Et quia circulus $\pi \phi \sigma \lambda \rho$ parallelus est circulo $\mu \theta \nu$, circulus autem $\pi \phi \sigma \lambda \rho$ concurrat cum communi sectione ipsorum $\theta \kappa \lambda, \downarrow \kappa \sigma$, circulorum intra sphaeræ superficiem. ergo circulus $\mu \theta \nu$ concurret cum communi sectione eorundem $\theta \kappa \lambda, \downarrow \kappa \sigma$ circulorum extra superficiem sphaeræ, versus eas partes in quibus est punctum κ . Quia ergo in sphaera, maximi circuli $\theta \kappa \lambda, \downarrow \kappa \sigma$, se mutuo secant in puncto κ , & ab eorum altero, ab ipso $\theta \kappa \lambda$ videlicet, sumptæ sunt circumferentiæ $\theta \kappa$ & $\kappa \lambda$ æquales vtriusque à puncto κ in quo se interfecant ipsi $\theta \kappa \lambda$ & $\downarrow \kappa \sigma$ circuli. per puncta autem θ & λ , traiecta sunt parallela plana $\pi \lambda \rho$ & $\mu \theta \nu$, quorum ipsum $\mu \theta \nu$ concurret cum communi sectione ipsorum $\theta \kappa \lambda, \downarrow \kappa \sigma$ circulorum extra Sphaeræ superficiem, exempli gratia, versus punctum κ , vna autem ipsarum $\theta \kappa, \kappa \lambda$ circumferentiarum maior est quàm vtralibet ipsarum $\sigma \kappa, \kappa \downarrow$ circumferentiarum, ut monstratum est. maior ergo est $\sigma \kappa$ quàm $\kappa \downarrow$ (per 4. huius). Atqui $\sigma \kappa$ æqualis est ipsi $\pi \xi$. & ipsa $\kappa \downarrow$ ipsi $\xi \mu$. maior ergo est $\pi \xi$ quàm $\xi \mu$.



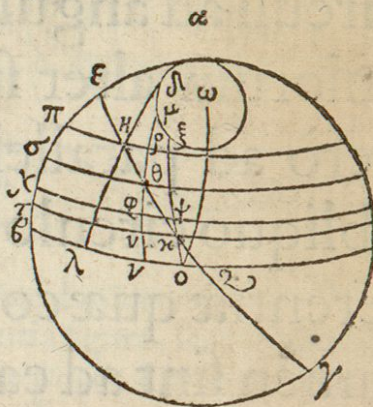
THEOREMA 8.

Si in sphæra maximus circulus aliquem.
sphæræ circulum tãgat, aliquis autem alius

maximus circulus obliquus ad parallelos, tangat circulos maiores illis quos tangebatur maximus circulus primò positus, fuerintque eorum contactus in maximo circulo primò posito. Sumantur autem de obliquo circulo æquales circumferentiæ continuæ ad easdem partes maximi parallelorū, perque puncta terminantia æquales circumferentias describantur maximi circuli qui & tangant eundem circulum quem tangebatur maximus circulus primò positus, & similes parallelorum circumferentias intercipient, habeantque eos semicirculos qui tendunt à punctis contactuum ad puncta terminantia æquales obliqui circuli circumferentias per quæ describuntur, eiusmodi ut minime concurrant cum illo circuli maximi primò positi semicirculo in quo est cōtactus obliqui circuli inter apparentem polum & maximum parallelorum: inæquales intercipient circumferentias de maximo parallelorum, quarū propior circulo maximo primò posito, semper erit maior remotiore.

In sphaera enim maximus circulus $\alpha\beta\gamma$ quendam in sphaera circulum $\alpha\delta$ tangat in puncto α . aliquis autem alius maximus circulus $\epsilon\zeta\gamma$ obliquus ad parallelos, tangat alios circulos maiores illis quos tangit circulus $\alpha\delta\gamma$. sintque illi contactus in circumferentia circuli $\alpha\delta\gamma$, in punctis ϵ & γ . Sitque $\epsilon\zeta$ maximus parallelorum. ab ipso autem $\epsilon\zeta\gamma$ obliquo circulo, sumantur circumferentiæ æquales & continuæ ad easdem partes ipsius $\beta\gamma$ maximi parallelorum, quæ sint $\eta\theta$ & $\theta\kappa$. & per η, θ, κ , puncta, describantur maximi circuli $\delta\eta$, $\delta\theta$, $\delta\kappa$, qui tangant circulum $\alpha\delta$ in punctis δ, μ, ξ . similesque parallelorum

rum circumferentias intercipient, & ita faciant illos semicirculos qui à punctis δ, μ, ξ , ducuntur per puncta η, θ, κ , ut non concurrant cum semicirculo incipiente à puncto α , & transeunte per puncta ϵ & β . Dico circumferentiam $\lambda \nu$ maiorem esse circumferentiâ $\nu \theta$. Per puncta enim η, θ, κ , ducantur paralleli circuli $\pi \eta \rho, \sigma \theta, \tau \nu \kappa$. Maior ergo est circumferentia $\sigma \tau$ quam circumferentia $\sigma \pi$ (per præcedens theorema). Atqui circumferentia $\sigma \tau$ æqualis est ipsi $\theta \nu$. (per. 10. Secundi) circumferentia autem $\sigma \pi$ æqualis est ipsi $\theta \rho$ igitur $\nu \theta$ maior est quam $\theta \rho$. Sumatur $\theta \phi$ æqualis ipsi $\theta \rho$. Iam (per constructionem) $\eta \theta$ æqualis est ipsi $\theta \kappa$. recta linea ergo ducta ab η ad ρ , æqualis est rectæ lineæ ductæ à ϕ ad κ . Describatur per punctum ϕ circulus $\chi \phi \downarrow$ parallelus cuilibet ipsorum $\pi \eta \rho, \sigma \theta, \tau \nu \kappa$. $\epsilon \downarrow$, circularum, sumaturque polus parallelorum circularum, qui sit ω . & per puncta ω & $\circ$, describatur maximus circulus $\omega \circ$ (per 20. primi) Et quia in sphaera maximus circulus $\omega \circ$, alium quendam in sphaera circulum $\beta \downarrow$ per polos secat, ergo eum & bifariam secat & ad angulos rectos (per. 15. primi Sphæric.) Quare circulus $\omega \circ$ rectus est ad $\epsilon \downarrow$ circulum. circulus ergo $\xi \kappa \circ$ inclinatur ad circulum $\epsilon \downarrow$, versus partes $\alpha \epsilon \beta$: & circulus $\epsilon \downarrow$ vicissim inclinatur ad $\xi \kappa \circ$ circulum versus partes $\alpha \epsilon \beta$. Atqui $\epsilon \downarrow$ parallelus est ipsi $\chi \phi \downarrow$, igitur $\chi \phi \downarrow$ circulus ad $\xi \kappa \circ$ circulum inclinatur versus eas partes in quibus est punctum ξ . Et quia duo plana parallela $\epsilon \downarrow$ & $\chi \phi \downarrow$ ab aliquo plano obliquo ab ipso nempe $\xi \kappa \circ$ secantur, eorum ergo communes sectiones sunt parallelæ (per 16. vndecimi Element.) Communis autem sectio ipsorum $\xi \kappa \circ$ & $\beta \downarrow$ circularum, est diameter circuli $\xi \kappa \circ$, incœpta à puncto $\circ$. Communis ergo sectio duorum $\xi \kappa \circ$ & $\chi \phi \downarrow$ circularum (quæ est recta linea secans circulum $\xi \kappa \circ$ in duobus punctis, quorum alterum est punctum $\downarrow$) parallela est diametro circuli $\xi \kappa \circ$, incœptæ à puncto $\circ$. Ergo in circulo $\xi \kappa \circ$, ducta est quædam recta linea, communis nempe sectio ipsorum $\xi \kappa \circ$ & $\chi \phi \downarrow$ circularum, quæ circulum $\xi \kappa \circ$ secat inæqualiter (quoniam parallela est diametro eiusdem $\xi \kappa \circ$ circuli) & super ea recta linea insistit circuli segmentum $\chi \downarrow$ cum suo complemento, inclinatum ad eam portionem subiecti circuli cui insistit, quæ non maior est semicirculo, secta autem est totius insistentis segmenti circumferentia in partes inæquales in puncto ϕ , estque circumferentia $\phi \downarrow$ minor semisse circumferentiæ totius segmenti insistentis. igitur recta linea à puncto ϕ ad punctum $\downarrow$, minima est rectarum ductarum à puncto ϕ ad circumferentiâ non minorem semicirculo (per 2. huius) Quare recta linea à puncto ϕ in punctum $\downarrow$ minor est quam recta ducta à puncto ϕ in punctum κ . Atqui recta ducta à ϕ ad κ , ostensa est æqualis rectæ ductæ ab η ad ρ . Ergo recta linea ducta à puncto η ad punctum ρ , maior est quam recta ducta à puncto ϕ ad punctum $\downarrow$. Quia verò circulus $\phi \chi$, propior est cœtro sphaeræ quam circulus $\pi \eta \rho$, maior ergo est circulus $\phi \chi$ circulo $\pi \eta \rho$. (per 6. primi Sphæric.) Quia ergo duo inæquales circuli sunt $\chi \phi \downarrow$ & $\pi \eta \rho$ quorum ipse $\pi \eta \rho$ minor est reliquo, & in ipsis ductæ sunt rectæ lineæ, in circulo quidem $\pi \eta \rho$, recta à puncto η ad punctum ρ , in circulo autem $\chi \phi \downarrow$, recta ducta à puncto ϕ ad punctum $\downarrow$, ea autem quæ ducitur in minori circulo, recta nempe ab η ad ρ , maior est quam ea quæ ducitur in maiore circulo, nempe quam recta linea ducta à ϕ in $\downarrow$ igitur circumferentia $\eta \rho$ maior est quam ut similis sit circumferentiæ $\phi \downarrow$. Sed circumferentia $\eta \rho$ similis est circumferentiæ $\lambda \nu$, circumferentia autem $\phi \downarrow$ similis est circumferentiæ $\nu \theta$. (ex hypothesi) Igitur $\lambda \nu$ maior est quam ut similis sit circumferentiæ $\nu \theta$. sunt

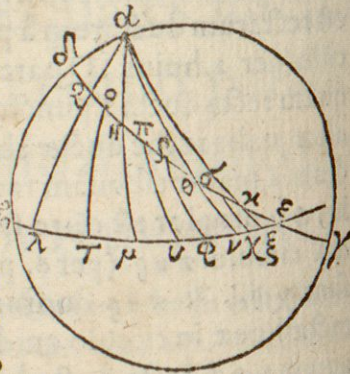


autem $\lambda \nu$ & $\nu \theta$ circumferentiæ circuli eiusdem. Quare circumferentia $\lambda \nu$ maior est quàm circumferentia $\nu \theta$.

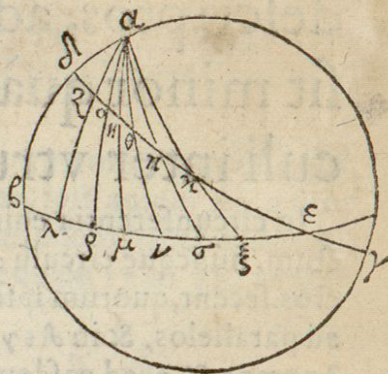
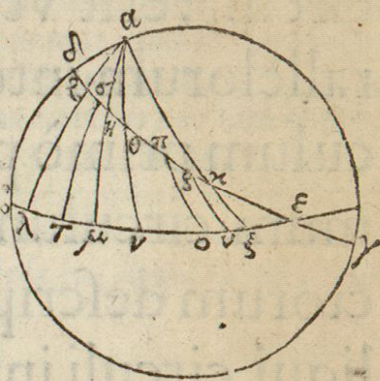
THEOREMA 9.

Si polus parallelorum sit in circumferentia maximi circuli, quem duo alij maximi circuli ad angulos rectos secant, quorū circulorum alter sit vnus parallelorum, alter verò ad parallelos obliquus sit, & ab hoc obliquo circulo sumantur æquales circumferentiæ quæ continuæ quidem non sint, & tamen sint ad easdem partes maximi illius paralleli, per polū autē & singula puncta æquales circūferentias terminātia, describātur maximi circuli: inæquales circumferentias de maximo parallelo intercipient, quarū ea quæ propior erit maximo circulo primò posito, semper erit maior remotiore.

In circumferentia enim maximi circuli $\alpha \epsilon \gamma$, sit parallelorum polus qui sit punctum α , ipsum autem $\alpha \epsilon \gamma$ circulum duo alij maximi circuli $\delta \epsilon \gamma$ & $\beta \epsilon \gamma$, ad angulos rectos secant, eorumque ipse $\beta \epsilon \gamma$ sit vnus parallelorum, alter autem $\delta \epsilon \gamma$ obliquus sit ad parallelos, ab ipso autem $\delta \epsilon \gamma$ obliquo circulo sumantur æquales circumferentiæ $\zeta \eta$ & $\theta \kappa$ quæ continuæ quidem non sint, ad easdem tamen partes sint ipsius paralleli maximi $\beta \epsilon \gamma$. perque α polum & per singula ipsorum $\zeta, \eta, \theta, \kappa$, punctorum, describantur maximi circuli $\alpha \zeta \lambda$, $\alpha \eta \mu$, $\alpha \theta \nu$, $\alpha \kappa \xi$. Dico circumferentiam $\lambda \mu$ maiorem esse quàm circumferentiā $\nu \xi$. Ipsa enim $\eta \theta$ aut commensurabilis est ipsis $\zeta \eta$ & $\theta \kappa$, aut non. Primum esto $\eta \theta$ circumferentia commensurabilis ipsis $\zeta \eta, \theta \kappa$, & diuidantur ipsæ $\zeta \eta, \eta \theta$ & $\theta \kappa$ circumferentiæ in partes æquales, in punctis $\sigma, \pi, \rho, \sigma$. Et per α polum, perque singula ipsorum $\sigma, \pi, \rho, \sigma$, punctorum describantur maximi circuli $\alpha \sigma \tau$, $\alpha \pi \nu$, $\alpha \rho \phi$, $\alpha \sigma \chi$. Et quia circumferentiæ $\zeta \sigma, \sigma \eta, \eta \pi, \pi \rho, \rho \theta, \theta \sigma, \sigma \kappa$, cōtinuæ inter se, æquales sunt: igitur circūferentiæ $\lambda \tau, \tau \mu, \mu \nu, \nu \phi, \phi \nu, \nu \chi, \chi \xi$, continenter aliæ aliis maiores sunt facto initio à maxima quæ est $\lambda \tau$, (per 6. huius) Quia verò $\lambda \tau$ maior est quàm $\nu \chi$, & item $\tau \mu$ maior est quàm $\chi \xi$, tota ergo $\lambda \mu$ maior est quàm tota $\nu \xi$. Contra verò sit $\eta \theta$ incommensurabilis



menfurabilis ipsis $\zeta\eta$, $\theta\kappa$. Dico itidem ipsam $\lambda\mu$ circumferentiam maiorem esse quàm ipsam $\nu\xi$ circumferentiam. Si enim $\lambda\mu$ non est maior quàm $\nu\xi$, aut ergo minor est, aut ei æqualis. Priùs ergo minor esto (si fieri possit) $\lambda\mu$ quàm $\nu\xi$, ut in secunda figura. Et ponatur $\nu\sigma$ æqualis ipsi $\lambda\mu$. & per α polum, pèrque σ punctum, describatur maximus circulus $\pi\sigma$. Et cùm tres circumferentiæ $\kappa\theta$, $\theta\pi$, $\eta\theta$, sint eiusdem circuli & inæquales inter se, sumatur aliqua circumferentia $\theta\rho$ nempe, quæ maior quidem sit quàm $\theta\pi$, minor autem quàm $\theta\kappa$, commensurabilis autem ipsi $\eta\theta$. ponaturque $\theta\rho$ æqualis ipsi $\sigma\eta$. & per α polum, pèrque σ & ρ puncta, describantur maximi circuli $\sigma\tau$, $\rho\nu$. Quia ergo $\sigma\eta$ æqualis est ipsi $\theta\rho$, igitur $\tau\mu$ est maior quàm $\nu\sigma$. Atqui $\lambda\mu$ maior est quàm $\tau\mu$. Ergo $\lambda\mu$ est longè maior quàm $\nu\sigma$. Sed $\lambda\mu$ æqualis etiam est ipsi $\nu\sigma$, per hypothesin. quod fieri nequit. Igitur ipsa $\lambda\mu$ non est minor quàm $\nu\xi$. Dico denique $\lambda\mu$ non esse æqualem ipsi $\nu\xi$. Si enim id fieri possit, sit ut in tertia figura, secenturque $\zeta\eta$ & $\theta\kappa$ circumferentiæ bifariam, in punctis σ & π . & per α polum, pèrque utrunque punctorum σ , π , ducantur maximi circuli $\sigma\rho$, $\pi\sigma$. Quia ergo circumferentiæ $\zeta\sigma$, $\sigma\eta$ æquales & continuæ sunt, igitur $\lambda\rho$ & $\rho\mu$ continuæ circumferentiæ, inæquales sunt factò initio à maxima quæ est $\lambda\rho$. igitur $\lambda\rho$ maior est quàm $\rho\mu$. atque ideo $\lambda\mu$ maior est quàm dupla ipsius $\mu\rho$. Item quia $\theta\pi$ & $\pi\kappa$ continuæ sunt & æquales, igitur ipsæ $\nu\sigma$, $\sigma\xi$ continuæ inæquales sunt, & earum altera maior est quàm altera factò initio à maxima quæ est $\nu\sigma$. Quare $\nu\sigma$ maior est quàm $\sigma\xi$, ob idque ipsa $\nu\xi$ minor est quàm ut sit dupla ipsius $\nu\sigma$. Quia ergo $\lambda\mu$ est æqualis ipsi $\nu\xi$, & $\lambda\mu$ maior est quàm dupla ipsius $\mu\rho$. ipsa autem $\xi\nu$ minor est quàm ut sit dupla ipsius $\nu\sigma$. Ergo $\rho\mu$ minor est quàm $\nu\sigma$, æqualibus positis ipsis $\sigma\eta$, $\theta\pi$, quod fieri nequit. Igitur $\lambda\mu$ non est æqualis ipsi $\nu\xi$. Demonstratúmque etiam est $\lambda\mu$ non esse minorem quàm $\nu\xi$. Igitur circumferentia $\lambda\mu$ maior est quàm circumferentia $\nu\xi$.

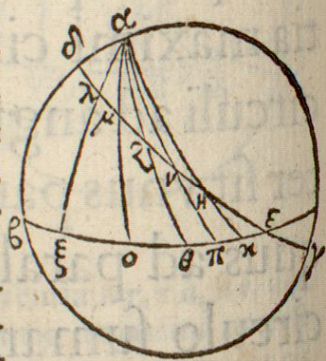


THEOREMA. 10.

Si polus parallelorum sit in circumferentia maximi circuli, quem duo alij maximi circuli ad angulos rectos secant, quorum alter sit vnus parallelorum, alter verò sit obliquus ad parallelos, in hoc autem obliquo circulo sumantur duo quælibet puncta ad easdem partes maximi illius paralleli, pèr-

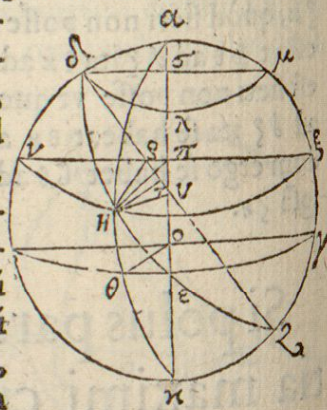
que polum parallelorum & per vtrunque illorum punctorum describantur maximi circuli: erit vt circunferentia maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò positum & proximum maximum circulum per polum & per vnũ punctorum descriptum, ad circunferentiã obliqui circuli inter eosdem circulos interceptam, ita circunferentia maximi parallelorum intercepta inter duos magnos circulos per polum p̄rque vtrunque punctorũ descriptos, ad circunferentiã aliquam quę sit minor quàm circunferentia obliqui circuli inter vtrunque punctum intercepta.

In circunferentia enim maximi circuli $\alpha\beta\gamma$ sit parallelorum polum α punctum. huncque circulũ $\alpha\beta\gamma$, alij duo maximi circuli $\delta\epsilon\gamma$, $\zeta\epsilon$, ad angulos rectos secant, quorum ipse $\beta\epsilon$ sit vnus parallelorum, ipse verò $\delta\epsilon\gamma$ sit obliquus ad parallelos. & in $\delta\epsilon\gamma$ obliquo circulo, sumantur duo puncta pro arbitrio, ζ nempe & η , ad easdem partes maximi parallelorum, qui est $\beta\epsilon$. & per ζ, η puncta, p̄rque α polum, describantur maximi circuli $\alpha\zeta\theta$, $\alpha\eta\kappa$. Dico fore, vt quam rationem habet circunferentia $\beta\theta$ ad circunferentiã $\delta\zeta$, eandem rationem habeat circunferentia $\theta\kappa$ ad circunferentiã aliquam minorem ipsã $\zeta\eta$ circunferentiã. Nam circunferentia $\zeta\eta$ aut commensurabilis est ipsi $\delta\zeta$ aut non. Sit primũ commensurabilis, & vtraque ipsarum, $\zeta\eta$, $\delta\zeta$ diuidatur in partes æquales maximę communi mensurę, in punctis λ, μ, ν . & per singula horum p̄ctorum p̄rque α polum, ducantur maximi circuli $\alpha\lambda\xi$, $\alpha\mu\theta$, $\alpha\nu\pi$. Quia ergo circunferentię $\delta\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\zeta$, $\zeta\nu$, $\nu\eta$, continuę æquales sunt, ergo circunferentię $\beta\xi$, $\xi\theta$, $\theta\pi$, $\pi\kappa$, sunt deinceps alię aliis maiores factò initio à $\beta\xi$ omnium maximã (per 6. huius.) Cum ergo circunferentię $\beta\xi$, $\xi\theta$, $\theta\pi$, $\pi\kappa$ sint consequenter alię aliis maiores, circunferentię verò $\delta\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\zeta$, $\zeta\nu$, $\nu\eta$, sint continuę æquales, & multitudo ipsarum $\beta\xi$, $\xi\theta$, $\theta\pi$, sit æqualis multitudini ipsarum $\delta\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\zeta$. multitudo autem ipsarum $\theta\pi$, $\pi\kappa$, sit æqualis multitudi-
 ni ipsarum $\zeta\nu$, $\nu\eta$ igitur $\beta\theta$ ad $\delta\zeta$ maiorem rationem habet quàm $\theta\kappa$ ad $\zeta\eta$. Si igitur ponamus aliquam circunferentiã ad quam ita se habeat $\theta\kappa$, vt $\zeta\theta$ se habet ad $\delta\zeta$, illa circunferentia erit minor quàm $\zeta\eta$. Quare vt $\beta\theta$ se habet ad $\delta\zeta$, ita $\theta\kappa$ se habet ad circunferentiã minorem



ter sit vnus parallelorum, alter verò sit obliquus ad parallelos, alius autẽ maximus circulus per polos parallelorum transiens obliquum circulum secet inter maximum parallelorum & eum quem obliquus circulus tangit. diameter sphæræ ad diametrum eius circuli quem tangit obliquus circulus, maiorem rationem habet, quàm circumferentia maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò positum & maximum circulum per polos parallelorum transeuntem, ad circumferentiam obliqui circuli inter eosdem circulos interceptam.

In circumferentia enim maximi circuli $\alpha\beta\gamma$, sit parallelorum polus α punctum, ipsum autem $\alpha\beta\gamma$ circulum duo alij maximi circuli $\beta\epsilon\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, ad angulos rectos secet, & eorum ipse quidem $\beta\epsilon\gamma$ sit maximus parallelorum, ipse verò $\delta\epsilon\zeta$ sit obliquus ad parallelos, alius autem aliquis maximus circulus $\alpha\eta\kappa$ ductus per α polum parallelorum, secet ipsum: $\delta\epsilon\zeta$ obliquum circulum in puncto η , quod est inter maximum parallelorum $\beta\epsilon\gamma$ & circulum quem tangit ipse $\delta\epsilon\zeta$. circulus autem quem tangit ipse $\delta\epsilon\zeta$ sit $\delta\lambda\mu$. Dico sphæræ diametrum ad diametrum circuli $\delta\lambda\mu$, maiorem rationem habere, quàm $\beta\theta$ circumferentiam ad circumferentiam $\delta\eta$. per punctum enim η describatur circulus $\nu\eta\xi$ qui sit parallelus reliquis parallelis. Sint verò communes planorũ sectiones, rectæ hæ lineæ, $\alpha\kappa$, $\delta\zeta$, $\beta\gamma$, $\nu\xi$, $\delta\mu$, $\theta\sigma$, $\eta\pi$, $\nu\eta$, $\eta\beta$. Et quia in sphæra maximus circulus $\alpha\beta\gamma$ alios in sphæra circulos $\delta\lambda\mu$, $\nu\eta\xi$, $\beta\epsilon\gamma$, per polos secat, eos ergo & bifariam & ad angulos rectos secat. (per 15. primi.) Quare rectæ lineæ $\delta\mu$, $\nu\xi$, $\beta\gamma$, sunt diametri ipsorum $\delta\lambda\mu$, $\nu\eta\xi$, $\beta\epsilon\gamma$, circulorum, circulusque $\alpha\beta\gamma$ rectus est ad quemlibet ipsorum $\delta\lambda\mu$, $\nu\eta\xi$, $\beta\epsilon\gamma$, circulorum. Et quia in sphæra circuli $\delta\lambda\mu$, $\nu\eta\xi$, $\beta\epsilon\gamma$ sunt paralleli, per quorũ polos traiecta est recta $\alpha\kappa$, igitur recta lineæ $\alpha\kappa$ angulos rectos facit ad plana ipsorũ $\delta\lambda\mu$, $\nu\eta\xi$, $\beta\epsilon\gamma$, circulorum, transitque per ipsorũ & sphæræ centra (per 10. primi.) Igitur puncta σ , π , θ , sunt centra circulorum $\delta\lambda\mu$, $\nu\eta\xi$, $\beta\epsilon\gamma$. Item quia parallela plana $\delta\lambda\mu$, $\nu\eta\xi$, $\beta\epsilon\gamma$, secantur plano $\alpha\beta\gamma$, igitur communes eorum sectiones sunt parallelæ (per 16. vndecimæ



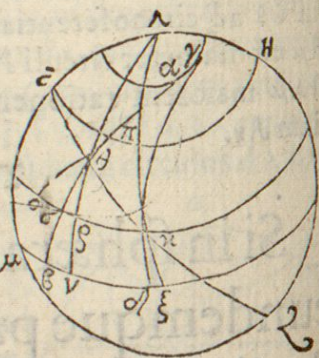
Element.) quocirca rectæ lineæ $\Delta\mu$, $\nu\xi$, $\beta\gamma$, sunt parallelæ inter se. Præterea, quia duo parallela plana $\nu\xi$, $\beta\epsilon\gamma$, secantur plano $\alpha\eta\kappa$, communes ergo ipsorum sectiones sunt parallelæ (per 16. vndecimi Element.) parallela ergo est $\eta\pi$ ipsi $\theta\sigma$. Quia ergo duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes $\nu\pi$ & $\pi\eta$, parallelæ sunt ad duas rectas se mutuò tangentes $\beta\sigma$ & $\sigma\theta$, suntque in diuersis planis, æquales ergo angulos continent (per 10. vndecimi Element.) Quare angulus $\nu\pi\eta$ æqualis est angulo $\beta\sigma\theta$. Et quia ipsi $\nu\xi$, $\delta\epsilon\zeta$ circuli sunt recti ad $\alpha\beta\gamma$ circum, igitur ipsorum $\nu\xi$, $\delta\epsilon\zeta$ circulorum communis sectio angulos rectos faciet ad ipsum $\alpha\beta\gamma$ circum (per 19. vndecimi Elem.) Eorum autem communis sectio est $\eta\rho$. Ergo $\eta\rho$ angulos rectos facit ad planum circuli $\alpha\beta\gamma$, & ob eam causam, ad omnes etiam lineas ipsam tangentes & iacentes in eodem plano circuli $\alpha\beta\gamma$, angulos rectos facit (per 2. defin. vndecimi Elem.) Atqui ipsam $\eta\rho$ tangunt ambæ rectæ $\pi\rho$ & $\rho\nu$, iacentes in plano circuli $\alpha\beta\gamma$. rectus ergo est vterque ipsorum $\eta\rho\pi$, $\eta\rho\nu$ angulorum. Et quia $\alpha\kappa$ perpendicularis est ad ipsam $\nu\xi$, igitur angulus $\rho\pi\nu$ rectus est. Cum ergo $\rho\pi\nu$ angulus sit rectus, igitur angulus $\pi\nu\rho$ est acutus. Quare recta linea $\nu\rho$ maior est quàm $\rho\pi$. Ponatur ergo $\rho\tau$ æqualis ipsi $\pi\rho$, connectaturque recta $\eta\tau$. Quia ergo $\pi\rho$ æqualis est ipsi $\rho\tau$, & vtrique communis est $\eta\rho$. Duæ igitur rectæ lineæ $\pi\rho$ & $\eta\rho$, æquales sunt sigillatim duabus rectis lineis $\tau\rho$ & $\rho\eta$, & rectus angulus $\pi\rho\eta$, recto angulo $\tau\rho\eta$ æqualis est. basis ergo $\eta\pi$ æqualis est basi $\eta\tau$, & triangulus $\pi\rho\eta$ triangulo $\tau\rho\eta$ æqualis est, & reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt, quibus æqualia latera subtenduntur. Quare angulus $\eta\pi\rho$ æqualis est angulo $\eta\tau\rho$. Sed angulus $\eta\pi\rho$ æqualis est angulo $\theta\sigma\beta$. Ergo angulus $\eta\tau\rho$ æqualis est angulo $\theta\sigma\beta$. Et quia $\eta\nu\rho$ est triangulus cuius angulus ad ρ positus, rectus est, ductaque est recta linea $\eta\tau$: ergo recta linea $\nu\rho$ ad rectam $\rho\tau$ maiorem rationem habet quàm angulus $\rho\tau\eta$ ad angulum $\rho\nu\eta$, (per 35. primi Vitellonis.) Atqui $\rho\tau$ æqualis est ipsi $\pi\rho$ ex hypothesi, & angulus $\rho\tau\eta$ angulo $\theta\sigma\beta$ æqualis est. Igitur $\nu\rho$ ad $\rho\pi$ maiorem rationem habet quàm $\beta\sigma\theta$ angulus ad angulum $\rho\nu\eta$. Sed ut se habet $\rho\nu$ ad $\rho\pi$, ita se habet $\nu\Delta$ ad $\Delta\sigma$ (per 4. sexti Elem.) id est, ita se habet $\delta\zeta$ ad $\Delta\mu$. ut autem se habet angulus $\beta\sigma\theta$ ad angulum $\rho\nu\eta$, ita se habet circumferentia $\beta\theta$ ad circumferentiā $\Delta\eta$. (per ultimam Sexti Elem.) igitur recta $\zeta\Delta$ ad rectam $\Delta\mu$ maiorem rationem habet, quàm circumferentia $\beta\theta$ ad circumferentiā $\Delta\eta$. Est autem $\Delta\zeta$ diameter sphæræ, ipsa autem $\Delta\mu$ est diameter circuli $\delta\lambda\mu$. Igitur sphæræ diameter ad diametrum circuli $\Delta\lambda\mu$ maiorem rationem habet quàm circumferentia $\beta\theta$ ad circumferentiā $\Delta\eta$.

THEOREMA 12.

Si in sphæra maximi circuli tangant vnū eundemque parallelorum, intercipientque similes parallelorum circumferentias inter vtrunque maximorum circulorum interiectas, alius autem maximus circulus ad parallelos obliquus circulos attigerit maiores illis quos tangunt maximi circuli primo

positi, quos secet in puncto aliquo posito inter maximum parallelorum & circulum quem tangūt circuli maximi primò positi: Dupla sphæræ diameter ad diametrum circuli quem tangit obliquus circulus, maiore rationem habet, quàm circūferentia maximi paralleli intercepta inter circulos primò positos eūdemque circulū tangētes, ad circūferentiam obliqui circuli inter eosdem circulos interceptam.

In sphæra enim maximi circuli $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$ tangant vnum eundemque parallelorum $\alpha\gamma$, in punctis α & γ , intercipientque similes parallelorum circūferentias inter vtrumque ipsorum maximorum circulorum interiectas. Alius autem aliquis maximus circulus $\epsilon\zeta$ obliquus ad parallelos tangat circulos maiores illis quos tangunt ipsi $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$, ipse autē $\epsilon\zeta$ obliquus circulus secet ipsos $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ inter maximū parallelorū & ipsum $\alpha\gamma$, quem ipsi $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ tangunt. Sit autē maximus parallelorū $\mu\beta\xi$, circulus autem quem tangit $\epsilon\zeta$, sit $\epsilon\eta$. Dico rectam lineam duplam diametri sphæræ ad diametrum ipsius $\epsilon\eta$ circuli, maiorem rationem habere, quàm circūferentiam $\beta\delta$ ad circūferentiam $\theta\kappa$. Sit enim punctum λ polus parallelorum, & per λ punctum, & singula ipsorum ϵ , θ , κ , punctorum describantur maximi circuli $\lambda\epsilon\mu$, $\lambda\theta\gamma$, $\lambda\kappa\xi$. per punctum autem κ ducatur circulus $\sigma\kappa$ qui reliquis parallelis sit parallelus. Item per punctum θ describatur maximus circulus $\theta\pi$, qui tangat circulum $\epsilon\eta$ in puncto π (per 15. Secundi Sphæric.) Quia ergo in sphæra duo circuli $\sigma\kappa$ & $\epsilon\pi\eta$ sunt paralleli, ductique sunt duo maximi circuli $\epsilon\theta\kappa$ & $\sigma\theta\pi$, tangentes circulum $\epsilon\pi\eta$ in punctis ϵ & π , per punctū autē θ perque polū λ , ductus est maximus circulus $\lambda\theta\epsilon$, æqualis ergo est $\sigma\theta$ circūferentia ipsi $\rho\kappa$. Quare $\rho\sigma$ minor est quàm $\rho\kappa$. Igitur $\sigma\kappa$ minor est quàm dupla ipsius $\rho\kappa$. Atqui $\sigma\kappa$ similis est ipsi $\beta\delta$ ex hypothese, ipsa autem $\rho\kappa$ similis est ipsi $\nu\xi$ (per 10. Secundi Sphæric.) Igitur $\beta\delta$ minor est quàm dupla ipsius $\nu\xi$. Et quia sphæræ diameter ad diametrum circuli $\epsilon\pi\eta$, maiorem rationem habet quàm circūferentia $\mu\nu$ ad circūferentiam $\epsilon\theta$, (per præcedens theorema). Circūferentia etiam $\mu\nu$ ad circūferentiam $\epsilon\theta$ maiorem rationem habet quàm circūferentia $\nu\xi$ ad circūferentiam $\theta\kappa$. (per 10. huius.) Igitur sphæræ diameter ad diametrum circuli $\epsilon\pi\eta$ maiorem rationem habet quàm $\nu\xi$ circūferentia ad circūferentiam $\theta\kappa$. Ergo duplum diametri sphæræ ad diametrum circuli $\epsilon\pi\eta$, maiorem rationem habet, quàm duplum circūferentiæ $\nu\xi$ ad circūferentiam $\theta\kappa$. Atqui duplum circūferentiæ $\nu\xi$ ad $\theta\kappa$ circūferentiam maiorem rationem habet quàm circūferentia $\beta\delta$ ad $\theta\kappa$ circūferentiam, propterea quod duplum ipsius $\nu\xi$ maius est quàm circūferentia

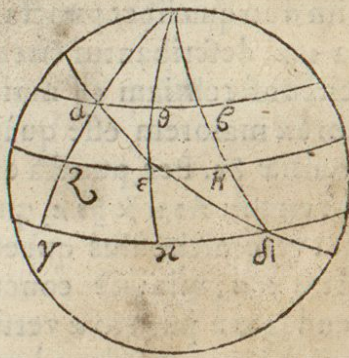


circunferentia $\beta\delta$. Ergo duplum diametri Sphære ad diametrum circuli $\epsilon\pi\eta$ multò maiorem rationem habet, quàm circunferentia $\beta\delta$ ad circunferentiam $\theta\kappa$.

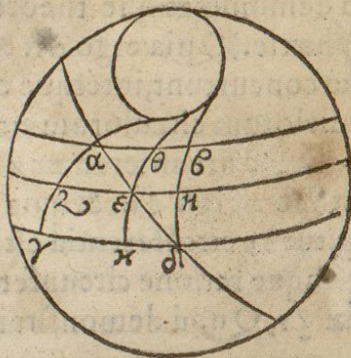
THEOREMA 13.

Si in sphaera paralleli circuli intercipiāt circūferētias maximi alicuius circuli vtrunque æquales ab illo puncto in quo ipse maximus circulus secat maximū parallelorum, per puncta autem terminantia æquales circunferentias, & per parallelorum polos describantur maximi circuli, aut si describantur maximi circuli, qui vnum eundemque parallelorum tangant: æquales intercipient circunferentias de maximo parallelo.

In sphaera enim paralleli circuli $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$ intercipient æquales circunferentias $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\delta$ de maximo circulo $\alpha\epsilon\delta$, vtrunque à maximo parallelorum $\zeta\eta$, ita vt circunferentia $\alpha\epsilon$ interiecta inter $\alpha\theta\beta$ parallelū & ipsum $\zeta\eta$ maximū parallelorū, sit æqualis ipsi $\epsilon\delta$ circunferentiæ interiectæ inter parallelū $\gamma\kappa\delta$ & ipsum $\zeta\eta$ maximū parallelorū. Per puncta autem α, ϵ, δ , describantur maximi circuli $\alpha\zeta\gamma$, $\theta\epsilon\kappa$, $\beta\eta\delta$, qui vel per parallelorū etiam polos trāseant, vel vnū eundemque parallelorum tangant. Dico circūferentiam $\zeta\epsilon$ æqualem esse circūferentiæ $\epsilon\eta$.



Quia enim in sphaera paralleli circuli $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$ auferunt circunferentias $\alpha\epsilon$ & $\epsilon\delta$ de maximo circulo $\alpha\epsilon\delta$, quæ circunferentiæ $\alpha\epsilon$, & $\epsilon\delta$, æquales vtrunque sunt à maximo parallelorū $\zeta\eta$, igitur circulus $\alpha\beta$ æqualis est circulo $\gamma\delta$ (per 17. Secundi Sphæric.) Quia ergo in sphaera circuli $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$, qui æquales & paralleli sunt, auferunt de maximo circulo $\theta\epsilon\kappa$, circūferentias $\theta\epsilon$ & $\epsilon\kappa$ interiectas inter maximū parallelorū $\zeta\eta$, & vtrunque reliquorū parallelorū $\alpha\theta\beta$ & $\gamma\kappa\delta$, igitur circūferētia $\theta\epsilon$ æqualis est circunferentiæ $\epsilon\kappa$. (per. 18. Secundi Sphæric.) Atqui ipsa $\alpha\epsilon$ æqualis est ipsi $\epsilon\delta$ ex hypothese, ergo recta ducta ab α in θ , æqualis est rectæ ductæ à κ ad δ . Suntque æqualium circulorum circunferentiæ. Quare circunferentia $\alpha\theta$ æqualis est circunferentiæ $\kappa\delta$, atque ideo similis est $\alpha\theta$ circunferentia, ipsi $\kappa\delta$ circunferentiæ. Atqui circunferentia $\alpha\theta$ similis est circunferentiæ $\zeta\epsilon$

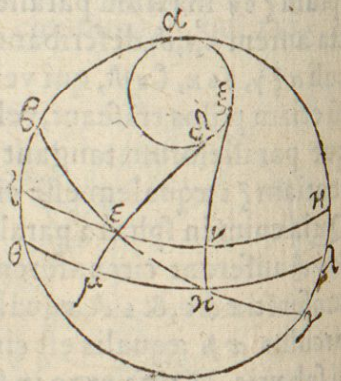


circunferentia autem $\kappa\delta$ similis est ipsi $\epsilon\eta$ (per 10. Secundi Sphaeric.) Igitur circunferentia $\epsilon\zeta$ similis est circunferentiae $\epsilon\eta$. Sunt verò $\epsilon\zeta$ & $\epsilon\eta$, circunferentiae circuli eiusdē. Aequalis ergo est circunferentia $\zeta\epsilon$, circunferentiae $\epsilon\eta$.

THEOREMA. 14.

Si in sphæra maximus circulus aliquem circulum tangat, alius autem maximus circulus obliquus ad parallelos, tangat circulos maiores illis quos tangebatur maximus circulus primò positus, inæquales intercipient circunferentias parallelorum circulorum, quarum propiores vtriuis polorum, maiores erunt quàm vt similes sint remotioribus.

In sphæra enim maximus circulus $\alpha\beta\gamma$ tangat alium circulum $\alpha\delta\xi$ in puncto α , alius autem maximus circulus $\beta\epsilon\gamma$ obliquus ad parallelos, tangat circulos maiores illis quos tangit circulus $\alpha\beta\gamma$. Dico fore vt intercipient circunferentias dissimiles de parallelis circulis, & quarum propiores vtriuis polorum maiores erunt quàm vt similes esse possint remotioribus. Sumantur enim duo quælibet puncta in $\beta\epsilon\gamma$ obliquo circulo, quæ sint ϵ , κ , perque puncta ϵ , κ , describantur circuli $\zeta\epsilon\eta$ & $\theta\mu\lambda$, qui sint paralleli circulo $\alpha\delta\xi$. Dico circunferentiam $\epsilon\eta$ maiorem esse quàm similem ipsi $\kappa\lambda$, & circunferentiam $\theta\kappa$ maiorem esse quàm vt similis sit circunferentiae $\zeta\epsilon$. Per puncta enim ϵ & κ ducantur maximi circuli $\alpha\epsilon\mu$ & $\xi\gamma\kappa$, qui tangant circulum $\alpha\delta\xi$, ita vt semicirculus qui est à puncto α versus partes $\epsilon\mu$, minimè concurrat cum semicirculo tendente à puncto α versus partes $\beta\zeta\theta$: Semicirculus autem tendens à puncto ξ versus partes $\gamma\kappa$, minimè concurrat cum semicirculo tendente à puncto α versus partes in quibus est punctum λ , (quo modo autem id fiat, declaratum est in demonstratione theorematum 13. libri Secundi Sphaeric.) Quia ergo $\alpha\lambda$ & $\xi\kappa$ semicirculi, minimè concurrunt, interque eos interceptæ sunt parallelorum circulorum circunferentiae $\gamma\eta$ & $\kappa\lambda$: igitur circunferentia $\gamma\eta$ similis est circunferentiae $\kappa\lambda$. (per 13. Secundi Sphaeric.) Eademque ratione $\zeta\epsilon$ similis est ipsi $\theta\mu$. & quia circunferentia $\gamma\eta$ est similis circunferentiae $\kappa\lambda$. Igitur $\epsilon\eta$ circunferentia est maior quàm vt similis sit circunferentiae $\kappa\lambda$. Eademque ratione circunferentia $\theta\kappa$ maior est quàm vt similis sit circunferentiae $\zeta\epsilon$. Quod demonstrare oportebat.



FINIS.



ERRATA.

Pag. 4. lin. 13. contractum. lege contactum. Ibid. lin. 19. recta igitur $\alpha\epsilon\zeta$.
lege $\epsilon\alpha\zeta$. pag. 13. lin. 1. lege, ipsius $\alpha\epsilon\gamma\delta$ circuli duæ diametri. &c.

