

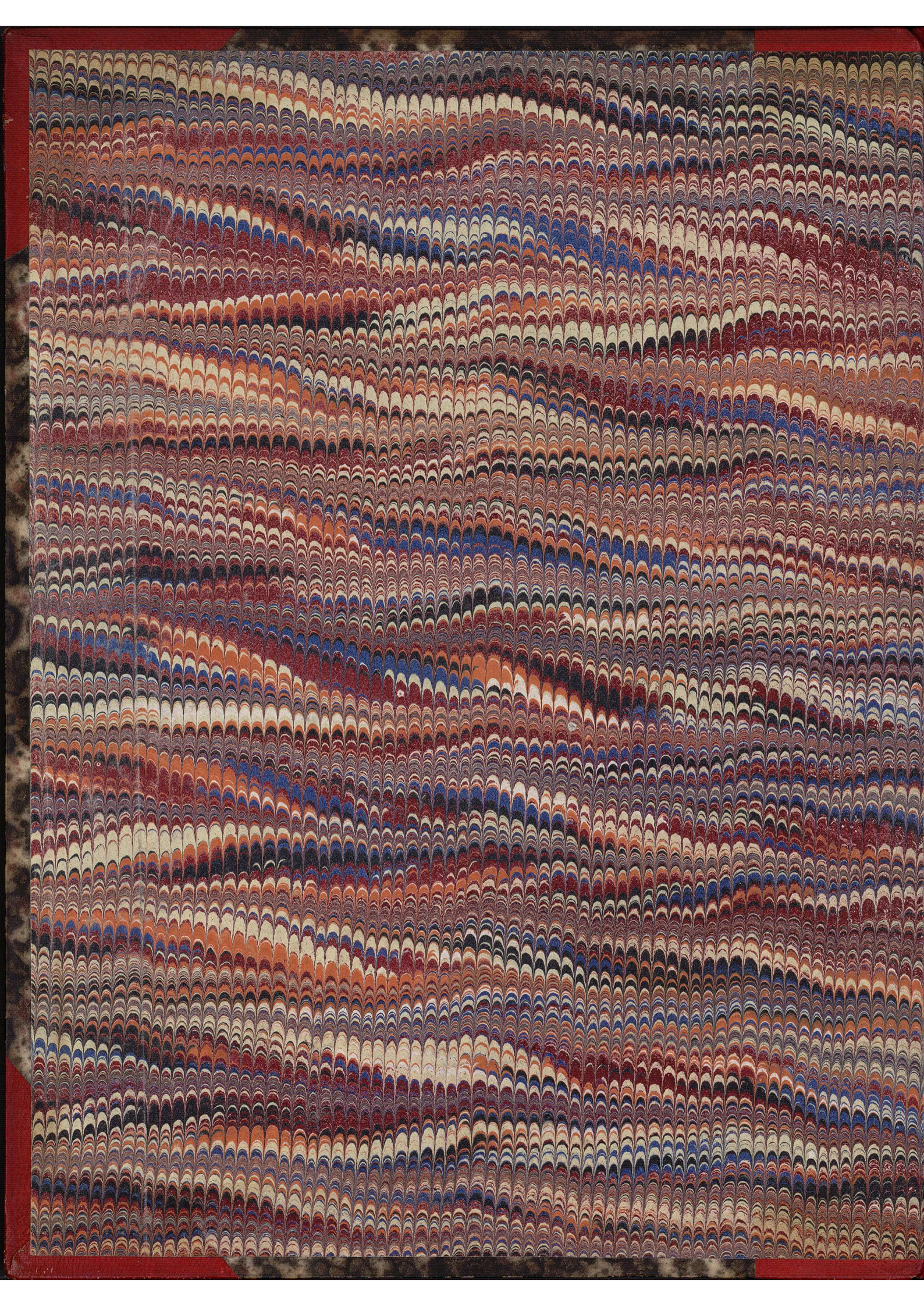
VCMI
in-4^o
6546
SORBONNE

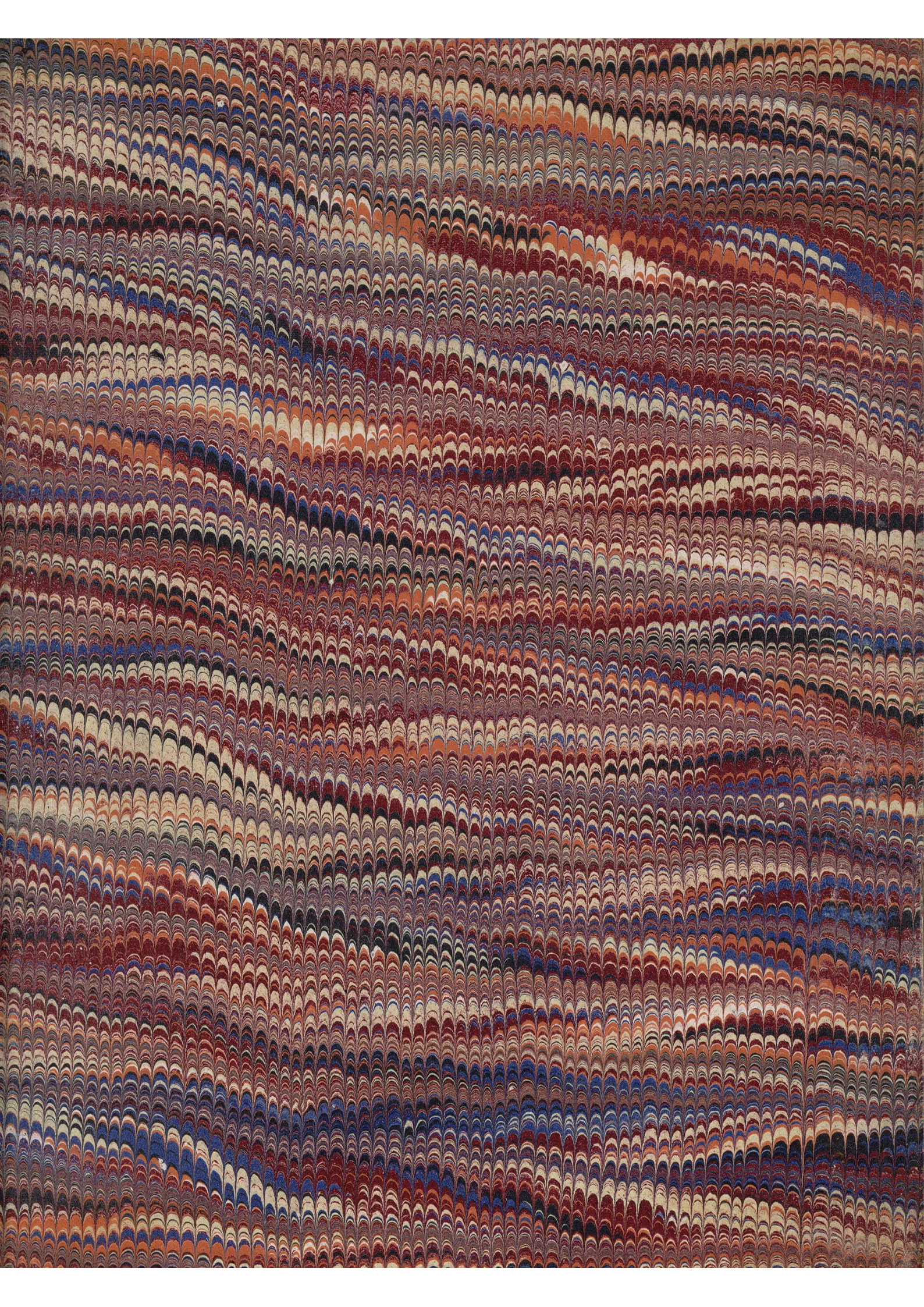
P. RAMUS
ARITHMETICA
GEOMETRIA
ET SCHOLAE
MATHEMATICAE.

BASILEAE

1569.







VCM 4= 6546

2022



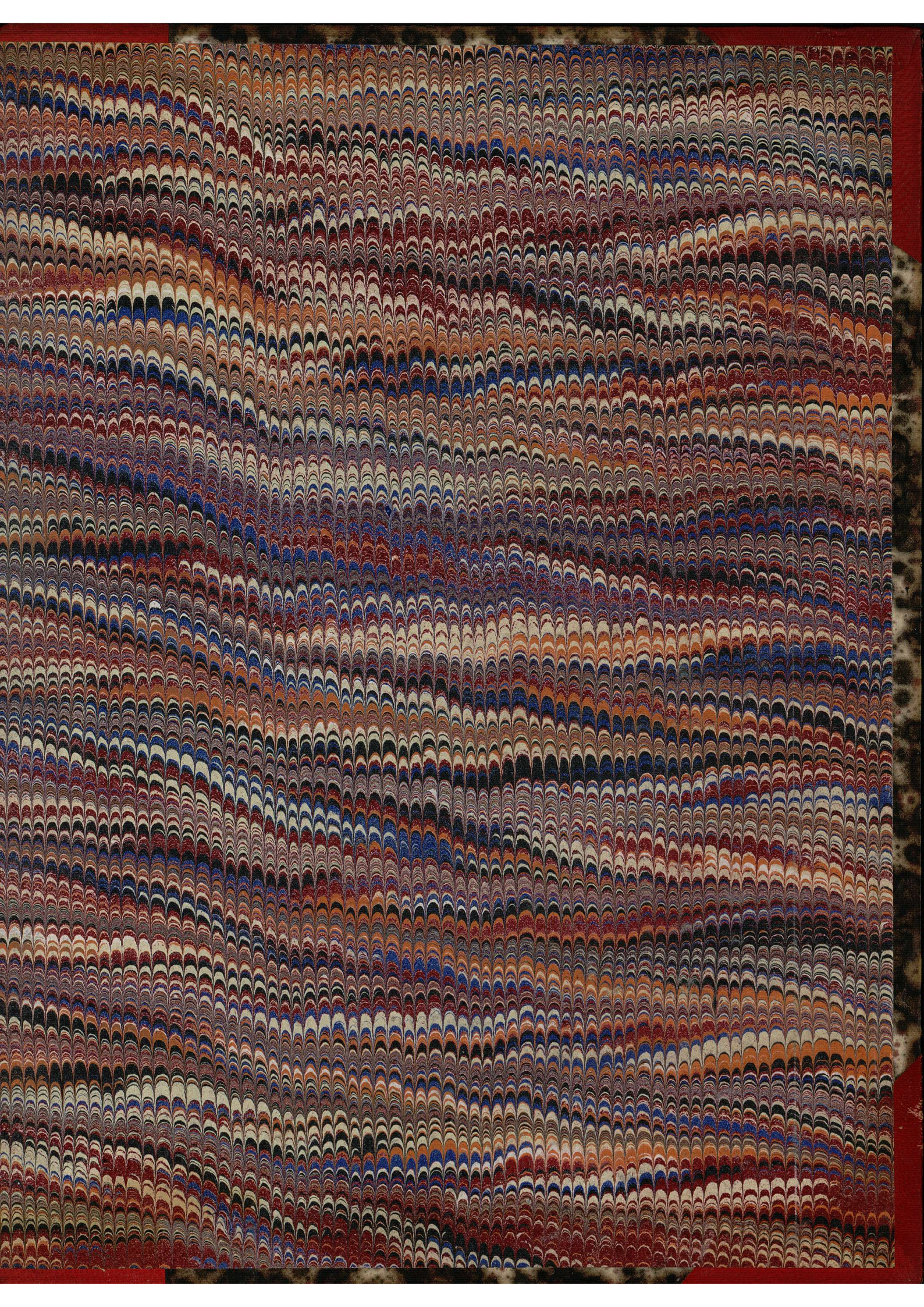


VCM 4= 6546

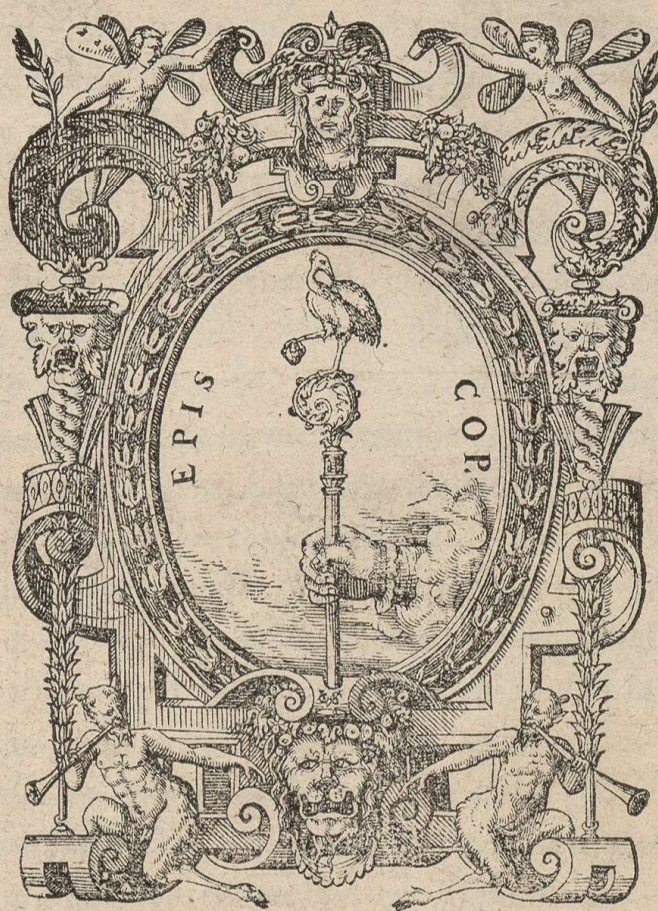


1158205841





P. RAMI ARITH-
METICAE LIBRI
DVO: GEOMETRIAE
SEPTEM ET VIGINTI



BIBLIOTHÈQUE
de
M^r COUSIN

6546
(1)

BASILEAE, PER EVSEBIUM
Episcopium, & Nicolai fratris heredes.

ANNO M. D. LXIX.

1569

P R A M V S L E
C T O R I S.



X omnibus vigiliis (Lector) multos per annos in artium liberalium institutione elucubrat^{is} nihil elementis mathematicis, nobis aequè vel exercitū laboribus, vel anxium curis, vel periculosum temporibus accidit. Nam cum à primis annis mathematicum amore captus, Orontio Fineo (qui primus regia professione in Galliam mathematicas artes retulit) operam dedissem, protinus abdu-
ctum rhetoricæ & philosophicæ exercitationes occuparunt: Interea tamen Ioannem Penam nostræ disciplinæ alumnum nactus mathematici oneris fasce me sublevatum & exoneratum putari. Adolescens enim fuit ingenio quidem ad omnes artes percipiendum mirabili, studio autem in literis latinis & grecis, in philosophia præcipuè & mathematica tanto, ut ardentius aut flagrantius nihil unquam viderim. Quare cum mathematica professio vacaret, & à nobis in examē productus, emulatione competitorum se verius examinatus esset, ita mentes omnium cepit, ut etiam ad-versarii eo loco dignissimum judicarent. Ergo commendatione tam raræ eruditio-
nis professor factus, cum nostris consiliis excitatus spem mathematicæ illustrationis incredibilem concitasset, anno ætatis sexto & vicesimo in ipso professionis pene vestibulo extinctus est, magno mærore nostro, magnoq; mathematicarum rerum detrimento. Itaq; cum de physicis iam cogitarem, saxum idem rursus humeris nostris impositum, animo potius quam robore sustinui. Auxilia undique exquisivi. P. Forcatelus (quod in mercatore Hippocrate mirum fuisse alibi scripsimus) sine literatura, sine philosophia, solo ingenio atq; usu quodam mathematicus sesquiannum apud nos fuit. Hoc adjuvmentō usus cum Euclidem totum accuratè observassem, ecce belli civilis calamitas, fuga civium, bibliothecæ direptio, frustra q; labores euclidei. Verum pace restituta, interim dum Grammaticam, Rhetoricā, Dia-
lecticam recoquimus, reliquias naufragii recolligere libuit, & per Cardi-

nalem Castellonium parisiensis academiae id est omnis doctrinae conservatorem Forcatelo (cum alter mathematicum professor defunctus esset) mathematicam professionem procurare: ut gallica saltem lingua gallicam juventutem exercendo regii collegii columnam istam qua posset, facultate tueretur. Antecedentibus igitur studiis illis expeditis Euclides de integro repetitus est, & diligentius quam antea disceptatus: Intereaq; Federicus Resnerus germanus nobis adfuit, qui quid in literis & mathematicis posset, propediem suo Marte in Opticis Alaceni & Vitellonis declarabit. Atq; hac secunda aggressio cum strenue procederet, insania furiosorum humano sanguine nondum satiatorum rursus erupit, nec propius quicquam fuit, quam abjectis ceteris cogitationibus saluti consulere, id fuit in optimatum castra confugere, & pro diagrammatis radio descriptis urbes ferro flammaq; delatas, strages totis campis miserabiles, praelium deniq; longe omnium acerrimum spectare. Quid enim parisiensi praelio simile vel Marathon Periclis vel Salamis Themistoclis habuit? Sed hac mathesis alio problemate describetur. Tempestas sexto post mense sedata est, domum reuersus nil in bibliotheca praeter inania pulpita reperi. Resnerus noster (qui Lutetiae permansisset) e' praedonum manibus mathematicas commentationes auerterat. At vix domum reuersus videri poteram, cum iam tertiam tempestatem non obscura nubes caelum intuentibus monstrarent. Cumq; Iulianus alter edicto ad omnia academiae compita per falsum regis nomen publicato (rex enim Christianissimus, ubi per senatum hac indignitate commotum rescivit, indignissime tulit) cum Iulianus (inquam) alter iterum christianos scholis prohiberet: imo uero quod apostata ille nunquam cogitarat, armis expelleret. Itaq; ne tertio naufragio funditus periremus, impetrari ab humanissimo rege annuae ad Europae nobiles academias peregrinationis tanquam legationem liberam, e' mediaq; flamma mathematicos illos omnium rerum longe' charissimos penates in Germaniam abripui. In extremis tamen regni finibus cum brevia & syrtes praeteruectus mihi viderer, duodecim equites e' iugo montis decurrentes animadverti, cademq; intentans

intentantibus & Condai principis consiliarium hostiliter inclamantibus ultro occurri, & diplomate regij commeatus tantisper repressos docui longè alio nos apud regem esse numero locoque quam ipsis esset persuasum, aliasque tali tempori accommodata differui. Ter dimissus, ter repetitus, tandem velocitate summa eò perveni, ubi sicarijs licentia nequaquam par esset. Deinceps tutus & letus in Germaniam aduentus bonorum ac doctorum omnium (quibus adhuc occurrimus) singulari humanitate & gratulatione exceptus est. Hoc sacrum mathematici asylum fuit: reducta tandem (ut tertio mathematicarum scholarum libro proposuimus) & composita utcumque & numeris & lineamentis sunt elementa, eaq; edita & publicata, saltem ne tot periculis erepta imposterum periclitarentur. Verumtamen tanta malorum Ilias insequitur, ut cum respirare primum cœperim, tum afflictæ patriæ gravissimum dolorem animo percipiam. Laborum istorum partus felicia lucis auspicia mereri videbatur. Quemnā igitur mecænatem hoc munere potissimum colerem? Christianissimumne regem? an ex optimatibus nostris præcipuum aliquem? At Gallia nescio quæ furialis erynnis miserabile regi spectaculum in ipso & regni & ætatis initio videtur extruxisse, in quo principes regni sui mutuis cædibus concurrentes ad extremum regni exitium spectare cogeretur. Itaq; Deus optime maxime miserere pereuntis regni, solem purioris religionis clarum & illustrem in Galliam tuam reducito, regem meum regum omnium beatissimum efficit: arma tot fortium utrinq; virorum in hostes nominis tui convertito. Interea verò mathematicum studiosos omnes obsecrabo, ut suscipiant laceras istas totoque æquore jactatas

—Reliquias Danaum atq; immitis Achilli

Si in Angliam repulerint: Elisabetham reginam laudum uirtutumque omnium patronam reperient. Si ad I. Steuardum Scotia rectorem principem cum bellica laude tum uera pietate insignem accesserint, nusquam à magistro naufragos veluti condiscipulos gratiores accessuros existimem. Germania jam mihi altera patria est, & præsens singulos mathematico

IN ARITH. ET GEOMETRIAM PRAEFATIO.

proœmio appellatos salutare statuo. In Italia Hieronymum Cardanum et Federicum Commandinum ubi saluta verint, non dubito quin gratis animis excipiantur. Sed in Lusitaniam ad P. Nonium secundos ventos exopta verim. Hic enim vir Archimedeus, vir (inquam) Archimedeus est, qui ejectis & egentibus præcipuè possit opitulari. Scripsi & rescripsi hic pleraque millies, & infinitis subinde modis commuta vi, antequam ad propositam methodi normam quadrarent, magisq; logicam in mathematico themate exercui, quam mathematicam in suo pulvere serioque usu tracta vi: neque jam biennio toto ad hæc studia recolendum á novis quotidie turbis requies ulla fuit: neque ideo dubito, quin tanta commutatio tanque tumultuaria editio pleraque tulerit, quæ pacatioris & quietioris otii meditatio non ferret. Hanc igitur meditationem mathematici mathematico proœmio appellati capeßite: usum locis omnibus exigite: hujus enim gratia permulta ex elementis sustuli, & vos fortasse plura tolletis: aut quorundam nobis ignotum fructum demonstrabitis. Statueram singulos libros singulis uestrum nuncupare, quod equidem confido restituta pace facturum, ut accuratius singula corrigerentur & illustrarentur. Insanire enim plerosque doctos homines existimo, qui patronum & quidem plerumque rerum ipsarum ignarum aduersus reprehensores operum suorum præfationibus invocant, quasi & dii quidam sint, qui nihil offenderint, aut peccata sua corrigi reipub. perniciosum arbitrentur. Quamobrem quantus cujusque uestrum erga mathematicas artes est amor, tantum in mathematicæ dignitatis emendationem & perfectionem incumbite, gratius isto beneficio atque optabilius mathematicum studiosius accidere nihil potest.

ERRATA ARITHMETICAE SIC CORRIGI

to: primus numerus paginam, secundus
lineam significat.

1.23 nota puncta in periodis. 3, 4 loci: tum 1 & 2 & 7 sunt 10 pro 1 sequentis loci. 8, 35 divisio-
rem & facio 12, 44, 32 si primus non 15, 36 pro ipsis erit. 15, 30 pro 2 lege 8. 17, 30 $\frac{2}{3}$, 32 dividam 5
asses 12, 26, 7 $\frac{6}{49}$, 16 numeros alternis. 24, servabo: 23, 8 pro 2 lege 3: & 26, supertri quarta. 24,
8, sic 10 ad 12 & 35 a medio superat factum ab extremis facto. 27, 4 lege 89 $\frac{1}{7}$. Eme, 16 iam. 31, 10
imitatus est, 31 lege $\frac{5}{4} \frac{3}{8} \frac{2}{3}$

ERRATA GEOMETRIAE SIC CORRIGITO:

primus numerus paginam, secundus lineam signifi-
cat. Figuras quasdam euerfas aut transpo-
sitas redigito in ordinem.

3, 16 asymmetrae. 6, 3 ab Euclide. 8, 15 inscripta. (23, 39 geometrica. 42, 6 i u y. 42, 7 & 8 a u y.
9 a & y. 57, 7 item. 11 basi y e erit ei ad i u ut y o id est per 5 e 12 e 5 a i ad o u, & alterné, ut
ei ad a i, sic i u ad o u. 58, 9 per 2 & i e, 21 a i e aequantur, 32 eadem a e. 66, 29 in minore.
64, 30 terminum. 65, 13 mensuris. 66, 36 ad u a, 41 recedendi. 67, 9 pone l ad finem radii optici
in figura. 68, 3 th Euclidis, 16 pedum 20, 70, 30 $\frac{9}{23}$. 71, 19, 63. 75, 5 parallelogrammi. 76, 10 al-
terna, 12 cum rotundo, 13 duplum trianguli. 85, 1 celebratum, 46 st. 87, 15 & duplici, 31 consecra-
rium. 88, 6. 144: Hæ notæ significant quot. 88, 1 singulares. 90, 11 pone in figura 12. 91, 21 Car-
danus tantum agri. 92, 13 triplex. 93, 3 dele tertio. 13 totius. 94, 10 & o e i, 36 n j y. (95, 27 l 5 id
est) 26 latera, 40 fuerunt rationales. 97, 10 repone o in fine lineæ il. 103, 2 utcumque, 32 genesis.
105, 25 sintque. 108, 15 hac. 110, 1 a e secet. 115, 31 æquilatera. 118, 5 repone in figura tangentem
i u. 128, 37 fac diametrum a o u. 141, 26 dele denique. 142, 27 e 18 &. 144, 12 puncto t. 146,
24 quam a i & a o æquatur. 151, 1 æquantur. 154, 12 si, 36 planis s r l m, & u j v f bisecanti-
bus, 32 dele duo plana s r l m & u j v f 32 sectio t f. 156, 20 e i c 15 e 4. stereometria. 161, 9 ste-
reometria, 11 additus. 164, 15 Et ita, 16 demonstrantis. 166, 16 duplex, 19 y n, 30 in. 179, 1 d b.
180, 18 duobus. 185, 15 manens est. 186, 51 cylindri. 187, 13 hæc geodesia, 26 cylindris a b, 27, 74-
fis. 189, 12 diametro.

LIBRARY OF THE
MUSEUM OF NATURAL HISTORY
NEW YORK

THE LIBRARY OF THE
MUSEUM OF NATURAL HISTORY
NEW YORK
HAS THE HONOR TO ACKNOWLEDGE THE RECEIPT OF
THE FOLLOWING BOOKS

LIBRARY OF THE
MUSEUM OF NATURAL HISTORY
NEW YORK

THE LIBRARY OF THE
MUSEUM OF NATURAL HISTORY
NEW YORK
HAS THE HONOR TO ACKNOWLEDGE THE RECEIPT OF
THE FOLLOWING BOOKS
1. *...*
2. *...*
3. *...*
4. *...*
5. *...*
6. *...*
7. *...*
8. *...*
9. *...*
10. *...*
11. *...*
12. *...*
13. *...*
14. *...*
15. *...*
16. *...*
17. *...*
18. *...*
19. *...*
20. *...*
21. *...*
22. *...*
23. *...*
24. *...*
25. *...*
26. *...*
27. *...*
28. *...*
29. *...*
30. *...*
31. *...*
32. *...*
33. *...*
34. *...*
35. *...*
36. *...*
37. *...*
38. *...*
39. *...*
40. *...*
41. *...*
42. *...*
43. *...*
44. *...*
45. *...*
46. *...*
47. *...*
48. *...*
49. *...*
50. *...*
51. *...*
52. *...*
53. *...*
54. *...*
55. *...*
56. *...*
57. *...*
58. *...*
59. *...*
60. *...*
61. *...*
62. *...*
63. *...*
64. *...*
65. *...*
66. *...*
67. *...*
68. *...*
69. *...*
70. *...*
71. *...*
72. *...*
73. *...*
74. *...*
75. *...*
76. *...*
77. *...*
78. *...*
79. *...*
80. *...*
81. *...*
82. *...*
83. *...*
84. *...*
85. *...*
86. *...*
87. *...*
88. *...*
89. *...*
90. *...*
91. *...*
92. *...*
93. *...*
94. *...*
95. *...*
96. *...*
97. *...*
98. *...*
99. *...*
100. *...*

P. RAMI ARITH- METICAE LIBER I

Capitulum XIII.

CAP. I. DE NOTIS ARITHMETICIS.



^{Definitio} Rithmetica est doctrina bene numerandi. Partes arithmeticae duae sunt, simplex & comparatiua: simplex, quae considerat simplicem numeri naturam. Numerus est secundum quem unum quodque numeratur: ut secundum unitatem unum, secundum binarium duo, secundum ternarium tria, & sic deinceps omnes numeri: Itaque numerus est unitatis aut multitudinis: potestque esse minimus, ut unitas: maximus autem quo major, dari nequeat, nullus esse potest. In numero spectatur primum notatio, deinde numeratio. Numeri, vero in abaco scribendi & notandi haec decem sunt notae. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. quarum prima significat unum, secunda duo, tertia tria, quarta quatuor, quinta quinque, sexta sex, septima septem, octaua octo, nona novem: Circulus quae nota est ultima: nil per se significat: valet tamen ad alias notas amplificandum: Amplificationis gradus sunt tres, deincepsque periodis similiter iterati, semel, decies, centies. Nam de primis novem notis qualibet sola, aut ultimo universi numeri loco, suum numerum semel exprimit: penultimo, decies, antepenultimo centies: Haec prima est periodus: Secunda est millium. Quarto itaque loco numerabis millena semel, quinto decies, sexto centies. Hinc sequitur tertia periodus, ubi numerabis millies millena semel, decies, centies: tum similiter quarta periodus est millies millena millia, ubi tres illi gradus similiter iterantur: & sic in infinitum. Numeros igitur ita notabis unum 1. decem 10. centum 100. mille 1000. decem millia 10000. centum millia 100000. millies millena 1000000: duo 2. viginti 20. ducenta 200. duo millia 2000. viginti millia 20000. ducenta millia 200000. bis millena millia 2000000: sic notae singulae locis ternis augentur. Atqui si numeri pluribus notis descripti & collecti summa longior fuerit: ut eam suis partibus efferre condiscas: fines periodorum punctis distinguantur. Numerum igitur decem his notis sic interpunctum 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 ita enuntiabis: Primo membro dices millies millena millia. Secundo ducenties tricies quater millena millia. Tercio quingenta sexaginta septem millia: Quarto octingenta nonaginta. Quapropter hoc commune velut alphabetum decem notarum ad quemlibet notandum numerum esto, alphabetum tamen non voci, sed manui & scripturae, id est abaco necessarium.

CAP. II. DE ADDITIONE.

Numeratio est duobus oblati numerorum terminis tertium invenit, & quidem nisi tota simul expediri possit, inductione partium utitur, quoniam idem
a est nu-

Partitio

Simplex.

Numerus quid?

Numerus quodlibet

Nullus minimus maximus

nota prima periodis

ratio cui inductione
ne inveniatur
numerus

est numerare per totum & per partes, tumque nota qualibet tanquam solitaria spectatur, & si sequenti numerationi serviat, mente reservatur ad effugiendum crebrioris lituræ tedium. Numeratio est prima aut conjuncta. Prima, quæ numerum cum numero semel numerat, ut additio & subductio. Additio est numeratio prima, qua numerus additur numero, & habetur totus. Hic sunt decem unitates. *1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.* quibus addendis numeramus *1.2.3.4.5.6.7.8.9.10*: ubi ad numerum quemque antecedentem unitas additur: & hæc prima species est additionis per unitatem: 2 addatur ad 1, totus erit 3: & 2 addatur ad 3, totus erit 5: & hic secunda species est additionis per 2: 3 addatur ad 1, totus erit 4: 3 addatur ad 4, totus erit 7: & tertia species additionis erit per 3: & sic deinceps. Additio numerorum continuorum prior & facilior est, quia toti cum totis simul adduntur: ut è quatuor debitoribus primus debeat aureos 1000. secundus 200. tertius 30. quartus 4: summam continenter addes, & dices esse 1234 aureos, & sic Aristoteles ait numerum necessario numerari per additionem. Additio disjunctorum numerorum præcipuam meditationem requirit, & quidem in notis primum inter se singulis: ut discipulus prompte sciat addere singulas cum singulis: ut 1 & 2 sunt 3: 4 & 5 sunt 9: 9 & 8 sunt 17, & similiter totum alphabetum *1.2.3.4.5.6.7.8.9*, sursum deorsumque addendo meditetur. Hic Pythagoræus additionis abacus est. Numerorum disjunctorum additio sinistrorsum inducenda est, ut excrecentes summæ locis excrecentibus ordine facilius notentur: & ex his additis collectus numerus interjecta linea, subnotetur. Esto primum exemplum facillimum. Debitor tibi debet uno nomine coronatos 234, alter 111: Quærat igitur quæ summa sit ex utroque. Ordine dispositis numeris, ut similes inter se respondeant hoc modo.

2	3	4
1	1	1

sic incipiam: 1 & 4 sunt 5. Itaque 5 subnotabo: deinde 1 & 3 sunt 4: & hic secundo loco 4 subnotabo: Denique 1 & 2 sunt 3: quæ similiter subnotabo. Inductio fieri.

2	3	4
1	1	1
3	4	5

In hoc exemplo tertius numerus invenitur è duobus datis: inducitur per partes, quæ singulæ tanquam solitariae spectantur. Esto jam paulo plenius exemplum ubi mentis reservatio adhibeatur: addantur 5 6 7 8 9 ad 1 2 3 4: dispositis numeris hoc modo.

5	6	7	8	9
1	2	3	4	

sic incipiam ab ultimo loco: 4 & 9 sunt 13: hic duæ notæ sunt duobus locis notandæ:

tanda: ultima scribenda est ultimo loco, & secunda reservanda in secundum locum. Itaque subnotabo 3 & reservabo 10 pro uno sequentis loci, & dicam sequenti loco, 1 & 3 sunt 4: 4 & 8 sunt 12, subnotabo 2 & reservabo ut antea, 10 pro 1 sequentis loci: tum 1 & 2 sunt 3: & 3 & 6 sunt 9: quæ subnotabis: Deinde 5 sola reperiam, quæ sola similiter subnotabo: denique invenies his duobus numeris additis totam summam esse 58023. Inductionis summa sic erit.

5	6	7	8	9
	1	2	3	4
5	8	0	2	3

Potest verò & complurium numerorum esse additio, sed tamen duo tantum separatim spectantur, & duo primum additi tanquam unus additur ad tertium, neque duobus plures adduntur, ut tertius inveniatur: Ut si quærat quæ priusdem vixerit Homerus, & respondeatur è Gellio, 160 annis ante conditam Romam, quæ condita sit ante natum Christum annis 752: Christum vero natum anno abhinc 1567. addantur hi tres numeri: Summa inductionis indicans Homerum annos abhinc 2479 floruisse, erit hoc modo.

	1	6	0
	7	5	2
1	5	6	7
2	4	7	9

Idem erit si quotlibet numeros proposueris, ut hic.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	0	0	2	0	0	3	0	4
7	9	5	6	8	3	1	0	9
2	0	0	6	9	9	4	5	2
								3

CAP. III. DE SUBDUCTIONE.

Subductio est numeratio prima, qua numerus subducitur à numero, & habetur reliquus. Subduco 1 de 2, manet 1: 2 de 5, manent 3: 3 de 9, manent 6. Subductionis meditatio in singulis notis eadē hic esse debet, quæ fuit in additione: Tollo 3 de 7, manent 4: tollo 4 de 9, manent 5: & similiter totum alphabetum 123456789 omni genere versandum. Hic Pythagoræus subductionis abacus est: jam sit exemplū ubi totus numerus à toto simul subduci non possit, ut si

a 2 de sum-

de summa æris illius alieni 3 4 5 subducenda sunt 2 3 4, dispositis ordine numeris hoc modo,

3	4	5
2	3	4

subducendo infra: supra autem à quo subductio facienda, incipiam à sinistra dextrorsum, contra quam in additione: Tollo 2 de 3, manet 1, & supernoto 1 deletis 3 & 2. Deinde subducam 3 de 4, manet 1, & supernoto 1 deletis 4 & 3: denique subductis 4 & 5 manet 1, & supernotabo 1, deletis 5 & 4: unde inveniam reliquum esse 111, cum subduxero 2 3 4 à 3 4 5. Inductio tota sic erit.

1	1	1
3	4	5
2	3	4

Hoc exemplum invenit è duobus oblatiis tertium, inducit per partes, easque tanquam solitarias. Esto jam & exemplum reservati mente numeri, nempe cum sequens subducenda nota major est, quàm supraposita, tum è reliquo præcedente, 1 mente reservabo, quod notam sequentem denario augeat: ut si subducenda sint 3 4 5 de 4 3 2, cum subducam 3 de 4 non supernotabo 1, quia 4 sequens subducenda nota major est supraposita 3, sed illud mente reservabo, & 4 subductis à 13 manerent 9, quæ nequaquam propter eandem causam notabo, sed uno minus, 8 tantum supernotabo, & 1 mente reservabo, quia sequens subducenda nota major est. Itaque 5 subductis à 12, reliqua 7 supernotabis: unde inveniam subductis 3 4 5 de 4 3 2 relinqui 87. Tota inductio sic erit.

8	7
4	3
3	4

Hæc subducendi vera via est, & majoribus deinde numerationibus necessaria, nec omnino prius antecedens nota est subducenda, quàm providero unde reliquæ subducì possint. Si intercurrent circuli significantibus notis, cum similibus tamen inscribendi, & eadem tenenda via est. Carolus magnus anno Christi 801. coronatus est imperator: nunc autem annus est Christi 1567, anni itaque ab imperio Caroli nunc sunt 766. Inductio sic erit.

7	6	6
1	5	6
8	5	8

jam ponatur exemplum majoris differentiæ: ut à 4 0 0 0 2 3 subducantur 9 9, resta

99, restabunt 399924, inductio sic erit.

$$\begin{array}{r} 3999924 \\ 4000000 \\ \hline 99 \end{array}$$

Sit & alterum exemplum, ut subducantur 287659 de 387657. Inductio sic erit.

$$\begin{array}{r} 99998 \\ 387657 \\ \hline 287659 \end{array}$$

Si plures termini fuerint vel subducendi, uel ejus, a quo subductio facienda, reducendi sunt prius additione in unam summam: ut si velis subducere 465 de 234. & 905. addes 234 & 905, totus erit 1139: unde subductis 465, reliquum erit 674.

$$\begin{array}{r} 234 \\ 905 \\ \hline 1139 \\ 465 \\ \hline 674 \end{array}$$

CAP. IIIT. DE MULTIPLICATIONE.

Numeratio prima ejusmodi est, conjuncta sequitur, quæ numerum cum numero toties numerat, quoties proponitur. Numeratio conjuncta est multiplicatio, aut diuisio: multiplicatio est, qua multiplicandus toties additur, quoties unitas in multiplicante continetur, & habetur factus: unitas auget addendo: ut 1 & 1 sunt 2: 1 & 2 sunt 3: 1 & 3 sunt 4: attamen nihil auget multiplicando. Nam semel 1, 2, 3, sunt tantum 1, 2, 3. Item 2 sibi additus est 4, quot item efficit sui multiplicatione. Nam bis bina sunt item 4. Id in illis est proprium. At 2 & quilibet alius deinceps numerus quolibet loco ceteros numeros multiplicat: ut bis 3 sunt 6, hic sumo 3 bis, quoties nempe unitas in 2 multiplicante continetur. Denique pro dato multiplicante multiplicandus additur. Numeri inter se multiplicati faciunt eundem: ut quater quina sunt 20. & quinquies quaterna sunt item 20. Meditatio autem de multiplicandis inter se notis tanto accuratius suscipienda est, quanto majus est multiplicationis opus. Itaque puer perdiscat primo singulas notas per se multiplicare: bis bina sunt 4: ter terna sunt 9: quater quaterna sunt 16: quinquies quina sunt 25: sexies sena 36: septies septena 49: octies octona 64: novies novena 81. Tum singularum notarum cum singulis multiplicatione sciat quid efficiatur: ut bis 3 sunt 6: bis quaterna 8: bis quina 10: bis sena 12: bis septena 14: bis octona 16: bis novena 18: & sic in reliquis notis: sed in majoribus major est attentio: ut novies octona sunt 72: novies septena, sena, quina sunt 63, 54, 45: octies septena, sena, quina sunt 56, 48, 40. Hanc singularum notarum multiplicationem affecutus discipulus, multiplicationem quamlibet facilem habebit. Hic Pythagoræus multiplicationis abacus est. Atqui si rudibus majorum notarum aliqua difficilior erit, licebit & hic per partes numerare, ut octies novena,

a 3 si difficile

si difficile sit numerare, addam primo quater 9, deinde summam addam sibi ipsi, id est dimidium dimidio ut totum habeam, sic.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ \hline 36 \\ 36 \\ \hline 72 \end{array}$$

Quinetiam licebit per partes & hic multiplicare, & particulares summas addere, ut 8 per 9 sic.

$$\begin{array}{r} 27 \\ 35 \\ 35 \\ 10 \\ 21 \\ \hline 6 \\ 72 \end{array}$$

Sed jam majoris & pluribus notis constituti numeri multiplicatio proponatur, & quærat quis aureorum numero menstruo stipendio 456 militum, cum singulis 4 aurei attribuantur. Id assequar 456 per 4 multiplicatis. Sinistrorsum, ut in additione procedam: quia multiplicandi notæ toties addendæ, quoties unitas in multiplicante continetur, & majorem commodius superne collocabo. Deinde multiplicantem per tres multiplicandi notas sigillatim ducam, & tribus trium segmentorum multiplicationibus singularibus absolvam. Numeris igitur ita dispositis, lineaque ut in additione subscripta, sic incipiam.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 4 \end{array}$$

Quater 6 sunt 24: notabo 4, & 20 reservabo pro 2 loci sequentis: talis reservatio fuit in additione, & hic tanto crebrior, quâto numeratio major est: quater 5 sunt 20, & 2 reservata, sunt 22: notabo 2, reservabo iterum 20 in locum proximum pro 2, quater quaterna sunt 16, & 2 reservata sunt 18, quæ notabo integra: Inductionis summa sic erit.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 4 \\ \hline 1824 \end{array}$$

Unde

Unde inveniā 4 5 6 per 4 multiplicatis fieri 1 8 2 4. Hic uidemus inventionē, tertii inductionem partium, notarum solitudinem & reservationem. Idem fiet, per partes utriusque numeri tum multiplicandi tum multiplicantis. Proponatur igitur exemplum paulo plenius, & quidem per partes multiplicantis similibus multiplicandi partibus respōdentes, ut 2 0 7 0 per 2 0 4 multiplicentur. Singularis inductio partium componet tandem 4 2 2 2 8 0 hoc modo.

$$\begin{array}{r}
 2 \ 0 \ 7 \ 0 \\
 2 \ 0 \ 4 \\
 \hline
 8 \ 2 \ 8 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 4 \ 1 \ 4 \ 0 \\
 \hline
 4 \ 2 \ 2 \ 2 \ 8 \ 0
 \end{array}$$

Quo in exemplo, sicut in ceteris omnibus, circulus per circulum, aut per significātem notam nihil efficit. Circulus tamen pro inventionē talis multiplicationis notabitur in principio ad sequentes notas augendum. At si sit in medio multiplicantis loco, nihil est necesse: compendio autem numeros in circulum desinētes multiplicare possumus detractis ultimis circulis: deinde iisdem facto postpositis: ut si multiplicentur 7 2 0 0 per 4 5 0, omīssis circulis illic duobus, hic uno, multiplicabo 72 per 4 5, & facto 3 2 4 0, postponam tres circulos hoc modo, 3 2 4 0 0 0. His perceptis nulla multiplicationis numeratio proponi poterit difficilis vel obscura, quamlibet ea magna sit: ut si multiplicandus sit 1 2 3 4 5 6 7 8 9 per 7 8 9 factus erit 9 8 6 0 7 4 0 6 5 2 1.

CAP. V. DE DIVISIONE.

Divisio est, qua divisor subducitur à dividendo quoties in eo continetur, & habetur quotus: unitas minuit numerum subducendo, ut tollo 1 de 1, de 2, de 3, manet 0, 1, 2: non minuit tamen dividēdo. Nam 12 divisus per 1, quotus est 12, id est 12 unitates quales sunt in dividendo, & hic divisus & quotus est idem. Divisis 12 per 12 quotus est 1, id est pars duodecima: & hic quotus est dividendi pars quota cognominis divisoni: ut secunda, si divisor sit 2: tertia, si 3: quarta, si 4, & sic deinceps. Atque ut in additione numerus totus, in subtractione reliquus, in multiplicatione factus, sic in divisione quotus cognominis divisoni quaritur, id est si per 2 dividatur, quid valeat una secunda dividendi, si per 3, quid tertia, si per 4, quid quarta. Divisio igitur multiplicationi respondet: sed analogia inversa: ut enim in multiplicatione unitas est ad multiplicātem, sic multiplicandus est ad factum: contra vero in divisione: ut dividendus ad divisorem, sic quotus ad unitatem.

Tres autem divisionis termini notantur, dividendus supra, divisor infra, quotus ad

tus ad latus, ut diuisis 12 per 4, quotus 3 erit hoc modo.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 4 \quad 3 \end{array}$$

Atque meditatio illa, quæ in additionis, subductionis, multiplicationis numeratione commendata est, est hic imprimis commendanda, ut discipulus sciat quem numerum quælibet nota singularis, & per quem dividat: Sciet autem per comparisonem multiplicationis. Nam si numerus faciat numerum per aliquem, factum dividet per eundem. Unitas vero facit omnem numerum per ipsum, & omnis numerus seipsum dividit per unitatē: Ergo unitas dividit omnem numerum: Bis quaterna sunt 8: ergo 2 dividit 8 per 4, & 4 dividit eundem per 2. Quater 5 sunt 20: ergo 4 dividit 20 per 5, & 5 dividit 20 per 4. Septies 8 sunt 56: Ergo 7 dividit 56 per 8, & 8 dividit 56 per 7. Octies 9 sunt 72: Ergo 8 dividit 72 per 9, & 9 dividit 72 per 8, omninoque numerus dividitur per eos numeros per quos factus est: qui multos factores habet, habet etiam multos diuisores: Hic igitur Pythagoræus diuisionis abacus est. Sit exemplum ubi inductione sit utendum, & quidem dextrorsum, ut in subductione. Exemplum erit primū de diuifore toto & integro: dividantur 7476 per 6, notabo primum dividendum supra, diuiforem infra, & ad latus sinistrum, ut immobilis semper appareat, quamuis singulis in locis, deleatur: secus in proluxa diuisione confusio quædam per errorem memoriæ creari possit.

$$\begin{array}{r} 6) \quad 7 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \\ 6 \end{array}$$

ē 7 possum subducere 6 semel, & manet 1: notabo igitur 1 pro quoto, & deletis 7 dividendo, & 6 diuifore, superscribam 1. Prima inductio sic erit.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 6) \quad 7 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad (1 \\ 6 \end{array}$$

Secundo producam 6 diuiforem in proximum locum. jam 6 possum subducere bis à 14, nec amplius, & bis senis subductis à 14 restant 2. Hanc igitur meditam multiplicem subductionem animo reseruans adnoto primum 2 post 1 pro quoto. Deinde ne forte lapsus memoriæ intercitat, aut aliquid aliud offensum sit, repeto ab animo depositum separatim per multiplicationem, & subductionem, & multiplico primo 2 quotum per 6 diuiforem, & reservatum ac jam reflectum subscribo sub 14, deleoque 6. Secundo subduco 12 à 14, & manent 2, quæ deletis 12 & 14, superscribo. Secunda inductio sic erit.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6) \quad 7 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad (12 \\ 12 \\ 2 \end{array}$$

Tertio

Tertio producam 6 divisorem in proximum locum 27, unde possum subducere quater sena, id est 24, ut 3 maneat. At factum & reliquum servans animo ad notabo 4 post 12 pro quoto: Deinde factum repetam eadem multiplicatione 6 per 4, & subscribam 24 deletis 6, tum subducam factum 24 à 27, & superscribam 3 reliquum, deletis 24 & 27. Tertia inductio sic erit.

$$\begin{array}{r}
 6) \cancel{2} \cancel{7} \cancel{3} \\
 \cancel{7} \cancel{4} \cancel{7} (124 \\
 \cancel{6} \\
 \cancel{2} \cancel{7} \\

 \end{array}$$

Postremo producam 6 in reliquum locum 36, unde possum omnino subducere sexies sena, id est 36, ut nihil maneat. At in memoria deponens 36 adnotabo 6 post 124 pro quoto: Deinde repeto depositum, multiplicando 6 per 6, & subicio 36. Postremo subductis deletisque utrinque notis, tota inductio sic erit.

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2} \cancel{7} \cancel{3} \\
 \cancel{7} \cancel{4} \cancel{7} (1246 \\
 \cancel{6} \\
 \cancel{2} \cancel{7} \\

 \end{array}$$

- 20 Hic invenio 7476 in 6 divisus quotum esse 1246, qui hac divisione expetebatur. Divisionis igitur opus primo contextitur meditatione multiplicis subductionis, & adnotatione quoti, ubi jam peracta divisio est, sed peracta tantum in mentis abaco, ut memoria tanto major hic requiratur, quam antea: Deinde velut ad memoriam & fidem meditationis probandum retexitur, exemplo oculis subjecto, repetita tum multiplicatione per quotum & divisorem, tanquam pignora depositi: tum facti à dividendo subductione. Atqui si plures sint notæ divisoris, omnes simul velut una considerantur, & subducuntur æqualiter. Cuiusmodi exemplum sit de divisore multiplici, qui per partes suas æqualiter subducendus sit à suprapositis dividendi notis, quoties nempe, continetur.
- 30 Et hic subductionis vera via, quam docui, plane cernitur, cum subducere incipiamus dextrorsum singulas subducendi notas ante meditando, quam quidquam de quoto statuatur. Dividantur igitur 144 per 12, positis ordine numeris hoc modo.

$$\begin{array}{r}
 12) 1 4 4 \\
 \\

 \end{array}$$

Videbo primum 1 ab 1 semel subduci, & toties 2 à 4, & 2 restabunt: adnotabo
b igitur

igitur 1 pro quoto, & deletis 14 & 12 superſcribam 2. Inductio prima ſic erit.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 12) \cancel{1} \cancel{4} 4 (1 \\ \cancel{2} \end{array}$$

Secundo producam diuiſorem in proximum locū 24: ac videbo 1 à 2 bis ſubducī poſſe, & 2 à 4 toties, neque quidquam reſtare. Inductio tota ſic erit.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 12) \cancel{1} \cancel{4} \cancel{4} (12 \\ \cancel{2} \\ \phantom{\cancel{2}} \cancel{2} \end{array}$$

In prima inductione huius exempli, ſecunda diuiſoris nota ſapius ſubducī poterat, quam prima: ſit exemplum, ubi prima ſapius ſubducī poſſit, quam ſecunda, & quidem diuiſor ſit maiorum notarum. Diuidantur 841 coronati ex præda militibus 29. Notabo primo diuidendum & diuiſorem ſic.

$$\begin{array}{r} 8 1 \\ 29) \\ 2 \end{array}$$

Ac videbo 2 ab 8 quater quidem ſubducī poſſe, ut primi 20 milites ſinguli capiant 400 coronatos: at reliqui 9 milites clamabūt iniquam partitionem eſſe, neque partem ſibi æqualem relinqui, quia 9 à 4 toties ſubducī non poſſit: poſſum etiam 2 ter ſubducere ab 8, ſed à reliquis 24 non poſſum toties ſubducere 9: ſubducam igitur, ut æqualitas ſubductionis in partibus diuiſoris obſervetur, 2 ab 8 tantum bis, & à reliquis 44 toties ſubducam 9, & manebunt 26. Itaque ſeruans mente bis 29, id eſt 58, adnotabo 2 pro quoto, & per eum multiplicato diuiſore, recolligam quod iſta multiplicis ſubductionis æquatione comprehenderam, & reſtituam 58, quæ deleta diuiſore ſubſcribam diuidendo, & ab eo ſubducam, manebunt 26, quæ ſubducendo 58, & ſuprapoſito 84 deletis ſuperſcribentur. Inductio prima ſic erit.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 29) \cancel{8} \cancel{4} 1 (2 \\ \cancel{2} \cancel{8} \\ \phantom{\cancel{2}} \cancel{8} \end{array}$$

Secundo producam diuiſorem in reliquum diuidendi locum 261. Hic poſſum 2 ſubducere tredecies à ſuprapoſito diuidendo 26: Verum ab uno reliquo non poſſum

possum subducere 9 toties. Nec omnino fieri potest, ut nota divisoris ulla plusquam novies hac inductionis via subducatur: quia major numerus quam 9, unica nota comprehendere non potest. Cum vero 2 à 26 novies subduxero, à reliquis 81 potero subducere 9 toties. Depositis igitur in animo 261 adnotabo 9 pro quo, & per eum multiplicato divisore, repetam 261, quæ deleta divisore superscribam dividendo, ab eoque subducam deletis, infra supraque, numeris tum subductis, tum, unde facta subductio est, nihil restabit. Tota inductio sic erit.

$$\begin{array}{r}
 26 \\
 29 \overline{) 848} \quad (29 \\
 \underline{26} \\
 88 \\
 \underline{26} \\
 26
 \end{array}$$

Si divisor primo dividendi loco sit major, promoveatur in secundum locum: ut si dividam 252 per 42, non possum tollere 42 à 25: promovebo igitur divisorem in secundum locum, & reperiam 6 quotum. Si contingat aliquo post primum loco divisorem majorem esse dividendo, circulus in quo adnotetur. Sic divisus 608912 per 304 quotus est 2003. Quod si in relictis in medio spatio vacuus locus offendatur, circulus videlicet ascribendus erit, quod accidet, si dividantur 364 in 26, ubi quotus erit 14. Jam dividatur quamlibet magnus numerus, ars exposita sufficiet: ut si dividam illum antefactum numerum 97407406521 per alterum factorem 789, alter factor quotus erit 123456789. Hoc exemplum & similia majorum notarum mathematicam & Platonis μεταγραφῆς, & Aristotelis ἀπαρίσσειν imprimis declarabunt. Pes bonus, oculus bonus ait tyronibus lanista: mens bona, memoria bona, manus bona dicat hic arithmeticus discipulo: Varietas enim tam multiplicis in una numeratione numerationis erectam mentem & constantem memoriam, fidelemque manum maxime omnium requirit. Ac jam nemo sibi arithmetica discipulus videatur, nisi singulis arithmetici studii diebus divisionem vel quam maximam poterit, efficiat. Compendia sunt etiam quædam in dividendo. Si divisoris prima nota sit 1, reliquæ circuli detractis è dividendo ab ultima notis, quot circuli fuerint in divisore, peracta divisio erit: sic divisus 500 per 10 vel 100, quotus erit 50. 5.

CAP. VI. DE NUMERO PARI

& impari.

E divisione oritur numeri differentia, imparis & paris, primi & compositi. Impar est numerus à binario individuus, ut 3. 5. 7. Par est numerus dividiuus à 2. ut 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. Itaque in perpetua serie numerorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15, alii sunt pares, alii impares, quod erat Eratosthenis cribrum. Par est pariter par vel impariter par. Pariter par est par tantum dividiuus à pari per par: ut

b 2 4 tantum

4 tantum dividitur à 2 pari per 2 parem. ut 8 tantum dividitur à 2 pari per 4 parem: tales sunt omnes à binario duplicati: ut 4. 8. 16. 32. 64. Aelianus cap. 8. de re militari ait hunc numerum militiæ causâ excogitatum esse ad acies commodius permutandum. Itaque phalangis numerus à Tacticis exoptatur 16384. Par impariter par est, par diuiduus etiam ab impari per parem, ut 6 dividitur à 3 impari per 2 parem: sic 12 dividitur à 3 impari per 4 parem: sic 30 dividitur à 5 impari per 6 parem.

CAP. VII. DE NUMERO PRIMO & composito.

A Tque hæc numeri prima est differentia è divisione: secunda est primi & compositi. Numerus primus est numerus indiuiduus ab alio multitudinis numero: ut 1. 2. 3. 5. 7: dividitur aut unitas per unitatem solum, reliqui etiam per se: at per alium multitudinis numerum sunt indiuidui. Primus etiam dicitur incompositus, id est à nullo alio multitudinis numero factus. Numerus compositus est numerus diuiduus ab alio multitudinis numero, ut 4 à 2 per 2 diuiduus est, ut 12 à 3 per 4. Sic in Eratosthenis cribro 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. considerato primos esse 1. 2. 3. 5. 7. compositos 4. 8. 9. Numerus autem multis modis compositus, proptereaque etiam diuiduus sæpe singulares usus habet, ubi quærentur numeri, qui plurimas exactas divisiones capiant. Sic 96 Archimedes elegit in circuli dimensione, cuius quotæ partes duodecim sunt 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 16. 24. 32. 48. 96. Sic astrologi 60 partiendis caelestium rerum momentis assumpserunt, cuius divisores sunt item duodecim, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 10. 12. 15. 20. 30. 60. Itaque ad inveniendum quot numeris numerus sit diuiduus, theorema tale inventum est. Divisores omnes dati cuiuscunque numeri sunt ab unitate per se primi, dividentes quoties possunt, & datum & dati quotum, & quoti deinceps quotum quemlibet; deinde compositi à primorum ultimo per ultimum, & à sequenti per utrumque & ab utroque factum, denique à reliquis similiter per superiores omnes: ut, Esto 482, cuius oporteat omnes divisores invenire. Primo 1 nihil mutat, secundo 2 numerus primus dividet, & quotus erit 231, qui divisus per 3 deinceps primum divisorem dabit 77, qui etiã per 7. primum divisorem divisus habebit in quo 11. Hic habes 1. 2. 3. 7. 11 divisores dati primos, è quibus inter se multiplicatis efficitur. jam ad compositos divisores accedo, & multiplico penultimum 7, per ultimum 11, facio 77. Hic primus ordo sic est.

7. 11. 77.

Secundo multiplico hos tres numeros per 3, & facio hunc secundum ordinem.

3. 21. 33. 231.

Tertio multiplico primum & secundum ordinem per 2, facioque hunc tertium & quartum ordinem.

2. 14.

2. 14. 22. 154.
6. 42. 66. 462.

Divisores itaque dati numeri 462 sunt addita unitate numero sedecim, 1. 2. 3. 6. 7. 11. 14. 21. 22. 33. 42. 66. 77. 154. 231. 462. Hac via numeri civium 5040 à Platone quinto legum quæsit ad multiplices publicorum munerum functiones dividendum divisores omnes reperientur unde sexaginta, præter eum ipsum, ut Plato etiam illic admonet. Materies autem exercendi ingenii non mediocris hic erit. Exemplum primum divisores primos tantum semel accepit, hoc accipiet, quoties poterunt, primi sic erunt.

1	5	0	4
2	2	5	2
2	1	2	6
2		6	3
2		3	1
3		1	0
3			3
5			

Hic 2 assumitur quater, ⁷sapiusque assumeretur si posset assumi, ¹3 his assumitur, ^{5 item}7 semel. Atque hi primi sunt divisoires, qui inter se multiplicati restituunt datum: compositi sequuntur, qui & primos una recolligent hoc modo.

5-7	5	7	35
3	3	15	105
3	9	45	315
2	2	10	70
	6	30	210
	18	90	630
2	4	20	140
	12	60	420
	36	180	1260
2	8	40	280
	24	120	840
	72	360	2520
2	16	80	560
	48	240	1680
	144	720	5040

b 3 Hicha

Hic habes ^{sexaginta} undequinquaginta divisores præter unitatem: omnes igitur divisores in numero Platonico sunt 60 hoc modo. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 12. 14. 15. 16. 18. 20. 21. 24. 28. 30. 35. 36. 40. 42. 45. 48. 56. 60. 63. 70. 72. 80. 84. 90. 105. 112. 120. 126. 140. 144. 168. 180. 210. 240. 252. 280. 315. 336. 360. 420. 504. 560. 630. 720. 840. 1008. 1260. 1680. 2520. 5040.

CAP. VIII. DE NUMERIS PRIMIS INTER SE.

Primus & compositus numerus ita est, unde differētia oritur primorum inter se, & compositorum inter se: cujus singularis est utilitas, ut apparebit postea in reductionibus & variis inventionibus. Primi inter se sunt numeri communitè indivisibiles à multitudinis numero, ut 2 & 3: ut 5 & 6: ut 8 & 9. Primorum inter se arithmetica paulo plenior est, datorum cognitio est per subtractionem & divisionem. Si duo inæquales numeri perpetua subtractione minoris à maiore quoties poterit nullum multitudinis numerum antecedētis divisorem reliquerint, primi erūt inter se: sic 5 & 3 sunt primi inter se, quia subductis 3 à 5 manent 2, qui non dividit 3 antecedentem numerum, deinde subductis 2 à 3 manet 1, quæ dividit quidem 2 antecedentem, sed non est numerus multitudinis: sic 27 & 8 sunt primi inter se, quia si subducas 8 ter: subtractio enim etiam multiplex assumenda est, 3 reliquus non dividet 8 antecedētem: tum 3 bis subductis ab 8, reliquus 2 non dividit 3 antecedentem: denique subductis 2 à 3, reliqua erit unitas sola. Sic 29 & 21 assidua subtractio explorabit primos inter se: sic 96 & 67, & assidua subtractionis exempla sic erunt.

27	29	96
8	21	67
3	8	29
2	5	18
1	3	11
	2	7
	1	3
		1

Si primus ^{non} dividerit datū, erit ad eum primus, ut in 5 & 8, 5 primus nō dividit 8, & primus est ad eū. atq; ita subtractione & divisione primi inter se numeri cognoscuntur: sūt etiā additione & multiplicatione. Si duo numeri sint primi inter se, totus ex iis est primus ad utrumque, & contra: ut 17 ex 8 & 9 est primus ad 8 & 9, & contra cum 17 sit primus ad 8 & 9, ipsi sunt primi inter se. Hoc additionis est. Si duo numeri sint primi ad tertium, factus ab utroque erit primus ad eundem, ut 4 & 6 sunt primi ad 7, & 24 ab iis factus primus est ad 7. Hinc duo sequuntur. Primum, Si duo numeri primi sint inter se, factus ab altero per se primus erit ad reliquū: ut in 4 & 3: 16 factus à 4 per se multiplicato est primus ad 3. Secundum, Si binī numeri primi sint inter se facti, ab iis erunt primi inter se: ut in 8 & 9 primis sigillatim ad 7 & 5, nempe 8 ad 7 & 5. Item 9 ad 7 & 5: facti 72 & 35 ab 8 & 9, item à 7 & 5 sunt primi inter se. Ex his duobus tertium sequitur. Si duo numeri pri-

meri primi sunt inter se facti & a datis per se & a datis deinceps per factos, perpe-
tuo primi erunt inter se, ut hic.

2	4	8	16	32
3	9	27	81	243

Ex hac inventione postea deducetur eximia progressio continuè proportiona-
lium minimorum.

CAP. IX. DE NUMERIS COMPOSITIS INTER

se, eorumque communi divisore maximo.

Compositi inter se sunt numeri cōmuniter dividui a numero multitudinis:
ut 4 & 6 sunt compositi inter se, quia communiter dividui a 2 numero mul-
titudinis: sic 5 & 10, quia sunt cōmuniter dividui a 5 numero multitudinis: sic 7
& 7 sunt compositi inter se, quia sunt communiter dividui a 7 numero multitu-
dinis. Potest igitur compositorum inter se uterque esse compositus, potest alter
tantum, potest etiam neuter. In arithmetica compositorum inter se numerorū
duo spectantur, divisor communis maximus, & dividuus communis minimus.
Divisor communis maximus est primus in assidua subductione dividens ante-
cedentem, ut in 4 & 10: reliquus per assiduam subductionem 2 erit cōmunis di-
visor maximus, quia primus relinquitur antecedentē dividens. Hinc consecta-
rium deducitur. Numerus dividens numerū est maximus amborum cōmunis
divisor, ut in 3 & 3 maximus cōmunis divisor est 3. Nam 3 seipsum dividit, & di-
vidit reliquū 3: Sic in 3 & 6 maximus communis divisor est 3: quia seipsum pri-
mo, deinde 6 dividit, nec major numerus ternario potest dividere 3, proptea-
reaque & maximus est divisor in 3 & 6. Idem erit in majore exemplo.

5	6	7
3	4	8
2	1	9
1	2	9
	9	0
	3	9
	1	2
		3

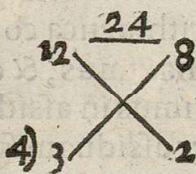
Eadem via quotlibet compositorū maximus cōmunis divisor invenietur. Nam
duorū precedentium inventus divisor pro ipsis erat dividuus: inventi itaque di-
visoris & proximi cōmunis divisor, ut antea requiretur: sic in 4. 6. 8. divisor com-
munis maximus erit 2: quia cōmunis in 4 & 6 est 2, primus nempe reliquus an-
tecedentem dividens: tum in 2 & 8 est idem 2: quia dividit 8 majorem: sic in 9.
15. 21. divisor communis maximus erit 3: sic in 12. 20. 28. erit 4: sic in 18. 24. 30.
erit 6. Divisor autem maximus ostendit in quoto divisorem minimum: sic in 12
divisor maximus 6 dabit in quoto 2, & compositos inter se dividens dabit in
quotis primos inter se, ut in 12 & 8 maximus divisor utriusque communis da-
bit in quotis 3 & 2 primos inter se.

C A P.

CAP. X. DE MINIMO COM

muni dividuo.

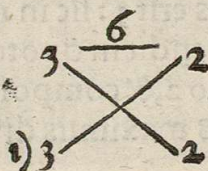
D Ati duo numeri per alios multiplicati varios numeros facere possunt, ideoque & factos communiter dividere: sed ex omnibus communiter dividuis minimus modo queritur, quod fundamentum postea futurum sit permagna utilitatis in contractionibus & proportionibus. Dividuus a duobus minimus est factus ab altero per alterius divisorem communi divisori maximo cognominem: ut dividuus a 12 & 8 minimus est 24: Nam maximus communis divisor in 12 & 8 est 4, a quo connotati divisores in 12 & 8, id est una quarta utriusque sunt 3 & 2. At factus a 12 per 2: vel ab 8 per 3 sunt 24, communis dividuus a 12 & 8: ab iis enim factus est, a minimis, quia factus ab altero per alterius divisorem maximo communi divisori cognominem. Exemplum ita est.



Sat vero fuerit unum divisorem cognominem invenisse: ut hic vel 3 tantum, vel 2 tantum, ut alterna multiplicatione quaesitum numerum reperias. Possunt vero dati efficere innumerabiles communiter ab utroque dividuos, ut 8 multiplicatus per 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. facit 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72: & 12 per 2. 3. 4. 5. 6. facit 24. 36. 48. 60. 72. e quibus sunt communes 24. 48. 72. ut hic vides.

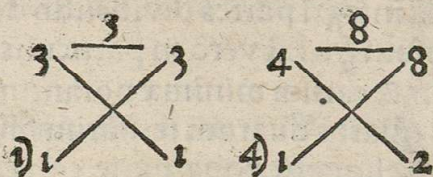
72	72
60	64
	56
48	48
36	40
	32
24	24
	16
12	2

Sed ex iis omnibus nullus erit minor quam 24. Duo consecutaria sunt ex illa generali inventione communis minimi dividui. Primum, factus a duobus inter se primis est minimus ab utroque dividuus, ut 6 factus a 3 & 2 est minimus dividuus ab utroque: exemplum integrum sic esset.



Secundum

Secundum confectarium est. Dividuus ab aliquo est minimus ab utroque dividuus: ut 3 est dividuus à 3, & communis est ab utroque dividuus minimus. Item 8 est dividuus à 4, & communis est dividuus ab utroque. Exemplum utrunque integrum sic esset.



Ergo hoc duplex compendium est è prima propositione inveniendi minimi dividui. Eadem via minimus à tribus aut quatuor, aut quotlibet dividuus invenietur. Quia repertus jam minimus dividuus conferendus est cum proximo. Nam factus ab altero per alterius divisorem, maximo communi divisori cognominè, est minimus ab his dividuus: sic minimus ab 8. 6. 4. dividuus est 24. Nam 24 est minimus dividuus ab 8 & 6: rursus idem minimus diviſus est à 24 & à 4: ut è secundo confectario patet. Sic à 3. 4. 8. minimus dividuus 24: quia minimus à 3 & 4 est 12, tum minimus dividuus à 12 & 8 est 24. Sic minimus dividuus ab 1. 2. 3. 4. 5. 6 est 60. Hinc sequitur minimus dividuus à nominibus datarum partium, est minimus qui habeat datas partes: ut minimus dividuus qui habeat unam secundam, unam tertiam, unam quartam est 12, nempe minimus dividuus à 2. 3. 4, quique minimus bifariam, trifariam, quadrifariam dividi possit.

CAP. XI. DE NOTATIONE

partium & particularum.

Numeratio dicta est: sed numeri, cuius partes notationem quandam suam & reductionem requirunt, antequam numerentur. Duæ verò notæ tantum sunt in alphabeto, notationis huius, linea interjecta separata, superior numerus vel numerator: inferior, nomē seu nominator appellatur. Sic divis 8 per 3 quotus est 2, & manent duæ tertiæ, quæ ita notantur $\frac{2}{3}$: & 2 est numerus partium, 3 est nomen: qua notatione utendum est, quoties minor numerus per maiorem dividendus proponitur: peracta enim divisio est interjecta linea. Si dividam ~~5~~ asses $\frac{12}{5}$ fabris: divisio sic erit: $\frac{5}{12}$, unde intelligitur singulorum partem quotam esse 5 uncias. Itaque si peracta numeri divisione aliquid è dividendo relinquatur, reliquus numerus interjecta linea superpositus diviſori, indicat partes unitatis, quales nempe in dividendo fuerint, tumque etiam reliqua divisio facta est: ut si diviserim 5 asses 2 bajulis, divisio sic erit $\frac{5}{2}$ ($2\frac{1}{2}$, unde intelligitur singulis 2 asses & dimidium assis unius cedere. Item si 11 asses diviserim tribus, divisio hæc $\frac{11}{3}$ ($3\frac{2}{3}$ indicabit singulorum quotam partem esse 3 asses, & duas tertias unius assis, id est 8 denarios, & similiter in cæteris: ubi in quoto, numerus integer indicabit partes numeri dividendi: partes autem indicabunt partes, non multitudinis,

titudinis, sed unitatis: hinc patet divisione legitimè peracta reliquū numerum semper esse minorem divisore seu nomine: nam si numerus esset æqualis nomini, ut $\frac{2}{2} \frac{3}{3} \frac{4}{4}$, esset unum integrum: si major, ut $\frac{2}{2} \frac{4}{3} \frac{5}{4}$, esset plus uno integro, divisorquē & hinc & illinc subduci potuisset. Quantum verò partium numerus deficit à nomine, tot unius integri partes dividendo desunt, ut semel ab eo divisor subducatur, ut in $\frac{4}{2}$ desunt $\frac{2}{2}$. Est verò in particulis & partibus partium sua quadam distincta notatio, & earum minimæ notantur, ut partes. Reliquæ nulla interjecta lineâ. Ergo tres quartæ duarum tertiarum unius secundæ ita notabuntur $\frac{2}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$: ut si pater filios 2 reliquerit æqua parte cohæredes, tūc filius alter filios 3 æqua item parte patrimonij, sed primus coemerit alterius fratris partem, decesseritquē quatuor filijs superstitibus, æqualiter item partitis, eorumquē primus coemerit partes secundæ & tertij, hic nepos haberet ex avita hæreditate $\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$.

CAP. XII. DE REDVCTIONE
terminorum.

Notatio ejusmodi est, sequitur reductio terminorum vel integrorum partiumque. Reductio terminorum fit ad minimos proportionales terminos, & est divisio terminorum inter se compositorum per maximum communem divisorem: sic $\frac{8}{12}$ per 4 communem maximum divisorem redeunt ad $\frac{2}{3}$, sic $\frac{5}{15}$ per 5 maximum communem divisorem redeunt ad $\frac{1}{3}$. Hæc reductio est imprimis necessaria, si termini partium sint compositi inter se: ut antequam numerentur partes, termini reducantur ad primos inter se: primi enim sunt minimi, & minimi sunt primi. Et quanto facilius est parvos quàm magnos numeros numerare, tanto majorem commoditatem numeranti reductio hæc afferet. Itaque tãquam solœcismus in arithmetica fuerit proponere partes in terminis inter se compositis, aut non protinus reducere, ut $\frac{6}{12}, \frac{14}{21}$ pro $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. Eadem reductio etiam per numerationis species est specialis in terminis binarum partium. In additione & subtractione minimus à nominibus dividuus est assumendus pro communi nomine & numeri multiplicandi, alterne per partes cognomines, ut hic

$$\begin{array}{cc} \frac{6}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ 1 & 3 \end{array} \quad \text{ubi pro } \frac{2}{3} \text{ \& } \frac{4}{9} \text{ habes } \frac{6}{9} \text{ \& } \frac{4}{9}.$$

In multiplicatione numerus & nomen alternis reducuntur: ut in $\frac{2}{3} \frac{5}{6}$ reduces 2 & 6 ad 1 & 3, & multiplicabis $\frac{1}{3} \frac{5}{3}$ & facies $\frac{5}{9}$: quia idem est multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{6}$, & $\frac{2}{6}$ per $\frac{5}{3}$. Itaq; tanquam $\frac{2}{6}$ rediges ad $\frac{1}{3}$, & pro $\frac{5}{6}$ facies $\frac{5}{3}$. Hic si numerus nominis alterno sit æqualis, reliquus numerus reliquo nomini superpositus multiplicationem absolvit, ut in $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ omisis 3 & 3, habes $\frac{2}{4}$, id est $\frac{1}{2}$. Quin si longa hic series fuerit, æqualibus omnibus omisis, reliquus numerus cum reliquo nomine

mine multiplicationem absolvet, ut hic $\frac{8}{9}, \frac{7}{8}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ est $\frac{1}{9}$. In divisione numeri inter se, vel nomina inter se, vel utraque separatim reducuntur: ut si $\frac{4}{5}$ dividatur per $\frac{2}{3}$, pro 2 & 4, sumes 1 & 2, & quota pars erit $\frac{6}{5}$ vel $1\frac{1}{5}$. Item si dividas $\frac{5}{6}$ per $\frac{4}{9}$, sumes 2 & 3 pro 9 & 6, & facies $\frac{15}{8}$, vel $1\frac{7}{8}$: item si dividas $\frac{8}{17}$ per $\frac{4}{9}$, sumes 1 & 2 pro 4 & 8: & pro 9 & 27, 1 & 3, & quota pars erit $\frac{2}{3}$. Quapropter reductio terminorum ejusmodi est.

CAP. XIII. DE REDUCTIONE INTEGRORUM & PARTIUM.

Reductio integrorum & partium deinceps est. Reductio integrorum est multiplicatio integrorum per nomen partium: sic reducere 12 asses ad uncias est multiplicare 12 per 12, quia uncia est $\frac{1}{12}$ assis, & fiunt 144 unciae, vel $\frac{144}{12}$. Reductio partium est ad integra, vel ad partes. Reductio partium ad integra, est partium divisio per suum nomen: ut reducere $\frac{144}{12}$ ad integra est dividere 144 per 12, & quotus 12 ostendit integros asses 12. Reductio partium ad partes, est ad binas partes proportionales ejusdem nominis, vel ad unas aequales. Reductio partium ad binas partes, proportionales ejusdem nominis est multiplicatio terminorum per alternum nomen: sic $\frac{2}{3} \frac{3}{4}$ redeunt ad $\frac{8}{12} \frac{9}{12}$: multiplicando tunc 2 & 3 terminos $\frac{2}{3}$ per 4, tum 3 & 4 terminos $\frac{3}{4}$ per 3, proportionales autem sunt $\frac{8}{12}$ datis $\frac{2}{3}$. Nam si numerus multiplicet numeros, facti sunt proportionales multiplicatis, & sic 8 ad 2 & 12 ad 3 sunt proportionales, quia aequo majores: facti nempe per eundem. Minora enim sunt similia & proportionalia aequo majoribus, per logicum similitudinis axioma: sic $\frac{2}{12}$, item proportionales datis $\frac{3}{4}$. Aequalia vero nomina fiunt, quia 3 & 4 inter se multiplicantur, ideoque idem faciunt. Nomina reductione eadem facta ad divisionem nihil attinent. Nam cum reduceris $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ ad $\frac{8}{12}$, dicere $\frac{8}{12}$ toties in $\frac{9}{12}$ contineri, nihilo plus est, quam dicere 8 toties a 9 contineri. Itaque nominum inter se multiplicatio in divisione omittitur: ac si series reducendarum partium longior fuerit, binæ reducendæ sunt, ut in $\frac{2}{3} \frac{3}{4} \frac{4}{5}$ prima reductione, atque hinc additione facta, habebis $\frac{17}{12}$: quæ cum $\frac{4}{5}$ reductæ sunt $\frac{68}{60}$, $\frac{48}{60}$. Eadem via reductionis, cognoscetur è binis partibus inæqualibus utræ sint majores, ut $\frac{5}{6}$ sunt majores quam $\frac{3}{4}$, quia facta reductione, habebis $\frac{20}{24}$ pro $\frac{5}{6}$: at habebis tantum $\frac{18}{24}$ pro $\frac{3}{4}$. Superest reductio partium ad unas partes aequales, quæ particularum variarum reductio est, & fit multiplicatione numerorum inter se, & nominum inter se. Sic $\frac{3}{4} \frac{2}{3}$ redeunt ad $\frac{6}{12}$, id est $\frac{1}{2}$. Si series longior fuerit, binæ sunt expediendæ, ut in $\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$, primò facies $\frac{6}{12}$, id est $\frac{1}{2}$. Deinde ex $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ facies $\frac{1}{4}$. Idem autem fuerit dicere $\frac{2}{3} \frac{3}{4} \frac{1}{2}$, vel $\frac{12}{24} \frac{3}{4}$, vel $\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$, quia iidem numeri inter se multiplicati creant eosdem. Per hanc particularum reductionem cognoscis quid sint particula, cum vides quales sint partes totius. Eodem compendio partes integrorum cognoscantur, ut $\frac{2}{7}$ triginta quinque aureorum sunt $\frac{20}{7}$, id est 10 aurei, tanquam quareretur $\frac{2}{7} 35$.

CAP. XIII. DE NVMERATIO-

ne partium.

A Tqui partium notatio & reductio ejusmodi est, unde expeditur numeratio primarum & cognominum, & quidem partium tantum, aut partium cum integris permistarum. Partium tantum facilis est, spectat enim tantum numeros, excepta multiplicatione, quæ tum numeros, tum nomina vel diversa multiplicat: sic $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ sunt $\frac{5}{7}$: sic subductis $\frac{2}{7}$ à $\frac{5}{7}$, restant $\frac{3}{7}$: sic $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{7}$, faciunt $\frac{6}{49}$. Item $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{4}$ faciunt $\frac{6}{20}$, id est $\frac{3}{10}$. Sic per $\frac{2}{7}$ dividantur $\frac{10}{7}$, quotus erit 5, significans dividentes partes in dividendis quinquies contineri: si nomina diversa sint, vulgus etiam putat, perinde divisionem fieri, ut si per $\frac{2}{3}$ dividantur $\frac{3}{4}$, numeros alternis nominibus multiplicant, faciunt $\frac{2}{8}$, at hic non est divisio, sed reductio ad partes proportionales cognomines, tanquam è $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, fecisses $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$, & jam neglectis nominibus (quia numeri tantum hic spectantur) proponeres per 8 dividenda 9: tum enim per 8 divideres 9, & quotus esset $1\frac{1}{8}$. Atque hic factus est minor multiplicando, & quotus major dividendo, quod utrunque ex analogia est multiplicationis & divisionis: Unitas enim major est multiplicante, multiplicandus igitur erit major facto: Sic inversè alternando, unitas est major divisore, ergo quotus est major dividendo: in divisione tamen quotus (ut dixi) non significat integra, sed quoties divisor contineatur in dividendo. Superest numeratio partium cum integris paulo operosior: Additio nihil mutat, $2\frac{2}{3}$ sunt $2\frac{2}{3}$ & $4\frac{2}{3}$ sunt $7\frac{1}{3}$. Sic numeratio libellarum, assium, denariorum, & ejusmodi efficitur: ut si proponantur addendæ libellæ 38, asses 178, denarii 147 cū libellis 23, assibus 289, denariis 268. Primò colligam denarios 415, id est $4\frac{1}{2}$. Itaque diviso numero per nomen, habebō asses 34 & 7 denarios, notabo denarios 7, & servabo asses 34 proximo loco: Deinde additis assibus 34 ad 178, & 289, totus erit 501 asses, id est $5\frac{1}{2}$. Nam 20 asses faciunt unam libellam: diviso itaque numero per nomen, habebō 25 libellas, & 1 assē: notabo 1 assē, & servabo 25 libellas, quibus additis ad 38 & 23, habebō libellas 86. Summa denique additionis hoc modo:

38 l	178 a	147 d
23	289	268
86	1	7

Subductio ex integris capit unum pro tot partibus, quantum est nomen: ut si à 2 subducerem $\frac{2}{3}$, sumerem 1 à 2, pro $\frac{2}{3}$, & à $\frac{2}{3}$ subducerem $\frac{2}{3}$, tum è 2 manebit $1\frac{1}{3}$: si à $2\frac{2}{3}$ tollam $2\frac{1}{3}$, reduco 2 ad tertias multiplicando per nomen 3, facio $\frac{6}{3}$, quibus additis cum $\frac{1}{3}$, habebō $\frac{7}{3}$, quibus subductis à $2\frac{2}{3}$ manent $\frac{2}{3}$: vel reducam $\frac{2}{3}$ ad unitates divisione numeri per nomen, habebō 3, unde tollam 2, manet 1, & ex 1 reducto ad tertias, id est, è $\frac{3}{3}$ tollam $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. Itaque à $2\frac{2}{3}$ si tollam $2\frac{1}{3}$ manet $\frac{1}{3}$. Si à $2\frac{1}{3}$ tollam $1\frac{2}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. Subductio permistarum ejusmodi: integrorum cum partibus sic fieri potest, ut antea est additio facta, sed partes si excedant

dant unum, commodius autem reducuntur ad suas unitates divisione: ut si subducendæ sint 38 libellæ, asses 178, denarij 147, è 86 libellis, 1 asse, 7 denarijs, reducam primò 147 denarios ad 12 asses & 3 denarios. Deinde additis 12 assibus ad 178, totus 190 reductus ad libellas, facit novem libellas & 10 asses: additis jam 9 libellis ad 38, totus est 47. Ita jam denique tollam 47 libellas, 10 asses, 3 denarios, restabunt 38 l. 11 ass. 4 d. Subductionis summa sic erit.

$$\begin{array}{r} 38 \quad 11 \quad 4 \\ 86 \overline{) 147} \\ 47 \quad 10 \quad 3 \end{array}$$

10 Multiplicatio integrorum per partes multiplicat subficiendo uno pro nomine: sic $\frac{3}{1}$ per $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{6}{3}$, id est 2: Integer verò cum partibus per integrum solū, vel cum partib. multiplicari potest, & separatim & coniunctim. Sic multiplico $7 \frac{1}{3}$ per $4 \frac{1}{3}$, prima multiplicatio 7 per 4 facit 28, secūda 7 per $\frac{1}{3}$ facit $\frac{7}{3}$, id est $2 \frac{1}{3}$, tertia $\frac{1}{3}$ per 4 facit $\frac{4}{3}$, id est $1 \frac{1}{3}$: quarta $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{3}$ facit $\frac{1}{9}$. Hæc omnia addita sunt $36 \frac{60}{109}$: idem facio si reducā datos numeros ad $\frac{26}{13}$ & $\frac{64}{13}$ & multiplicando faciam $6 \frac{144}{169}$, & divisione eruam $36 \frac{60}{169}$. Divisio etiam potest aliquādo separatim fieri: ut si per $2 \frac{2}{3}$ dividantur $5 \frac{1}{3}$. Primò subducam 2 à quinque bis, & manebit 1, id est $\frac{3}{3}$, quibus ad $\frac{1}{3}$ additis, habebō $\frac{4}{3}$, unde possum etiam bis subducere $\frac{2}{3}$. Itaque quotus totus erit 2: at id in divisione maioris numeri difficilius esset, cum non facile videam, utrum divisor toties in partibus contineatur, quoties in integris: ut si per $7 \frac{1}{3}$ dividam $36 \frac{60}{169}$; cum videro 7 quinques subduci posse è 36, non video ex 1 reliquo & $\frac{60}{169}$ utrum toties subduci possit: at per reductionem facilius est.

PRAMI ARITHMETICAE

LIBER SECVNDVS.

CAP. I. DE RATIONVM NOTATIONE

et numeratione.



30 Arithmetica simplex adhuc fuit, comparatiua sequitur: quæ interpretatur comparisonem numerorum in quantitate & qualitate. Comparatio æqualitatis est una & individua: ut 1 ad 1, 2 ad 2, 3 ad 3. Comparatio inæqualium numerorum est differentia vel ratio. Differentia est comparatio quantum terminus differt à termino: ideoque subductione cognoscitur: sic differentia 2 ad 3, & 3 ad 5, & 5 ad 8 est 1. 2. 3. quia cum subduxeris 2 à 3, 3 à 5, 5 ab 8 relinquitur 1. 2. 3. Ratio est comparatio, quoties terminus in termino continetur: ideoque divisione cognoscitur, datæque ratione termini cognoscuntur contraria multiplicati-
tione.

tione: sic ratio 3 ad 2 est sesquialtera, quia 3 continet 2 semel & dimidiū: sic ratio
 5 ad 3 est ratio superbiteria, quia 5 continet 3 semel & duas tertias: sic ratio 6 ad
 3, est ratio dupla, quia 6 continet 3 bis: quoti igitur illi rationum indices sunt
 $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, jam multiplica 1 per 2 nomē, & adde 3, erit antecedens sesquialterius
 rationis nomen ipsum 2 consequens: sic multiplica 1 per 3 & facto 3 adde 2: 5 erit
 antecedens, 3 consequens: 2 autem duplum significanti subijce 1 termini du-
 plæ rationis erunt 2. i. Rationum arithmetica quædam est in notatione & nume-
 ratione, cum numeranda sunt rationes, antecedens supernē, consequens infer-
 nē notatur. Numeratio autem ista longē dissimilis est simplicis numerationis.
 In eodem enim opere additio & multiplicatio est, subductio & divisio: ut in Eu-
 clide, Archimede, Ptolemæo, mathematicisq; antiquis perspicies. Additio ratio-
num est multiplicatio terminorum inter se similium, id est, antecedentium inter
 se, & consequentium inter se, & compositio rationum dicitur, sic ratio $\frac{1}{2}$ addita
 rationi $\frac{1}{2}$ est ratio $\frac{1}{2}$, quia ratio æqualitatis nil augeat, sic ratio $\frac{1}{2}$ addita rationi $\frac{1}{3}$,
 est ratio $\frac{1}{6}$. Sic ratio $\frac{1}{2}$ addita rationi $\frac{1}{3}$ est ratio $\frac{1}{6}$: sic duplicari, triplicari ratio
 dicitur, quando rationis bis ac ter positæ termini multiplicantur: sic duplicatur
 & triplicatur ratio $\frac{1}{2}$, quando termini ita multiplicantur $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$). Ergo ad-
 ditio rationum est multiplicatio terminorum. Itaque si termini rationum sunt
 quomodocunque continui, ratio extremorum componetur ex omnibus inter-
 medijs rationibus: ut in 1. 2. 3. 4. 5. 6. ratio 1 ad 6 componitur ex omnibus inter-
 medijs rationib. ut hinc vides $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ ($\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$). Nam ratio 120 ad 720 est ratio 1 ad 6,
 ut patet reductione. Hæc ex Euclide arithmetica est. Subductio rationū est divi-
 sio terminorum, ut tollatur ratio $\frac{1}{2}$ à ratione $\frac{1}{2}$ relinquetur ratio $\frac{1}{2}$: Hæc utraque
 numeratio apud Ptolemæum in musica & astrologia additio & subductio no-
 minatim appellatur. Quare summorum mathematicorum usus notabilis est,
 ne quis error ex ambiguitate oriatur.

CAP. II. DE GENERIBVS rationis.

Ratio inæqualitatis est maioris vel minoris. Ratio inæqualitatis maioris no-
 minatur à maiore termino, sed minoris præponendo sub: ut ratio 2 ad 1, di-
 citur dupla, 1 ad 2 subdupla. Ratio est prima aut conjuncta. Prima quæ unicam
 speciem rationis habet, eaque simplex est aut multiplex. Simplex cum major ter-
 minus continet tantum semel minorem, & aliquid præterea, ut ratio superparti-
 cularis & superpartiens. Superparticularis ratio est, quando terminus terminū
 semel tantum continet, & præterea unam partem: si secundam, tertiam, quartā,
 dicitur sesquialtera, sesquitertia, & sic deinceps, ut hinc:

3	4	5
2	3	4

Partes verò reliquæ in doctrina rationum demonstrant non partes unitatis
 in di-

in diviso, ut in doctrina partium, sed partes minoris termini, ut in ratione 3 ad 2, quotus $1\frac{1}{2}$ demonstrat 2 contineri semel in 3, & præterea unam secundam ejusdem 2. Ratio superpartiens est, quando terminus terminum continet semel, & præterea aliquot partes, si duas tertias, tres quartas: quatuor quintas dicitur superbitertia, supertri quarta, superquadri quinta: ut,

$$\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Ratio multiplex est, quando terminus terminum continet sæpius exacte, si bis, ter, quater, ratio dicitur dupla, tripla, quadrupla: ut,

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Ratio conjuncta est, quæ multas rationis species continet, ut ratio multiplex, superparticularis, & ratio multiplex superpartiens. Ratio multiplex superparticularis est, quando terminus terminum sæpius continet, & præterea partem unam, ut dupla sesquialtera, tripla sesquitertia, quadrupla sesquiquarta: ut hinc vides,

$$\begin{array}{ccc} 5 & 10 & 17 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Ratio multiplex superpartiens est, quando terminus terminum continet sæpius & præterea plures partes, ut dupla superbitertia, tripla supertri quarta, quadrupla superquadri quinta: ut hinc vides,

$$\begin{array}{ccc} 8 & 15 & 24 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Sic igitur species rationis subtiliter explicata sunt, & generatim comprehensa duabus regulis, altera divisionis ad speciem, altera multiplicationis ad terminos rationis inveniendum: ac etiam multo brevius solis terminis, arithmetica hæc tota de generibus rationum expediri & exerceri potest, ut à magnis quoque mathematicis exercetur: longitudo habitabilis terræ, major latitudine, quam 5 ad 3, inquit Aristoteles 5. cap. 2. Meteor. Ratio circuli ad diametri quadratum est, ut 11 ad 14, inquit Archimedes de dimensione circuli, pro ratione superbitertia, item pro ratione supertri undecima: Itaque soli propositi termini nomen speciei referent, & quidem in proportionibus, id est in ipso rationum usu,

ubi rationum species nusquam appellatur: nomina tamen illa specialia

interdum à Mathematicis appellantur: itaque etiam tenenda,

CAP. III. DE PROPORTIONE

Arithmetica.

S Equitur cōparatio in qualitate numerorū, quā proportio dicitur, eāq; arithmetica aut geometrica. Proportio arithmetica est æqualitas differentiarum: ut in 12. 10. 8. 6: utrobique enim est 2 pro differentia etiam inversē & alternē: ut enim 6 ad 8, sic 12 ad 10: una enim differentia 2 est. Item ut 12 ad 8, sic 10 ad 6. Differentia enim utrobique est 4. Proportionis arithmetice proprietates duæ sunt, in disjunctis primò. Medius simuluterque est æqualis simulutriusque extremo, & factus à medijs superat factum ab extremis factò à differentia maximi supra medium per ejusdem medij differentiam supra minimum, ut in 12. 10. 8. 6: 10 & 8 sunt 18, item 12 & 6 sunt 18: ut factus à medijs est 80, qui superat 72 factum ab extremis 8 factò à 4 differentia primi 12 supra medium 8 per 2 differentiam ejusdem medij 8 à minimo 6. Prima proprietas suppeditat inventionem mediorū, inter duos datos. Nam simulutriusque dati duæ qualescunque partes, sunt medij arithmetice proportionales inter datos: ut inter 2 & 10: hinc uides,

	12	
2.	I	II
	2	10
	3	9
	4	8
	5	7
	6	6

Secunda proprietas requirit numeros extremos & medios quantitate, non solum ordine, ut in 12. 8. 16. 12. 128 factus à medijs non superat 144 factum ab extremis. Ex his duabus proprietatibus disjunctæ proportionis arithmetice duæ aliæ deriuntur in continua. Medius est dimidijs extremi simulutriusque, & factus à medijs superat factum ab extremis, factum à differentijs: ut in 3. 5. 7. Nam 3 & 7 sunt decem, quorum dimidijs est 5: item 25 factus à 5 in se multiplicato superat 21 à 3 & 7, factum 4 factò à 2 & 2 differentijs, 2 à 5 & 5 à 7. E' prima proprietate oritur inventio medij sumpto duorū datorum dimidio. Proportio nis arithmetice continuæ termini quantumlibet continuari possunt, & progressio arithmetica vulgò dicitur, & in ea inventio duplex est: prima optati est termini hoc modo. Si tollatur unitas à nomine termini optati, factusque à reliquo per differentiam addatur primo termino, totus erit optatus: ut in progressionē quaternaria ab unitate, si quærat decimus terminus, hic decimus nomen est termini, tolles 1 à decem, & à reliquo 9, per 4 differentiam facies 36, quo ad 1 addito, totus erit 37, decimus terminus quaternariæ progressionis ab unitate sic, 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. Secunda inventio est summa, ut sequitur: factus à simulutroque extremo per dimidiatum nomen termini ultimi est summa, ut in proximi

proxima progressione adde 1 & 37, totus erit 38, qui per 5 dimidiatum nomen ultimi termini, facit 190 summam. Idem erit factus à nomine ultimi termini, 10 per 19 dimidium simul utriusque extremi. Si paciscatur cum domino servus annum sibi mercedem progressione arithmetica, primoque die teruncium unicum, secundo quatuor, tertio septem, & sic deinceps, quaritur anno vertente, quæ summa mercedis erit. Primum pro teruncio potes sumere uncias 3, & facere 3 primum terminum, quære ultimum: quoniam trecentessimus sexagesimus sextus est, reperies 1098. Iam simul uterque erit 1101, dimidiatum nomen ultimi termini est 183, ab ijs factus est 201483 uncia, id est libellæ vicenorum assium: 839 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{5}$, vel 10 assium, & teruncii unius.

CAP. IIII. DE PROPORTIONE GEOMETRICA,
dequæ ejus regula aurea.

Proportio arithmetica sic est, geometrica sequitur, in rationum æqualitate, & hic propriè proportio numerorum, & proportionales numeri dicuntur, ut 3.6.4.8. tum directè, ut 3 ad 6, sic 4 ad 8: tum inversè, ut 8 ad 4, sic 6 ad 3: & alternè, ut 3 ad 4, sic 6 ad 8. Proprietas hinc item duplex est, ut in arithmetica portione, primo in disjunctis terminis: ut, maximus & minimus reliquis sunt majores, & factus à medijs æquatur facto ab extremis, ut in eodem exemplo 3 & 8, id est 11, majores sunt 6 & 4, id est 10: item 24 factus à 6 & 4, medijs æquatur 24 factus à 3 & 8 extremis: prima tamen proprietas non convertitur ut secunda: nec enim verum est, si quatuor numerorum maximus & minimus reliquis sunt majores, ideoque proportionales esse, quod in secunda proprietate perpetuum est. Si quatuor numeri sunt proportionales, factus à medijs, æquat factum ab extremis: & contra si æquat, sunt proportionales. Hæc proprietas propter admirabilem usum, vulgo regula aurea dicitur, & certè si quid auro pretiosius esset, eo quoque nomine digna esset. Hinc patet inventio mediorum datis extremis, & quarti tribus datis. Nam divisor facti ab extremis, & quotus sunt medij proportionales: ut datis 4 & 3 extremis, factum ab ijs 12, dividens 2 & quotus 6 sunt medij: item si è tribus datis primus dividat factum à reliquis, quotus erit quartus proportionalis: ut è datis 4.2.6. primus 4 dividat, & factum à 2 & 6: quotus 3 erit quartus proportionalis. Quartus autem proportionalis ab exercitatis in arithmetica, sine aurea regula, frequenter expedietur ex sola proportionis definitione, præsertim in superparticularibus & multiplicibus: ut si quaratur, ut 8 ad 12, sic 10 ad quem: vel, ut 2 ad 4, sic 3 ad quem: Illic videbunt secundum primi sesquialterum esse, hinc duplum: ideoque quartum tertio perinde rationalem esse, id est 15: id est 6. Ita si quaratur cum imperij vectigal annuum est 12, tum Asia pendit 4: si præterea 15 imperetur, quota erit Asiæ portio? Respondebis, 5. nam ut 12 est triplus ad 4, sic 15 triplus ad 5. In superpartietibus & conjunctis rationibus id minus promptum fuerit. Sed tamen regulæ aureæ usus per sese immensus est per omnia rationum genera. Est enim analogismus proportionis in arithmetica, quod syllogismus argumentationis in logica. Proportio disc

tio disjuncta est terminis quatuor simplex, aut pluribus multiplex. In simplicis & directæ quæstionibus imprimis spectandus est ordo terminorum: ut nempe primus primo loco sit, ut ceteri suo, primusque sit homogeneous tertio, & secundus quarto: id enim sic alternè quæri solet, & proportio tractatur commodius: denique tertius sit qui facit quæstionem. Itaque si confusius (ut solet) quærat, redigantur in ordinem termini: ut si quærat quot horæ sunt in 6 diebus, cum in 3 sint 72. Hic quæstio est tertij termini, quæstionisque proportio sic expedietur: 3 dies sunt horæ 72: ergo 6 dies erunt horæ 144. Hic primus terminus & tertius sunt homogenei: sunt enim de diebus, secundus item & quartus: sunt enim de horis, & tertius facit quæstionem, quæ quarto proportionali invento solvitur. Interdum dantur tres termini, sed obscurius, ut si quærat $\frac{3}{4}$, quot sunt 12? Hic terminos tres habes 4. 3. 12. Itaque quarto proportionali invento respondebis $\frac{3}{4}$ esse $\frac{9}{12}$. Idem verò sit quærare, quot sunt 12 in $\frac{3}{4}$.

CAP. V. DE EXEMPLIS AUREAE REGULAE, SIMPLICI
cem integrorum numerationem ante requirentibus.

P Rincipem proportionem antecedit, alia quadam modò simplex numeratio, modò proportio. Exempla cujusque generis proponimus: ut aromatum pondo 1000 in Lusitania empta sunt nummis 10000, proque his vectigal pensatum nummis 1000: naulum Rhotomagum usque fuerit 300: ibi deinde vectigal 500: vectura Lutetiam usque 200: accesserit ministrorum impensa 2000: mercator lucrari vult in singulas libras 4, id est pro tota summa 4000. Additis impensis illis omnibus summa erit 18000. Iam dicito: 1000 pondo dant impensas 18000: ergo 1 dat 18; additionis hoc exemplum est. Centum libras emit mercator 10 aureis, vendidit 12, quantum lucri fuisset ex aureis 100? Primò videbis subducta sorte à lucro, lucrum 10 aureorum esse aureos 2. Tum igitur per regulam auream dicito: 10 dant 2, ergo 100 dabunt 20. Item si libra 3 aureis empta venderetur tantum 2, quanta esset jactura ex aureis 100? Hic cum videris per subtractionem sortis à jactura, jacturam in 3 esse 1: tum dices per auream regulam 3 perdunt 1: ergo 100 perdunt 33 $\frac{1}{3}$. Hæc exempla subtractionis sunt. Si confundantur res heterogeneæ reducendæ sunt prius ad idem genus: ut si quærat, Hebdomadæ tres horas habent 504, dies 4 quot horas habent? Hebdomadas 3 rediges multiplicatione 7 ad dies 21: tumque dices, 21 dies sunt horæ 504: ergo 4 sunt 96. Item emit mercator doliū vini aureis 8, lucrari vult 2, quantum pintam vendet? Hic rediges doliū ad 288 pintas: tot enim continet: item aureos 8 emptionis, & 2 lucri, id est 10, ut pretium utriusque conjungas, rediges ad denarios 6240, cum aureus sit assium 52. Tum dices per auream regulam, 288 pintæ valent denarios 6240: ergo 1 pinta valet 21 $\frac{192}{8}$, id est $\frac{2}{3}$: sed hic additio est & multiplicatio, ut in tribus exemplis proximis. Commuta 3 aureos in asses, semisses, quadrantes, æquali singulorum generum numero, quot asses, quot semisses, quot quadrantes dabis? Commuta 3 aureos in asses, id est in 37 habebis 156: deinde asses in minimam propositarum monetam, ut in quadrantes, habebis 624.

bis 624, quales assis valet 4, semissis 2, quadrans 1. Hi valores 4. 2. 1. additi sunt 7: unde proportio concludetur, 7 continet semel singula quaesita genera: ergo 624 continent octogies novies cum $\frac{1}{7}$, adde singula hac genera, summa assium redibit. Termini proportionis ita sunt 7. 1. 624. 897. **E**rgo 4 aureis aequali numero libras piperis, zingiberis, amygdalarum, saccari, quot e singulis generib. libras habebis: redige ut antea, aureos ad asses 208, tum vide quantum ex his assib. valeat libra singulorum generum: ut libra piperis 25, zingiberis 25, amygdalarum 5, saccari 12, pretijs his additis, totus est 67, jam proportionem concludere, 67 asses dant 1 libram singulorum generum: ergo 208 dant $3\frac{7}{67}$. Hac si multiplices pretijs singulorum generum inventum numerum restitues 208 asses. Paulo dissimile est proximum, in quo duo termini proportionis primi comprehenduntur proposita specie: ut ad quem numerum 12 est duplus superbi-partiens quintas: Hic pro duobus rationis terminis habes speciem, quae ita picta $2\frac{3}{5}$, multiplicatione quoti integri per nomen, & additione numeratoris restituet 13 pro antecedente, 5 autem pro consequente, & termini proportionis tres sic erunt: 13. 5. 12. jam regula aurea invenies pro quarto $4\frac{8}{13}$. Aliquando est multiplicatio & subductio: ut Cursores 2 Lutetia Romam contendunt, sed primus 20 millia passuum quotidie conficit, secundus 33, primus 6 diebus praecesserit, quando secundus assequetur: Hic intelligis quotidie secundo tantundem conficiendum esse, quantum primus conficiat, & praeterea 13. imprimis igitur collige per multiplicationem jam confectum iter, habebis 120 millia, tum sume 13 exuperantiam secundi, & dic: Secundus conficit 13 millia uno die supra primum, idem 120 millia, quot diebus supra eundem conficiet: proportio sic est, 13. 1. 120. $9\frac{2}{13}$. Divisio etiam antecedere potest, ut 1 dolium valet 4 coronatos, pinta 2592, quantum valebunt: reduces pintas 2592 ad 9 dolia dividendo, nempe 2592 per 288, quae 1 dolium faciunt, & tunc alterni termini erunt homogenei, regulaque aurea tum sicerit, 1 dolium valet 4 aureos: ergo 9 dolia valebunt 36 aureos.

CAP. VI. DE EXEMPLIS AUREAE REGULAE,
*simplicem fractionum numerationem ante
 requirentibus.*

Atque haec exempla integrorum numerorum fuerunt: sequentia sunt fractionum. Persolveris ariis alieni $\frac{1}{3}$, deinde $\frac{1}{4}$, & restent decem aurei, quantum erat totum as alienum: additae partes sunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur est $\frac{5}{12}$: unde quaestionis proportio concluditur: 5 valent 10 aureos, ergo 12 valent 24. Turris $\frac{1}{3}$ in terra latet, $\frac{1}{4}$ demergitur sub aqua, reliqua pars 60 cubitis supra aquam eminet, quot igitur cubiti in terra? quot in aqua? Partes additae sunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur $\frac{5}{12}$ valent 60, unde concludes:

5 valent 60: ergo

4 48
3 36

d 2

Talis

Talis est quaestio duplex Graecorum epigrammatum, primi de statua Pal-
ladis.

Pallas ego sum malleata, sed aurum
juvenum est, donum poetarum.
Dimidium quidem auri Charisius, octavam autem
Thespis, & decimam partem posuit Solon,
Sed vigesimam Themison, reliqua vero talenta.
Novem, & ars, donum Aristodici:

Quantum singuli contulerunt?

Adde partes, habebis $\frac{21}{40}$. Itaque reliqua 9 ad complendum totum, valent 9 pro-
posita. Hic accidit eundem esse numerum propositum, & reliquum, ut quartus
sit aequalis tertio. Summa itaque est 40. Charisius ergo contulit 20: Thespis 8:
Solon 4: Themison 2. In proximo epigrammate res alia est.

Augeam interrogavit magna virtus Alchide
Multitudinem armentorum quarens, ipse vero respondit:
Circa quidem Alphei fluvium, amice, dimidium quidem horum:
Pars autem octava collem Saturni circumpascuntur.
Duodecima autem secessit Taraxippi ad montem.
Circa vero Elidem divinam vigesima pascuntur.
Verum in Arcadia trigesimam reliqui.
Reliquos autem videto greges, sic quinquaginta.

Quanti igitur erunt greges singulis additae partes sunt $\frac{25}{120}$: Reliqua igitur 25
ad explendum totum valent 50: ergo 120 valent 240. Itaque $\frac{1}{8} \frac{1}{12} \frac{1}{20} \frac{1}{30}$ sunt 120:
30. 20. 12. 8: fractorum vero numerorum numeratio paulo operosior est in ter-
minis proportionis: ut, Unius moletrinae tres molae molunt 12 horis modios,
prima 18, secunda 13, tertia 8, quot horis univ ersae molent modios 24: & quan-
tum singulae: adde primum 18. 13. 8, habebis 39. prima quaestio sicerit: 39 modii
moluntur 12 horis: ergo 24 moluntur $\frac{26}{3}$, id est horis $7 \frac{2}{3}$. Hic antecedit unica
additio: at in tribus quaestionibus de tribus molis intercurrent partes, in qui-
bus vitandae molestioris numerationis gratia pro $7 \frac{2}{3}$, assumes $\frac{26}{3}$: singulae igitur
quaestiones sic erunt. Prima mola molit 12 horis 18 modios: ergo $\frac{26}{3}$ molent
11 $\frac{2}{3}$. In secunda & tertia dicito, 12 dant 13: ergo $\frac{26}{3}$ dabunt 8: item 12 dant 8: er-
go $\frac{26}{3}$ dabunt $4 \frac{2}{3}$.

CAP. VII. DE EXEMPLIS AVREAE REGVL AE, PRO- portionem antecedentem requirentibus.

Proportionis antecedentis principem proportionem sequentia deinde exem-
pla erunt, & primum de proportionem arithmetica antecedente. Putearius
quidam puteum brachiorum 34, redemit effodiendum libris 60 cum victu ge-
minarum operarum. Effossis autem brachijs 20, agrotare coepit, mercedemque
debitam rogavit, quanta igitur ea est? Hic victus nihil variat, sed arithmeticae
progressionis usus hic est ante proportionis geometricae conclusionem. Nam
secundum

secundum brachium, laborem primi ferè continet, & tertium utriusque, & sic deinceps arithmetica gradatione labor crescit: Itaque summa integræ progressionis 34, brachiorum est 595: & summa progressionis 20 brachiorum, est 210. Jam ad proportionē conclude: ut 595 ad 60: sic 210 ad 21 $\frac{105}{595}$, vel $\frac{3}{17}$. In sequentibus exemplis geometrica proportio antecedit cum numeratione simplici aliqua. **C**ursor Lutetia Lugdunum 5 diebus pervenit, cursor alius velocior Lugduno Lutetiā idem iter conficit, discedant hodie meridiano tempore, quando & ubi inter se occurrente Præpone proportionēs antecedentes, sic. Primus 5 diebus totū iter conficit: Ergo uno die cōficit $\frac{1}{5}$ itineris. Secundus 3 diebus conficit iter: ergo uno die conficit $\frac{1}{3}$ itineris. Hæ partes additæ sunt $\frac{8}{15}$ itineris, unde tota proportio concluditur, $\frac{8}{15}$ itineris conficiuntur 1 die: ergo $\frac{15}{8}$, id est 1 conficitur $\frac{15}{8}$ diei, id est 1 die, & sequentis $\frac{7}{8}$, hoc tempus est concursus, id est perendie nona matutina: Ubi proportio duplex & additio partium unica antecedit: in ejusmodi autem exemplis, ubi totum & integrum scriberetur, ut $\frac{15}{8}$, commodius erit assumere 1, quia $\frac{15}{8}$ reductæ nihil aliud sunt, quàm 1. Reliqua autem quæstio deinde facilior est. Primus 5 diebus conficit 1: ergo $\frac{15}{8}$ diei conficiet $\frac{15}{40}$ itineris, id est $\frac{3}{8}$. Secundus conficit 3 diebus 1. Ergo $\frac{15}{8}$ cōficit $\frac{15}{24}$, id est $\frac{5}{8}$. Locus igitur cōcursus erit ad $\frac{3}{8}$ itineris à primo cōfecti, & ad $\frac{5}{8}$ à secūdo cōfecti. **E** duob. architectis prim⁹ absolveret edificiū 20 dieb. cū secūdo absolveret 14: quot igitur diebus secundus solus absolveret: Dico primū 20 dies absolvūt 1, id est totū: ergo 14 absolvēt $\frac{14}{20}$, id est $\frac{7}{10}$. Itaq; secūdos absolvūt 14 diebus $\frac{7}{10}$, jam concludē, $\frac{7}{10}$ fiunt 14 diebus. Ergo 1 fit diebus 46 & $\frac{2}{3}$ diei, id est horis 16. **E** quatuor architectis ædificiū totum absolveret primus 1 anno, secundus 2, tertius 3, quartus 4: Si omnes simul adhibeantur, quanto tempore absolverent: Secundus 2 annis absolvit totum opus: ergo uno anno absolvēt $\frac{1}{2}$ operis, tertius $\frac{1}{3}$, quartus $\frac{1}{4}$: adde jam singulorum opus $1\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}$, habebis $\frac{25}{12}$: unde concludēs de architectis quatuor, $\frac{25}{12}$ fiunt 1 anno: ergo 1 fiet $\frac{12}{25}$ unius anni, id est 5 mēlibus, & $\frac{10}{25}$ unius mensis. Hic triplex proportio antecedit, & partium triplex additio. Talia sunt exempla duo sequentia. **L**eofontis quatuor fistulas habet, quarum prima implet secundum lacum 24 horis, secunda 36, tertia 48, quarta 6: si simul fluant, quot horis implebunt: facito proportionēs antecedentes, 24 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{24}$ lacus: 36 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{36}$ lacus: 48 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{48}$ lacus: 6 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{6}$ lacus. Adde jam partes impleti lacus 1 hora, habebis $\frac{37}{144}$, quales 144 totum faciūt. Dices igitur 37 partes lacus implentur 1 hora. Ergo 1 impletur $\frac{144}{37}$, id est 3 horis, & $\frac{3}{37}$ unius horæ. Hic antecedit proportio quadruplex & additio partium triplex. Proximum exemplum facilius etiam est.

Lacus fontis tres fistulas habet, quarum prima vacuat lacum $\frac{1}{4}$ horæ, secūda $\frac{1}{2}$, tertia hora 1, quanto tempore fluentes simul omnes vacuant lacum: Dices hic ut antea: $\frac{1}{4}$ horæ vacuat semel, ergo 1 hora vacuat quater: item $\frac{1}{2}$ vacuat bis, 1 hora semel: adde has vices, habes 7, & dico. Lacus vacuatur septies 1 hora:

d 3 ergo

ergo vacuatur semel $\frac{1}{7}$ horæ: termini ita sunt 7. I. I. $\frac{1}{7}$. Hic antecedit proportio triplex, sed simplex additio est, & integrorum. Duo exempla reliqua breviora & faciliora sunt.

E duobus architectis primus absolveret 30 diebus, secundus 40: tertio autem addito 15 diebus absolvunt, quot diebus tertius solus effecisset? Primus 30 diebus absolveret totum ædificium. Ergo 15 diebus absolveret $\frac{1}{2}$ ædificii, id est $\frac{1}{2}$. Secundus absolveret 40 diebus: ergo 15 diebus absolveret $\frac{15}{40}$, id est $\frac{3}{8}$: adde jam $\frac{1}{2}$ habebis $\frac{7}{8}$, quibus subductis ex $\frac{8}{8}$, restat $\frac{1}{8}$, quam tertius est effecturus illis 15 diebus, jam denique dicito, $\frac{1}{8}$ conficitur 15 diebus: ergo 1 efficitur 120 diebus. Hic antecedit proportio duplex & subductio partium una, ut in proximo. **F**ons duas fistulas habet, prima implet lacum horis 4, si sola fluat, secunda vacuat horis 11, si illa obstructa sit: si unâ fluant, quot horis implebitur lacus? Distinguito proportionē antecedentes & dicito: 4 horæ implent lacū, ergo 1 hora implet $\frac{1}{4}$ lacus: deinde 11 horæ vacuant lacum: ergo 1 hora vacuat $\frac{1}{11}$ lacus: jã ut sola impletio maneat, tolle $\frac{1}{11}$ ab $\frac{1}{4}$, restabunt $\frac{7}{44}$ lacus, quæ implentur 1 hora: unde quæstionis proportio concludetur: $\frac{7}{44}$ lacus implentur 1 hora: ergo $\frac{44}{7}$ implentur $\frac{44}{7}$ horæ, id est 6 horis, & $\frac{2}{7}$ unius horæ.

CAP. VIII. DE RECIPROCA- procatione.

Proportio simplex directa sic est: plerunque autem reciproce invertitur: Proportio reciproca est, quando est ut primus terminus primæ rationis ad primum terminum secundæ: sic secundus terminus secundæ est ad secundum primæ: ubi homogeneorum tantum ratio sumenda est, ut potentiarum inter se, temporum inter se, pretiorum inter se, mensurarum inter se: tumque de terminis reciproca proportionis tertius quaritur. Itaque factus ab extremis divisus per datum est mediis alterum dabit reliquum in quoto. Hac proportionē utendum est quoties auctis vel minutis momentis res contra minuuntur, vel augentur, pro ratione potentiæ, temporis, ponderis, pretii, mensuræ. Quod diligenter animadvertendum est, ne periculoso errore directa proportio pro reciproca concludatur: quod facilius est numeratis rebus animadverti potest, quam ex ipsa numerorum natura. Sed res exemplis intelligatur: ut si quæstio sit de aratione 10 jugerum, & dicatur, 15 boves arant 8 diebus: ergo 20 boves arabunt 6 diebus. Exemplum quæstionis & conclusionis sic erit, ut reciprocatio cernatur.

	$\frac{15}{8}$	$\frac{20}{6}$	
I.	15	20	I.
II.	8	6	II.

Eadem proportio inverso terminorum ordine concluditur sic, 6. 15. 8. 20: ubi de tribus datis terminis ultimo loco prolatus erit primus, primo loco propositus erit ultimus: quæsitus autem erit tandē proportionis inversæ ultimus. Atqui in hoc exemplo & similibus omnibus terminis idem sapius iteratus rejiciendus est, ut

est, ut hic 10. Atque sic termini in reciprocatione homogenei faciunt rationem, boves nempe primæ cum secundis faciunt primam rationem, secundī dies cum primis faciunt secundam. Hujus inversionis isorropicum illud est Aristoteli 10. cap. 8. Phys. Si potentia sit in quodam tempore tanta, major erit in minore *κατὰ τὸ ἀντιστρόφον τῆς ἀναλογίας*, secundum conversionem proportionis: item 1 cap. 1. de celo, Proportionem quam habent pondera, tempora *ἀναπαλιν*, id est, inverso modo habebunt: ut si dimidium pondus in tali, duplum in dimidio hujus. Hic analogiam *τὴν ἀναπαλιν* appellat, quam illic appellavit *τὴν ἀντιστρόφον τῆς ἀναλογίας*. Pondera motib. sunt reciproca: ait Jordanus 1 p. de ponderib. Isorropicū Aristotelis theorema imitatus, & sic Archimedes. Si pōdera sunt equipondia, sunt reciproca radijs: sic Campanus citat à Boetio, si nervus secetur in cithara, segmenta sonis esse reciproca. Verum esto Aristotelea proportio. Ponderus 20 librarum descendit horis 2: pondus igitur 40 librarum descendit 1 hora. Proportionis termini ita sunt.

20	40
2	1

ubi sicut antea facit reciprocas rationes ex homogeneis rebus, primam ē ponderibus 20, & 40: alteram ex 1 hora, & 2. Amphora vini una sufficit 3 dies 30 convivis, eadem 6 dies, quot convivis sufficiet. Terminī proportionis ita sunt.

3	6
30	15

Commeatus suppetit 7 menses, 3000 obsessis militibus: 12 menses quot obsessis suppetet. Terminī proportionis ita sunt.

7	12
3000	1750

Cū modius tritici vanit 5 aureis, tum panis est 4 unciarū: ergo cū vanit 3, panis erit unciarum $6\frac{2}{3}$: sic $\frac{5}{4} = \frac{6\frac{2}{3}}{3}$

Tres mercatores lucrati sunt tricenos aureos, primus per 6 menses ex aureis 60, secundus per 7, tertius per 5, ex quamam uterque sorte. Hic 30 communis est terminus. Itaque rejiciendus, & tantum considerandum, ad lucrum commune 6 menses occupant 60 aureos: ergo 7 minus occupabunt, & 5 menses plus occupabunt. Terminī sic erunt.

6.	7.	5.
60.	51 $\frac{3}{7}$.	72.

CAP.

CAP. IX. DE COMPOSITA PROPOR-
tione per additionem.

H Actenus proportio simplex fuit in quatuor terminis: sequitur multiplex, ubi termini plures quatuor usurpantur: idque compositione vel continuatione. Compositio terminorum est prima aut secunda: prima ut additio & alligatio. Additio est, cum termini data proportionis adduntur: estque triplex, prima est additio antecedentis cum consequente ad consequentem: ut 4 ad 3, sic 8 ad 6: ergo ut 7 ad 3: sic 14 ad 6. Secunda est additio complurium antecedentium ad unum consequentem, vel unius antecedentis ad plures consequentis: ut 2 ad 4, sic 3 ad 6: & 8 ad 4, sicut 12 ad 6: ergo 10 ad 4, sicut 15 ad 6: item ut 6 ad 2, sic 9 ad 3, & ut 6 ad 4, sic 9 ad 6: ergo ut 6 ad 2 & 4, sic 9 ad 3 & 6. Hæc utraque compositio frequentior est in demonstrationibus scholasticis, quam in populari usu. Prima ramen frequentior: secunda ad 31 p 6. adhibetur ad insignem imprimis demonstrationem, ut ab Archimede ad circuli dimensionem. Tertia est additio omnium antecedentium ad omnes consequentes, ubi dantur consequentes quidem additi, antecedentes autem separati, tumque antecedentes omnes adduntur, & separati ad omnes consequentes concluduntur. Itaque sola hic fit additio antecedentium ad primum proportionis terminum constituendum. Hæc compositio utilitates infinitas habet, & propter quotidianum usum, in consortio & societate hominum, vulgò regula societatis appellata est, sed verius æquitatis & politiæ regula diceretur: & certè velut dea quædã justitiæ & æquitatis suum cuiq; partitur, ac tribuit. Quapropter nobilitas tanta exemplis suis illustretur.

Duorum sociorum primus contulit aureos 8, secundus 6, unde lucrati sunt aureos 7, quantum singulis accedit: Quæstio additis antecedentibus ita solvetur.

	8	4
14 dant 7: ergo	6	3
	& contra fors concluditur:	
	4	8
7 dant 14: ergo	3	6

Hic & deinceps tertius terminus datur potestate, non actu, quod antea initio regulæ aureæ admonitum est. Tres mercatores contulerunt aureos, primus 90, secundus 60, tertius 50, lucrati sunt aureos 100, quantum singulis accedit: Adde antecedentes, ut antea, & conclude.

	90	45
200 dant 100: ergo	60	30
	50	25

Contrà 50

Contrâ singulares sortes ex additis consequentibus concludentur.

$$\begin{array}{r} 45 \\ 100 \text{ dant } 200 \text{:ergo } 30 \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ 60 \\ 50 \end{array}$$

Aurei 200 tribus ea conditione partiēdi, ut primus triplo plus habeat quā secundus, & secundus quadruplo quā tertius, quota pars erit singulorum? Hic ab extremo incipe. Si tertius habeat 1, secundus habebit 4, & primus 12, quibus additis concludere.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 141 \frac{5}{17} \end{array}$$

$$17 \text{ dant } 200 \text{:ergo } 4 \quad 47 \frac{1}{17}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11 \frac{13}{17} \end{array}$$

Hac exempla speciem quandam iustitię habuerunt, sequentia longē sunt insigniora, in quibus iudex in tribunali sine compositionis huius æquitate sit iniquus: Octo creditoribus debentur aurei, primo 100, secundo 86, tertio 75, quarto 60, quinto 54, sexto 32, septimo 24, octavo 15. Sed bona debitoris tantummodo valent aureos 150. Itaque omnibus omnino satisfieri non potest. Ac si totam summam primo summo jure persolveris: summam ceteris injuriam facies. Secundo enim 36 detrahes, nihil ceteris prorsus relinques. Ad compositionis igitur æquitatem recurretur, quantum singulis pro rata bonorum portione persolvendum sit, ex additis antecedentibus ita concludes:

$$\begin{array}{r} 100 \\ 33 \frac{141}{223} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 86 \\ 28 \frac{106}{223} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ 25 \frac{50}{223} \end{array}$$

$$446 \text{ dant } 150 \text{:ergo } 60 \quad 20 \frac{117}{223}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ 18 \frac{36}{223} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 10 \frac{170}{223} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \frac{16}{223} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 5 \frac{10}{223} \end{array}$$

e

Hæreditas

Hæreditas 3000 relicta 5 fratribus ea conditione, ut obveniat primo $\frac{1}{2}$, secundo $\frac{1}{3}$, tertio $\frac{1}{4}$, quarto $\frac{1}{5}$, quinto $\frac{1}{6}$. Id uti proponitur fieri nō potest, quia ē datis partibus prima aufert 1500, secunda 1000, tertia 750, quod jam plus est toto. Itaque cæteris nihil relinqueretur. Atque ex illo summo jure summa item fieret injuria. Recurratur igitur ad compositæ proportionis æquitatem, & numerus inveniatur minimus dividuus à datis partibus. Hic enim est usus talis numeri, quoties datæ partes totum superant, & inventi partes inventiantur datis illis cognomines, quæ æquabiliter 5 fratribus assen partiantur. Id verò per additionē partiū absq; minimo dividuo fieri potest, sed expeditior erit numeratio per integros numeros dividui minimi beneficio repositos. Minimus igitur dividuus à datis partibus est 60, cujus partes partibus illis datis cognomines, sunt 30. 20. 15. 12. 10. Has igitur partes adde, & dic per auream regulam.

$$30 \quad 1034 \frac{420}{87}$$

$$20 \quad 689 \frac{57}{87}$$

$$87 \text{ dant } 3000: \text{ergo } 15 \quad 517 \frac{21}{87}$$

$$12 \quad 413 \frac{69}{87}$$

$$10 \quad 344 \frac{72}{87}$$

Tres partiūtur 100, ea conditione, ut primus capiat $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, secundus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, tertius $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Id item sicuti proponitur fieri non potest, quia primus & secundus auferunt plus toto. Aequitas igitur additionis adhibeatur. Itaque sumes primo minimum dividuum 60, cujus divisores datis partibus cognomines, sunt 20 & 15 pro primo, 15 & 12 pro secundo, 12 & 10 pro tertio, quibus primum separatim additis sunt 35. 27. 22. Deinde simul sunt 84. Conclude igitur:

$$35 \quad 41 \frac{2}{3}$$

$$84 \text{ dant } 100: \text{ergo } 27 \quad 32 \frac{1}{7}$$

$$22 \quad 26 \frac{4}{11}$$

Consimile est exemplum consequens, sed paulo plenius, & luculentius. Quatuor sic partiūtur 600 aureos, ut primus habeat $\frac{2}{3}$ & 9 aureos, secundus $\frac{3}{5}$ & 8, tertius $\frac{4}{6}$ & 7, quartus $\frac{5}{7}$ & 6. Hic item partes duæ primæ superant totum, neque quidquam cæteris præterea relinquitur. Ad illud igitur proportionalis æquitis judicium refugiamus, & quinque in hoc exemplo superiorum dissimilia distinguamus. Primo à nominibus propositarum partium assumendus minimus divi-

dividuus est, ficerit 120. Secundo partes cognomines inveniendae. Tertiò inventae per suos numeros multiplicandae itaq; $\frac{2}{3}$ erunt 80: $\frac{3}{5}$ 72: $\frac{5}{6}$ 100: $\frac{7}{8}$ 105: quae additae erunt pro antecedentibus additis. Quarto à 600. summa dividenda tollantur integri numeri. 9. 8. 7. 6. id est 30, manebunt 570 pro additis consequentibus. Quintò denique inventis quartis proportionalibus, addes primo 9, secundo 8, tertio 7, quarto 6. Totum exemplum sic erit.

$$80 \quad 136 \frac{261}{357} \text{ vel } \frac{87}{119} \text{ per } 3$$

$$357 \text{ dant } 570: \text{Ergo } 72 \quad 122 \frac{342}{357} \text{ vel } \frac{114}{119} \text{ per } 3$$

$$100 \quad 166 \frac{237}{357} \text{ vel } \frac{79}{119} \text{ per } 3$$

$$105 \quad 173 \frac{231}{357} \text{ vel } \frac{11}{17} \text{ per } 21.$$

Triplici verò additionis compositioni triplex subductionis divisio potest opponi. Prima est subductio differentiae antecedentis à consequente: ut 7 ad 3, sic 14 ad 6: ergo ut 4 ad 3, sic 8 ad 6. Secunda est subductio similis ablati: ut 12 ad 2, sic 18 ad 3. ergo ut 8 ad 2, sic 12 ad 3: itemque ut 4 ad 2, sic 6 ad 3: utrobique enim tollitur subsesquialterum. Tertia est subductio differentiae antecedentis ab antecedente ad differentiam consequentis à consequente: ut 12 ad 9, sic 8 ad 6: ergo ut 12 ad 9, sic 4 ad 3. Postremæ divisionis hujus in scholasticis demonstrationibus usus est permagnus & his verbis. Si fuerit ut totus ad totum, sic ablati ad ablatum, erit ut totus ad totum, sic reliquus ad reliquum: usus tamen vulgaris non perinde hic patefactus est. *αναντιστοιχία* id est inversio additur, quæ est subductio antecedentis ad suam differentiam supra consequentem: ut 6 ad 4, sic 3 ad 2, ergo ut 6 ad 2, sic 3 ad 1. Hujus divisionis exēpla in demonstrationibus aliquando reperies.

CAP. X. DE ALLIGATIONE.

Alligatio est variorum generum permixtio, unde medium temperatur: ut in Agranis, liquoribus, metallis, pretiis, ponderibus, mensuris, omnibusq; rerum, quæ quidem misceri, temperarique possint, generibus: In rebus autem physicis mirabiliter excellit hæc species compositionis altera, ut superior excelluit in politicis. Per se vero alligatio nulla est proportio, sæpè tamē proportionē utitur, & quidē sæpè superiore proportionis additione. Alligatio est mediū quæsitū vel dati. Prima datis extremis quærit mediū divisione additorum per ipsorum numerum: ut si duo sint extrema per 2: si tria per 3: & sic deinceps: ut modius tritici 16 solidorum cum modio secalis 12 miscendus sit, addes 16 & 12, & totum 28 divides per 2, quotus 14 ostendet pretium tertii misti. Hic medium est Arithmeticum quoties extrema duo sunt. Si miscendus sit cum utroque modius hordei 10 solidorum tria pretia addita 38 dividantur per 3, quotus 12 $\frac{2}{3}$ ostēdit pretium quarti misti.

Secunda alligatio est æquatio dati mediū per inæqualium extremorum alternas ab

e 2 eo diffe

B. Salernacius in tractatu seu
Alligationis, Christiani Arith-
metica inserto, in cap. secun-
da Alligationis, primam
hunc Rami confutat.

eo differentias: æquatur autem medium datum nunc mensura, nunc pondere, nunc numero quæsitum generum: ut si è duobus vini generibus, quorum primi pinta valeat denarios 6, secundi 12, miscendum sit, cuius pinta valeat 10: alternæ differentiæ extremorum 6 & 12 à medio 10, erunt 2 & 4, quæ significabunt, si 2 pinta sumantur primi generis 4 assumendas secundi: itaque si pinta 6 miscenda sint, alligatio sine ulla proportionē perfecta erit, ut hīc vides:

6	2
10	
12	4

Alligationis hujus causa est ē communibus regulis multiplicationis. Nam si multiplices 10 per 6, facies 60: item si multiplices 10 per 2 & 4, segmenta senarii multiplicantis, facies 20 & 40 æquales ipsi 60: quia idem est multiplicare per 10, tum & per partes: tum si per eadem segmenta 2 & 4 multiplices totum 10 altero segmento, nunc imminutum, nunc auctum, id est per 6 & per 12 facies 12 & 48 eidem 60 æquales, ut hīc vides:

10	10	10	6	12
6	2	4	2	4
60	20	40	12	48

At 2 pinta primi vini per 6 pretium multiplicata faciunt denarios 12: & 4 pinta secundi vini per denarios 12 pretium multiplicata, faciunt 48. Tum 12 & 48 sunt denarii 60: item 2 pinta per 10, & 4 pinta per 10 faciunt denarios 20, & 40, id est 60. Itaque quod pinta simplices valebant, temperata pinta valent idem. Ideoque in hac temperatione differentia à medio alligantur extremis alternis: suis autem extremis alligata facerent plus vel minus, ut hīc vides:

8	10	14	12	10	6
2		4	2		4
16		56	24		24
	72		84		

Quare per alternas extremorum differentias alligatio facienda est. Neque medius alligationis terminus est proportionis, sicuti neque alligatio ipsa est ulla proportio, sed medius quantitate inter inæquales extremos: estque minor maiore extremo, maior minore. Nec alligatio ipsa (ut dixi) proportio est, cum sine ea fiat, nec cum proportionē utitur, necessario proportionis additionem adhibet, qualis est in permiscendis metallis quotidiana ratio, ut si aurifex habeat 100 pondo argenti, quorum quodlibet valeat 17: item alteram habeat infinitā mas-

fam, cuius pondo valeat 24: quantum argenti ē secunda massa addet primæ, ut pondo valeat 22, & quantum omnino futurum est: Alligatio alternarum differentiarum sic erit.

17	2
22	
24	5

Vnde concludes, 2 pondo primī argenti, 5 pondo secundī requirūt: ergo 100 requirunt 250, quibus adde 100 ē prima massa, habebis 350 pōdo misti argenti. Sed alligationis quæstio rara est, sine proportionis additione, ut in exemplo primo. Si unus sextarius temperandus esset ē duobus illis generibus, tum alligatione facta, diceretur non peti 6, sed 1. Itaque proportionis additio id explicaret hoc modo. 6 redeunt ad 1: ergo 2 redibunt ad $\frac{2}{6}$ id est $\frac{1}{3}$: 4 redibūt ad $\frac{4}{6}$, id est ad $\frac{2}{3}$, totaque quæstio sic erit.

6	2	2	$\frac{1}{3}$
10	6	1	2
12	4	4	2

Tale est Archimedeum problema illud apud Vitruvium lib. 9. ca. 3. de aurea regula Hieronis regis corona ad deprehendendum aurificis furtum. Sed in hoc exemplo Physica consideratio fuit, non tantum ponderis, sed densitatis & raritatis, ut tanto plus minusve loci occuparetur. Duas (inquit Vitruvius) massas ejusdem ponderis cum regia corona Archimedes fecit, alteram auream, argenteam alteram, quibus vicissim in vas aqua plenum demissis, ē differentia effusæ aquæ ad auream massam & argenteam, item ad regiam coronam, deprehendit argenti in aurea corona mistionem. Esto igitur inæqualis effusio aquæ ex aurea massa 20, ex argentea 36, ex ipsa regis corona 24. Sumptis differentiis vides auri triplum, argenti subtriplum in corona permistum esse. Et si corona 16 pondo esset, essent libræ auri 12, argenti 4, & hæc alligatio est sine proportionem. At si alterius ponderis ea fuerit, similem rationem proportionis additione concludes: ut si fuerit 100 pondo, quæstionis explicatio tota sic erit.

20	12	12	75
24	16	10	
36	4	4	25

Alligationis causa eadem fuerit, ubi termini non tantum tres, sed quotlibet proponuntur: Bini siquidem extremi ad unum medium perpetuo conferendi, & differentia ad unum extremum alligandæ & per additionem colligandæ. Alligatio autem complurium terminorum multis modis fieri potest, sed primus & promptissimus modus binos terminos semel alligare, si multitudo sit par minorum

norum parte una & majorum parte altera, secus alligandum erit idem pluribus: ut Monetarius habet genera quatuor argenti, primum est 3 denariorum, secundum 5, tertium 8, quartum 10, quærit quintum genus 6 denariorum. Exemplum totum sic erit.

3	4
5	2
6.	
8	1
10	3

His si decem pondo misti ac temperati ē quatuor generibus argenti quarantur, sumentur 4 primi: 2 secūdi: 1 tertii: 3 quarti: sin plura, proportio explicabit. In hoc igitur exemplo par est utrinque multitudo differentiarum: in proximo secus est, unus enim & idem ter alligatur: ut vini genera quatuor sunt, primiꝫ amphora valeat 7, secundi 9, tertii 10, quarti 12, & miscendæ sint amphoræ 300, quæ singulæ valent 11, dispositis terminis, differētiisꝫ alterne alligatis tota quæstio sic erit.

7. 1	1	30
9. 1		
10. 1	1	30
11.	10	300
12. 4. 2. 1.	1	30
	7	210

In proximo exemplo quia numerus extremorum par est utrinque singuli semel alligabuntur, mercator emerit 400 pondo aromatū sextuplicis generis libellis 200, & quærat quot pondo singulorū generum sit accepturus. Hæc quæstio dissimilis est superioris illius ad quintum caput de æquali numero singulorum generum. Hic enim quæritur quicunq; possit esse singulorum generum numerus, non quæritur æqualis: positis igitur singulorum generum pretiis, primi 6, secundi 7, tertii 9, quarti 11, quinti 12, sexti 16, medium pro arbitrio ubi voles assumetur. Sumatur in medio & sit 10. Alligatio hic erit alternis singulorum semel sic.

6	6	6	141 $\frac{3}{17}$
7	2	2	47 $\frac{1}{17}$
9	1	1	23 $\frac{9}{17}$
10	17	400	
11	1	1	23 $\frac{9}{17}$
12	3	3	70 $\frac{10}{17}$
16	4	4	92 $\frac{2}{17}$

Atqui

Atqui in hoc quæstionis genere si medius quætitatis terminus nullus sit, non est explicabilis per alligationem, quæstio hujuscemodi.

CAP. XL DE COMPOSITA PROPOR-
tione per multiplicationem solam.

Compositio terminorum prima ejusmodi fuit in additione, & contra deduc-
tio quædam in alligatione: secunda sequitur quæ fit terminis multiplica-
tis, cum pro binis simplicibus assumuntur duo ab ijs facti: sed multiplicatio in-
terdum sola est, interdum etiam additio, multiplicationis solius exempla pri-
ma sunt: ut aurei 3 mensibus 2 lucrantur aureos 6: aurei 4 mensibus 3 quot la-
crabuntur: Termini sic erunt.

$$\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 4 \\ \frac{2}{6} & 6 & \frac{3}{12} \quad 12 \end{array}$$

Facti autem nomen accipient ab utrolibet factore, ut hic dies vel aurei 6, lu-
cratur aureos 6, vel menses 6 lucrantur aureos 6. verum ubi accidet terminum
antecedentis æqualē esse termino consequentis, iis sublati, tres reliqui propor-
tionem eandem concludent, quia facti per eundē sunt, ut hic rejectis 3 & 3, con-
cludes nihilominus 2. 6. 4. 12. Item modius tritici 15 solidorum dat panem 8 un-
ciarum, 2 denariis. Ergo modius 20 solidorum dat panem 15 unciarum 5 de-
nariis. Exemplum sic est.

$$\begin{array}{ccc} 15 & 2 & 20 \\ \frac{8}{160} & 2 & \frac{15}{300} \end{array}$$

Vel sic sublati terminis æqualibus 8. 2. 20. 5. Sed pluribus exemplis res illu-
stretur, Pondo 100, milliararia 20 vehuntur 36 libellis, ergo pondo 50 millia 12
vehuntur l. 10 $\frac{4}{5}$, ulnæ panni lati $\frac{3}{4}$, vaneunt 6 libellis, ergo 40 ulnæ lati ulnam
1 $\frac{2}{5}$ vaneunt l. 35 $\frac{5}{9}$.

Aulæum longum ulnas 2 & $\frac{1}{2}$, latum 2 emitur 50 libellis, ergo tapetum ejus-
dem generis alterum longum ulnam 1, latum $\frac{2}{3}$ emetur l. 8. f. 6. d. 8. Boves 10 arāt
diebus 7 jugera 35. ergo boves 20 arabunt diebus 24 jugera 240. Huius gene-
ris cōpositione sæpe quæstio primæ alligationis explicatur: Sinto 10 modii tri-
tici assium sedenorum, secalis 18 duodenorum, facti à 10 & 16, item ab 18 & 12
sunt 160, 216, & ex iis additis totus erit 376, numeri rerum 10 & 18 sunt 28, tum
deniq; proportio concludet. 28 dant 376: ergo 1 dabit 13 $\frac{3}{7}$. Exemplum sic erit.

$$\begin{array}{ccc} 10 & 18 \\ \frac{16}{160} & \frac{12}{216} \\ 28. & 376. & 1 & 13 \frac{3}{7} \end{array}$$

Sunto.

Sunto eadem genera frumenti modii 54, tritici pretij 16, secalis 30, pretij 12, hordei 23, pretij 10, procedes ut antea. Exemplum sic erit.

54	16	864
30	12	360
23	10	230
107.	1454.	1. 13 $\frac{63}{107}$

Si partes generum miscendæ sint, erit eadem ratio, nisi quod pro iis sumitur ab iis minimus dividuus & partes datis cognomines.

Esto pondo caryophili 36 assium, cinnami 15, piperis 13, & velis miscere primi generis $\frac{1}{2}$, secundi $\frac{1}{3}$, terti $\frac{1}{4}$. Minimus dividuus ab iis partibus est 12, & partes cognomines sunt 6.4.3. totumque exemplum sic erit.

6	36	216
4	15	60
3	13	39
13	315	1. 24 $\frac{3}{13}$

Proportio hæc interdū invertitur multiplicatis inter se primo & quinto, item secundo & quarto ad factionem primi & terti: ut 2 messores demetunt 6 jugera 4 diebus: 8 messores 12 jugera quot diebus demetēt: reperies 2, exemplū sic erit.

2	4	8
6		12
24		48
4		2

Sic reciprocatio manifesta est ut primus: vel inversio sic.

2 24 4 48.

CAP. XII. DE PROPORTIONE COM- posita per multiplicationem & additionem.

Compositio multiplicationis simul & additionis, est quæ oblatos terminos primo multiplicat, tum ab illis factos addit, ut, Trium mercatorum primus contulit aureos 44 per 8 menses, secundus 32 per 6 menses, tertius 24 per 4 menses, unde lucrati sunt aureos 80, quantum singulis ex hoc lucro cedit: Multiplica sortem quamque cum suo tempore, primi compositus erit 352, secundi 192, terti 96, & singulis jam additis dicito.

640 dant

$$\begin{array}{r} 352 \quad 44 \\ 640 \text{ dant } 80. \text{ ergo } 192 \quad 24 \\ \hline 96 \quad 12 \end{array}$$

Legio habet pedites 6100, equites 726, & peditis stipendium est 4 aurei, equitis 9, praeda aureorum 200 his dividenda, quantum singulis dabitur: multiplica numeros personarum & stipendiorum, primus factus erit 24400, secundus 6534, tum facti addantur, erunt 30934, & dic:

$$\begin{array}{r} 30934 \text{ dant } 2000. \text{ ergo } 24400 \\ \hline 6534 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1577 \frac{17082}{30934} \text{ vel } \frac{8541}{15467} \\ 422 \frac{13852}{30934} \text{ vel } \frac{6926}{15467} \end{array}$$

Canonici 12 & sacellani 20 partiuntur quotannis aureos 3000, sed ea lege ut canonicus 5 capiat, quoties sacellanus 4, quantum igitur eorum stipendium est annuum: multiplica numeros personarum & stipendiorum, primus erit 60, secundus 80, qui additi sunt 140: dic igitur.

$$\begin{array}{r} 60 \quad 1285 \frac{5}{7} \\ 140 \text{ dant } 3000. \text{ ergo } \\ \hline 80 \quad 1714 \frac{2}{7} \end{array}$$

Interdum faciendi complures e variis generibus sortium & temporum, in unum tandem omnes addendi, ut Quatuor mercatorum biennii societate inita, primus 30 aureos contulit, sed octavo post mense 10 subduxit, iterumque vicesimo mense ineunte 12 contulit: secundus initio 24 contulit, ac sexto post exacto mense subduxit 8, denuoque sextidecimi mensis initio 14 retulit: tertius initio contulit 20, & septimo post exacto mense 8 omnes subduxit, sed decimo septimo post exacto mense 16 retulit. Quartus septimo mense ineunte 18 aureos contulit, sed quarto post exacto mense 9 subduxit, iterumque decimo septimo mense incipiente 15 addit: lucrum ex omnibus his summis factum est 100 aureorum. Quæritur lucrum singulorum. Hic quæstio laboris multo plus habet, quam quæstionis explicatio: itaq; totam & quæstionem, & quæstionis explicationem subtiliter adscripsi, ut hic vides.

30	8	240	
20	11	220	620
32	5	160	
24	6	144	
16	9	144	558
30	9	270	
20	7	140	
0	10		252
16	7	112	
0	6	0	f 18 4

18	4	72	318
9	6	54	
24	8	192	

Hic sortes & tempora in suum compositum habes reducenda. Nam primi 30 aurei & 8 menses faciunt 240: Deinde reliqui 20 aurei & 11 menses faciunt 220. Postea 20 aurei & 12, id est 32 & menses 5 faciunt 160. Denique facti tres additi sunt 620. Secundi mercatoris 24 aurei & 6 menses faciunt 144. Deinde reliqui 6 & 9 menses faciunt 144, tum aurei 14 & 15 id est 30, cum 9 mensibus faciunt 270. Hi tres facti additi sunt 558. Tertiis 20 aurei & 7 menses faciunt 140: Deinde 15 aurei & menses 7 faciunt 112, hic factus additus priori, constituit 252. Quarti 18 aurei & 4 menses faciunt 72, tum 9 aurei & menses 6 faciunt 54. Denique 9 & 15, id est 24 aurei & 8 menses faciunt 192, quatuor facti additi sunt 318. Colligamus tandem hos quatuor compositos, & concludamus principem proportionem.

	620	35 $\frac{205}{437}$
1748 dant 100. ergo	558	31 $\frac{403}{437}$
	252	14 $\frac{182}{437}$
	318	18 $\frac{84}{437}$

In hanc etiam speciem incident alligationes ignoti mediis, quoties major expetetur numerus, ut in illo frumentorum exemplo si pro 13 expeterentur 100. exemplum sic esset.

	6	46 $\frac{1}{13}$
13. 100	4	30 $\frac{10}{13}$
	3	23 $\frac{1}{13}$

CAP. XIII. DE PROPORTIONE TERMINIS CONTINUATA ad inveniendum minimos terminos in datis rationibus.

Proportio multiplex terminis composita adhuc fuit, superest terminis continuata. Proportio terminis continuata est quando antecedentis rationis aliquis terminus continuatur in consequente: ut inventio minimorum numerorum in datis rationibus & æquatio. Si datis rationibus quotlibet in minimis terminis proportionales ad secundum & tertium minimi multiplicent oblique terminos duarum primarum rationum, facti erunt continuè minimi in datis rationibus: Deinde si proportionales ad postremo inventum & antecedentem consequentis rationis minimi multiplicent oblique, alter inventos, alter sequentes omnes, facti erunt continuè minimi in datis rationibus, ut hic vides.

5	6	4	3
10	12		9

Nam si sumas minimos ad 6 & 4, habebis 3 & 2, tum si multiplices oblique 6 & 5 per 2, facies 12 & 10. Item si per 3 multiplices oblique 4 & 3 facies 12 & 9 continuè

continuè minimos in datis rationibus: ut enim 5 ad 6, ita 10 ad 12, & ut 4 ad 3; sic 12 ad 9. Hic aut continuatio terminorū est in datis rationibus, ut regula præcipit: non aut continuatio rationum, & hæc proportio disjuncta est rationibus continua tantum terminis minimis in datis rationibus. Esto & aliud exemplū.

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 12 & & 15 & & \\ 16 & 24 & 30 & & 35 & \end{array}$$

In hoc exemplo proportionales ad 15 postremo inventum, & 6 antecedentem sequētis rationis minimi sunt 5 & 2, qui multiplicatione obliqua fecerunt 16.24.30.35. Denique hac regula continuabis quotlibet minimos in datis rationibus minimorum numerorum: habet verò & hæc continuatio usum valde singularem ad illam politicam justitiæ ideam, de qua in additionis compositione diximus: Atque ut res ipsa clarior fiat & illustrior, audiat justitiæ consultus & magister ille de liberis & posthumis heredibus instituendis. Julianus enim generis hujus quæstionem proponit Digest. lib. 28. Si ita scriptum sit (ait) si mihi filius natus fuerit, ex beffe hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto. Si verò filia mihi nata fuerit, ex triente hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto: & si filius & filia nati essent, dicendum est assem distribuendū esse in 7 partes, ut ex his filius 4, uxor 2, filia 1 partem habeat. Ita enim secundum voluntatem testantis filius altero tanto amplius habebit quā filia. Licet enim subtili juris regulæ conveniat ruptum fieri testamentum: attamen cum & utroque nato testator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad ejusmodi sententiam humanitate suggerente decursus est, quod etiam Iuventio Celso apertissime placuit: Hæc jureconsultus de uno & singulari theorematīs hujus exemplo. at præstat theorema ipsum ut generale est, ita generaliter institui. Hic igitur intelligimus ex voluntate testatoris tres numeros inveniēdos esse continuè minimos in datis rationibus $\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{2}{3}$ id est in rationibus 2.1|2.1. qui erunt 4.2.1. Ac si hæreditas fuerit 70 coronatorū ex additis illis terminis quæstio herciscūda familiæ ita solvetur.

$$\begin{array}{cc} 4 & 40 \\ 7 \text{ dant } 70: \text{ergo } 2 & 20 \\ 1 & 10 \end{array}$$

In hoc exemplo accidit rationes continuari: at si uxor duos filios & totidem filias pepererit neque septenarius Iuliani sufficeret neque rationes continuabuntur, sed tres quaternarii pro tribus filiis, binarius unus pro matre, duæ unitates pro duabus filiabus assumendæ: adde igitur omnes & conclude.

$$\begin{array}{cc} 4 & 17\frac{1}{2} \\ 4 & 17\frac{1}{2} \\ 16 \text{ dant } 70: \text{Ergo } 4 & 17\frac{1}{2} \\ 2 & 8\frac{3}{4} \\ 1 & 4\frac{3}{8} \\ 1 & 4\frac{3}{8} \end{array}$$

Similia sunt illa. Partiat' pater tribus filiis 100 aureos ea condicione, ut quoties primus 5 capit, toties secundus 6 capiat, & quoties secundus capit 7, toties tertius capiat 9: quot aureos singuli capient? Hic duæ sunt rationes in minimis terminis 5 ad 6, 7 ad 9, in quibus rationibus proportionales minimi continui sunt 35.42.54. hoc modo.

$$\begin{array}{ccc} 5 & 6 | 7 & 9 | \\ 35 & 42 & 54 \end{array}$$

Adde igitur tres continuos repertos, totus erit 131. & jam dicito,

$$\begin{array}{rcl} 131 \text{ dant } 100; \text{ ergo} & 35 & 62 \frac{24}{131} \\ & 42 & 32 \frac{8}{131} \\ & 54 & 41 \frac{29}{131} \end{array}$$

Augeatur verò numerus hæredum, & quatuor hæredibus 100 ita dividatur, ut quoties primus capit 3, secundus capiat 4, & quoties secundus capit 5, toties tertius capiat 6. Denique quoties tertius capit 7, toties quartus capiat 8: quot aurei singulis cedent; hic sunt tres rationes in minimis terminis dissimiles: 3 ad 4, 5 ad 6, 7 ad 8, in quibus continui termini sunt 105.140.158.192. adde continuos, totus erit 605; & dicito

$$\begin{array}{rcl} 605 \text{ dant } 100; \text{ ergo} & 105 & 17 \frac{43}{605} \\ & 140 & 23 \frac{17}{605} \\ & 168 & 27 \frac{23}{605} \\ & 192 & 31 \frac{89}{605} \end{array}$$

CAP. 14. DE AEQ VATIONE.

Esusmodi igitur est inventio minimorum in datis rationibus: superest æquatio, id est continuatio duorum ordinū binis numeris proportionalium: Itaque extremi remotis mediis sunt proportionales, neque continuatio rationum hic expetitur, sed terminorum tantummodo: æquatio est ordinata vel perturbata: æquatio ordinata est æquatio secundum eundem ordinem numerorum. Itaque primi secundis, secundis tertiis sunt proportionales: ut hic vides in tribus exemplis, quæ continuari in unum possunt.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 9. & 6. & 3. & 9. & 6. & 9. & 3. & 6. & 9. \\ 12. & 8. & 4. & 12. & 8. & 12. & 4. & 8. & 12. \end{array}$$

Hoc genere proportionis plurimæ in elementis demonstrationes à Theone conclusæ sunt: potes autē in exemplo continuare æquationem proportionibus octo: dicique septem intermissis proportionibus, ut 9 ad 9, sic 12 ad 12, æquatio turbata est quando fuerit ut primi ordinis primus ad secundum, sic secundi secundus ad tertium: utque primi secundus ad tertium, sic secundi primus ad secundum: ut vides in tribus exemplis separatis non continuis.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 9. & 8. & 6. & 9. & 8. & 9. & 32. & 16. & 8 \\ 24. & 18. & 16. & 16. & 18. & 16 & 8. & 4. & 2 \end{array}$$

Hic enim

Hic enim ut 9 ad 8, sic 18 ad 16: item ut 8 ad 6, sic 24 ad 18, & similiter in verso ordine in reliquis exemplis. Difficile autem sit in numeris integris terminos proportionis inversè æquatos continuare: continuari tamen possunt ordine non solum in verso, sed in contrarias partes tendente: ut hic vides

6. 3. 2. 1. 3. 4. 3. 1. 2.
12. 24. 8. 6. 8. 24. 12. 8. 4.

Hoc proportionis genus minus usitatum est, ea tamen Archimedes utitur 4 theoremate 2. de Sphæra, & 9. Theor. 2. Isorro.

CAP. XV. DE CONTINUAE

proportionis proprietate.

Proportio disjuncta generatim descripta est, jam tēpus est de continua dicendi, quando quæ ratio est primi termini ad secundum, eadem est secundi ad tertium: ut in 2. 4. 8. De proportionē continua & simplici in tribus terminis vel multiplici, in longius continuis similia ferè præcipiuntur ijs quæ præcepta sunt in proportionē disjuncta. Proprietas primò duplex deducitur è duplici proprietate disjunctæ proportionis. Si tres numeri sunt cōtinuè proportionales, maximus & minimus majores sunt medio: ut in 2. 4. 8. 10 superant 4: neque tamē convertitur magis quàm antea. Secunda autem proprietas est reciproca. Nam 16 factus à 4 medio est æqualis ipsi 16 factus à 2 & 8 extremis, & vicissim, cum equalitas ista sit, tres numeri sunt proportionales. Hic enim medius est pro duobus. Itaque quod aurea regula docuit de quatuor disjunctis, id nunc continua proportio assumit in tribus cōtinuis. Hinc etiam patet inventio proportionalis siue medij siue extremi. Nā si factum à duobus tertius per se dividerit, erit medius proportionalis, ut 4 per 4 dividit 16 factum à 2 & 8, & medius est proportionalis inter 2 & 8. Item, Si primus dividerit factum à secundo, quotus erit illis tertius proportionalis, ut in eodem exemplo datis 2 & 4, primus 2 dividat 16 factum à 4 secundo, quotus 8 erit tertius illis continuè proportionalis. Itaq; regula hic aurea etiam est, sed in tribus numeris, quæ ante fuerat in quatuor, hinc varia sequuntur: primò. Si duo numeri habeant tertium proportionalem, erunt compositi inter se, ut in eodem exemplo 2 & 4. Ideoq; si primi sint inter se, nō habebūt proportionalem tertium: ut in 2. 3. Nam si 9 factum à 3 dividas per 2, quotus erit $4\frac{1}{2}$, qui numerus non est integer.

CAP. XVI. DE INVENTIONE

continuè proportionalium.

HÆc proprietas est proportionis continuæ & simplicis ad inventionem tertij proportionalis. Sed proportio continua quotlibet terminis continuari

f 3 potest,

potest, tumque ratio primi ad secundum duplicatur in tertio, triplicatur in quarto, & sic deinceps uno minus: ut in 1. 2. 4. ratio 1 ad 4 est ratio 1 ad 2 duplicata in 1. 2. 4. 8. ratio 1 ad 8 est ratio 1 ad 2 triplicata, ratio nempe extremorum colligitur ex omnibus intermediis, ut antea patuit. In hac progressionē plurima spectari possunt ut si primus dividat secundum dividet consequentes omnes, si dividat ultimum dividet secundum, sed præcipuē spectatur inventio terminorum vel summa. Inventio terminorum multiploꝝ facilis est multiplicando ultimum per nomen rationis, non item in reliquis generibus: theorema tamen inventionis hujus commune est, ē datis duobus cujuscunque rationis sic est. Si duo data rationis numeri multiplicentur uterq; per utrumque, fient tres continuē proportionales datis: tum si facti multiplicentur per datum antecedentem, denuoque ultimus per datum consequentem, quatuor fient continuē proportionales datis, & sic deinceps inveniētur quotlibet in data ratione, ut hic vides.

	2	3			
	4	6	9		
8	12	18	27		
16	24	36	54	81	

Hoc exemplum fuit rationis superparticularis, via eadem erit in reliquis generibus. Hinc etiam sequitur inventio minimorum, si nempe dati sint minimi. Extremi enim erunt primi, quia facti à primis inter se, vel à primis per primos. at si continuē proportionales sint, extremorum inter se primorum erunt minimi, & contra, ut in eodem exemplo patet. Itaque si continuatio sit extremorum inter se, primorum erit maxima. Ex hac inventionē duplex inventio alia sequitur, prima. Si duo numeri habuerint continuē medios, proportionales datis habebūt: medios totidem, ut in eodem exemplo. Secunda. Quot continuē medios habēt primi inter se, totidem habeant ad unitatem. Et quot medios habent duo numeri, & unitas, dati totidem habent: ut in eodem exemplo si proponatur unitas, ut hic vides.

		1			
	2	3			
	4	6	9		
8	12	18	27		
16	24	36	54	81	

Ex hoc autem consecutario secundo sequitur inventio cujuscunque optati termini ē multiplicibus. Si termini progressionis arithmetica ab unitate, terminis geometrica progressionis à data rationis primo multitudinis numero respondeant, factus à duobus geometricis, erit progressionis suæ terminus uno major quam est simul uterq; arithmeticoꝝ multiplicatis respondentium, ut in hac progressionē dupla.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
1	2	4	8	16	32
					64

Itaque

Itaq; si quæras terminum progressionis octavum, adde arithmeticos terminos constituentes septimum, ut 3 & 4, & multiplica geometricos ijs respondentes 8 & 16. facies 128 octavum terminum progressionis. Sic erit in hac progressionem tripla.

•	1	2	3	4	5
1	3	9	27	81	243

Si quæras decimum, multiplica 243 per 81 respondentes arithmeticeis 4 & 5, constituentibus nonum, facies 19683 decimum terminum. Hæc termini optati est inventio. Observata verò est hæc inventio in hac multiplici continuatione ex arithmetica locorum progressionem, ut regula instituit, quia primus multitudinis numerus multiplicans secundum facit tertium, hoc in primo loco singulare ius est, secundus multiplicans tertium facit non jam quartum, sed uno plus id est quintum, tertius multiplicans quartum facit, non quantum, sed plus duobus, id est septimum, & sic deinceps. Causa vero est tam disparis accretionis proportionalium proprietas, quia quot inter unitatem & secundum è duobus multiplicandis, intercedunt continuè mediis, tot inter secundum è multiplicatis & optatum intercedunt. Omnis enim progressio multiplicium est ab unitate, quia numerus multitudinis quilibet est multiplex ad unitatem. Ideoque inventio optati est in solis multiplicibus, quorum nempe primus terminus possit esse unitas: in reliquis rationum generibus non est, in quibus neque unitas potest esse primus terminus, neque ideo progressio potest infinitè ab unitate perpetuari.

CAP. XVII. DE INVENIENDA

summa progressionis geometricæ.

A Tque hæc de inventionem continuorum, summa sequitur: Si tollatur primus a secundo & ultimo, erit ut reliquus secundi ad primum, sic reliquus ultimi ad ultimum præcedentes omnes. Ideoque, si quartus (qui sic erit ad reliquum ultimi, ut reliquus secundi ad primum) addatur ultimo totus, erit summa, ut hic vides.

2	4	8
	2	6

Tollatur 2 à 4 & ab 8. ut 2 reliquus secundi est ad primum 2, sic 6 reliquus ultimi est ad 4 & 2 præcedentes: utrobique enim est æqualitas. Proportionales sunt igitur 2.2.6.6. jam 6 addatur 8 ultimo, summa progressionis erit 14. Sic in

2	8	32
	6	30

Tollatur

Tollatur 2 ab 8 & 32, manent 6 & 30, utq; 6 est ad 2, sic 30 est ad præcedentes, ideoq; triplus: proportionales igitur erunt 6. 2. 30. 10. Iam denique 10 addatur 32, totus 42 erit summa progressionis. Fac periculum in maiore progressionē, ut hic uides.

2	4	8	16	32	64
	2				62

Tollatur 2 à 4 & 64. manent 2 & 62: utq; 2 est ad 2, sic 62 ad præcedentes, ideoq; æqualis est illis, proportionalesq; ita sunt 2. 2. 62. 62. Quapropter 62 addantur 64, totus 126 erit progressionis summa.

Agricola promisit filio suo pro xenijs primo anni die in triginta continuos dies modios tritici primo 1, secundo 2, tertio 4, & sic deinceps duplicando: quæritur ~~trigesimo die~~ ^{trigesimo die} quot modii futuri sint. Quærat tricesimus terminus, id est ultimus progressionis ^{hujus} ut antea demonstratum est: primo sextus 64 per sese faciet 4096 pro duodecimo termino: ut hic rursus ex sese faciet 16777216 pro vicefimo quarto termino, quem multiplica per 32 quintum terminum, facies pro vicefimo nono termino 536870912, qui tricesimus erit, si unitas pro primo numeretur. Tollatur igitur unitas à secundo & ultimo, exuperantia secundi erit æqualis primo. Itaq; inventus ultimus uno dempto erit æqualis omnib. antecedentibus. Addatur uterq; summa tota erit 1073741823. Regula plura ponderandi paucis ponderibus deducitur ē geometrica progressionē, quæ libripēdi singularem commoditatem suppeditat: ideoq; ad extremum addenda visa est, ut in proximo exemplo.

Libræ terminis duplæ & triplæ continuationis comprehensæ, totidem cognominibus ponderibus appenduntur. Id verò fit nunc additione ponderis ad pondus, nunc subductione & ad oppositam lancem additione. Sic libræ usque ad 7 appenduntur tribus ponderibus, quorum primum unius libræ, secundum binarium, id est duarum librarum, tertium quaternarium, quia progressionis 1. 2. 4. termini tantum comprehendunt: sic libræ usque ad 15 appenduntur 4 ponderibus hac progressionē significatis 1. 2. 4. 8. Sic libræ 31 ponderibus hujus continuationis 1. 2. 4. 8. 16. Sic in tripla ratione, libræ usque ad 40, appenduntur ponderibus hac progressionē significatis 1. 3. 9. 27. Sic libræ usque ad 121 appenduntur his ponderibus 1. 3. 9. 27. 81. & sic deinceps libræ terminis triplæ progressionis comprehensæ, totidem cognominibus ponderibus appenduntur.

F I N I S.

P. RAMI GEO-

METRIAE LIB. I. DE

MAGNITVDINE.



Eometria est ars bene metiendi.

Finis geometriæ est bene metiri, ideoque suo fine definitur: Bene metiri igitur est cuiusque rei mensurabilis naturam atque affectionem considerare, resque mensurabiles comparare inter se, rationemque & proportionem atque similitudinem perspicere: id enim totum est bene metiri, siue congruentia & applicatione datæ mensuræ, siue multiplicatione terminorum, siue facti per multiplicationem partitione, siue quacunque alia ratione rei mensurabilis affectio consideretur. Atque hic finis ge-

ometriæ usu atque opere geometrico multò splendidior apparebit, quam præceptis, cum animadvertes astronomos, geographos, geodetas, nautas, mechanicos, architectos, pictores, statuarios in descriptione & dimensione astrorum, regionum, fundorum, machinarum, æquorum, ædificiorum, tabularum, signorum nihil aliud quam geometriam uti: sicuti grammatica, rhetorica, logica plenius & abundantius percipiuntur ex usu poetarum, oratorum, philosophorum, quam è dictatis grammaticorum, rhetorum, logicorum: denique ut in grammaticis rebus bene loqui, in rhetoricis bene dicere, in logicis bene ratiocinari, in arithmeticis bene numerare, sic in geometricis bene metiri sit finis summus atque ultimus: quo referantur & pertineant omnia, quæ totis geometricis elementis instituantur. Mensura verò in quolibet mensurabili genere est quippiam minimum, ut Aristoteles annuit 4. cap. 2. de celo, & Proclus in Timæum repetit, & vulgo à geometris famosa mensura dicitur, ut in metiendis palmis, pedibus, passibus, unus palmus, unus pes, unus passus. Sed enim Protagoræ antiquum dictum est, in Aristotelis philosophia hominem esse τὸ τῶν ἀπάντων χρημάτων μέτρον omnium rerum mensuram, quod etsi alio quodam sensu usurpatur à Protagora, attamen libenter audio hominem naturæ geometricum esse: & Vitruvius Heroque mechanicus docent mensuras rerum ex humanis membris acceptas esse, digito, palmo, pede, cubito. Digitus est 4. granorum hordeaceorum, ut granum hordei minima mensura sit, palmus 4. digitorum, pes quatuor palmorum, ut sequitur.

a Cubitus

Granum hordei minima mensura
 Digitus 4. gr.
 Palmus 4. digiti
 Pes 4. palmi.

Vitruvius
 Hero

Proclus

finis

qui artius Geometria stant

mensurabilis forma

quid sit metiri.

Cubitus sesquipedalis

Passus 5 pedum

Stadium 125 passuum

Milliarium 1000 passuum

*Nihil prius omni
mensurae corpus est*

*γεωμετρία
nomen hominis*

θεός αὐτὸς γεωμετρεῖν

*Plutarchus interpret
Platonis publicis*

*Geometria in
numeros
formas*

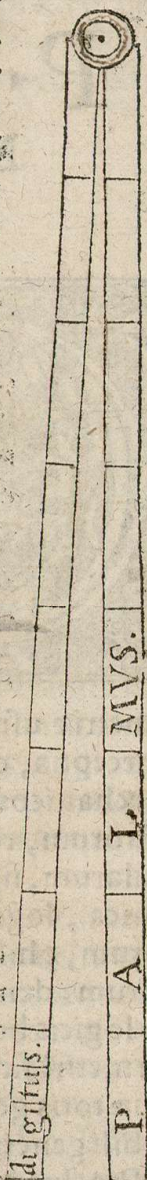
*μετρίαν δὲ πλατὼ
ἀμφότες*

Subiectum

Cubitus à radice ad extremum longissimum digitum est sesqui-
pes. Ex iis mensuris oritur itineris mensura passus, stadium millia-
riū. Passus geometricus est 5 pedum, stadium 125 passuum: & Græ-
corum est: milliarium mille passuum, & est Latinorum: ideoq; mil-
le & millia pro milliariorum & milliaris sumuntur. Franci & Hispani
Leucam 2000 passuum nominant. de cæteris generibus mensuræ
plura in scholis. Quare geometria hunc in modum definita sit ars
bene metiendi. Nomen autem re nominata levius est. Geometria
enim dicitur tanquam terræ tantum dimetiendæ ars quædam sit,
quod nomē videtur in Aegypto primum factum esse: ubi ad termi-
nos agrorum Nili inundationibus obrutos restituendum primum
geometria adhibita sit. Itaque authori Epinomidis geometriæ ὁ
νομα γεωμετρία nomen ridiculū dicitur, quod nempe à terra mundani
globi centro factū sit, cum geometria sit ars metiendi non solum
terram, sed aquam, sed aerem, totumque mundum, in eoque cor-
pora, superficies, lineas, omniaque omnino mensurabilia: Neque
vero Plato cum dixit ἐν θεῷ δὲ γεωμετρεῖν, deum semper tanquam di-
ceres, terrimetiri, intellexit terras tantum metientem deum, sed ra-
tione, proportionē, similitudinē omnes mundi partes exornātem
& dimetientem: ut Plutarchus octavo Symposiaco secundo pro-
blemate interpretatur. Quare geometriæ nomen origine nimis
angustum est: usu tamen tandem est ampliatus latius, adeo ut cō-
fusa & arithmetica de numero, & metrica ipsam de magnitudi-
ne vulgo complectatur: & sic Quintilianus ait lib. 1. cap. 10. geome-
triam dividi in numeros atque formas, & Euclides, quamvis in to-
tis elementis verbum ipsum (geometria) nusquam legatur, attamen
re ipsa si elementa hoc nomine complecti voluit, & si titulus elemē-
torū nominis huius fuit, arithmetica etiam & metrica geome-
triæ nomine cōplexus est. Et academia epigramma, ὅδε αὖτὲ γεωμετρεῖν
τοὺς δόκτω, non solum geometriæ, sed totam mathematicū ignoran-
tiam averfabatur. Itaque geometriæ nomen tandem latius ampli-
atum est. Platonē in Philebo & politico, & 7. de repub. μετρίαν signi-
ficantiore verbo & magis proprio dicitur hæc ipsa ars: sed quoniā nominum
magister est usus, geometriæ nomē teneatur modo sua vi & facultate propria de-
finitum. Singula autem elemēta deinceps numero distinguuntur, & postea per
e litteram elementum significabitur.

2. Res ad bene metiendum proposita est magnitudo.

Subiectū geometriæ est magnitudo. Est enim singulis artibus certū & propriū
quoddā propositū genus ad interpretandū & suis præceptis informandū, eoque
præcipue inter se differunt, præcipueque sunt cōtinenda. Idem logica lex
autē imprimis præscribit. Sic grammaticæ sermo, rhetoricæ oratio, logicæ ra-
tio, arithmeticæ numerus, ita nunc geometriæ magnitudo declaranda, & om-
nibus



omnibus generibus, differentiis, affectionibus explicanda proponitur.

3. *Magnitudo est quantitas continua.*

Hac definitio est ex Aristotelis categoriis: numerus est quantitas discreta, ut binarius, ternarius, quaternarius, constant ex unitatibus, duabus, tribus, quatuor: hæ partes sunt discretæ & separatæ: at lineæ, superficiei, corporis partes absque ulla secretione continentur, ut mox plenius intelligetur. Itaque magnitudo est, qua mensurabile quodlibet magnum dicitur: ut linea longum, superficies latum, corpore solidum.

Numerus discretus
Magnitudo continua

4. *Continuum est, cujus partes communi termino continentur.*

Hac item e categoriis Aristotelis definitio est, sensus reconditoris planeque geometrici: & præcipue dependet e communi termino: partes vero (quæ dicuntur) hic nihil in toto sunt, nisi potentia: ut vere Aristoteles admonet 1. cap. 6. Phys. Neque tota magnitudo cogitari posset, nisi partibus suis compacta, quas tamen licet omnibus locis assumere contentas communi termino, qui Aristoteli est *νοῦς ὁρᾶς*, Euclidi *νοῦς* *πᾶν* communis sectio, ut in linea punctum, in superficie linea, in corpore superficies.

Linea longum
Superficie latum
Corpus solidum

Partes continui sunt potentia

5. *Terminus est magnitudinis extremum.*

Terminus hic appellatur sive actu terminet, ut in magnitudinis principio & fine, sive potentia, ut cum est communis terminus continui, neque terminus est pars terminatæ magnitudinis: aliud enim est terminans, aliud terminatum. Terminus enim uno intervallo inferior est terminato: punctum lineæ terminus est, & minor est uno intervallo, quia est individuum: linea est terminus superficiei, & minor item intervallo, quia sola est longitudo: superficies est terminus corporis, & minor item intervallo, quia est longitudo tantum & latitudo. Et sic Aristoteli in categoriis terminus lineæ, superficiei, corporis accipitur punctum, linea, superficies. Terminata verò & finita omnis magnitudo est actu, geometraque (ait Aristoteles 6. cap. 3. Phys.) infinitam lineam non aliter postulat, quam quanta satis sit, & sic ait idem 10. cap. 1. de celo, *ἀπὸ γὰρ ὁρισμένης* postulantur disciplinæ causa.

Terminus
Linea
Superficie
Corpus

Terminus non est pars magnitudinis

Magnitudo non infinita

Itaque

Magnitudo infinite & creatur, & continetur, & secatur iisdem quibus terminatur.

Linea, superficies, corpus creantur motu puncti, lineæ, superficiei: item continentur & secantur puncto, linea, superficie: at linea puncto, superficies linea, corpus superficie terminatur: ut per singula genera percipietur. De sectione Proclus generatim etiam monuit ante 1 p 1. Quod omnia dividuntur iisdem, quibus terminantur: quod & continui definitione intelligitur. Nam si commune vinculum ad continendum & copulandum partes lineæ, superficiei, corporis est punctum, linea, superficies, necesse est sectionem communibus illis vinculis fieri, & dissolvi, quod continebat & copulabat. Infinita vero magnitudinis sectio plurimis in Euclide locis de quibus in scholis postulatur: unde & geometrica & physica

Omnia dividuntur iisdem quibus terminantur

ad abstractionem
quodlibet discipline abstractum
Exemplum
in physica abstractum
Artes inchoe
et doct. & abstr. dicuntur
Linea ultima
propositionis

geis & abstractio perspicue agnoscitur. Magnitudo enim in geometricis rebus, non physica, sed abstracta à physico corpore animo concipitur. *ἀφαίρεσις* tamē communis omnium artium non geometriæ propria est: abstractiva enim perinde est (ut Aristoteles author est 3. cap. 13. lib. philosophiæ) astrologia, harmonica, Optica, Physica, Medicina, & omnino quælibet disciplina: quæ generalia tantum documenta interpretatur, è logica nempe lege *νατὰ παντός*. Et quidē calor & rubor, qui maximē sentiuntur, si propria doctrina doceantur, separati à cæteris qualitatibus & abstracti, imò à cæteris heterogeneis rebus cogitentur necesse est, solaque mente percipiantur, nec tamen talis in rerum natura calor, neque talis color separatus & abstractus ullus est. Attamen quamvis magnitudines, corpora, superficies, lineæ, puncta mente sic abstrahantur à qualitatibus physicis & sensilibus à lucido, umbroso, raro, denso, levi, graui, calido, frigido, humido, sicco, revera tamen esse in iis ipsis physicis corporibus Aristoteles sæpè & solícite confirmat, ut in physicis 1. cap. lib. 2: 5 & 8 cap. 3. lib. de calor: in methaphysicis præcipuè 3. cap. 13. lib. ubi nominatim ait rationes & demonstrationes esse de magnitudinibus sensilibus: non tamen quatenus sunt sensibiles, sed prout tales sunt. Et sicut Vitellio ad 3 p. 2. verissime ait. Omnis linea, qua pervenit lux à corpore luminoso ad corpus oppositum, est linea naturalis sensilis, latitudinem quandam habens, in qua est linea mathematica per speciem imaginationis assumēda. Denique magnitudinis geometricæ intelligentia est mentis, magnitudo tamen ipsa, linea, superficies, corpus est revera in sensili & physico corpore. Hæc logica de mathematicis Aristotelea est. Quare magnitudines licet mēte separēt, revera tamē sunt ille ipse magnitudines, quib. corpora physica corpora sunt, id est longa, lata, solida, atque omnino locum occupantia. Quare geometricæ & phisicæ judicavit Aristot. cū docuit magnitudines revera phisicas esse, sed abstractas à cæteris physicis qualitatibus à geometris mente considerari: & contrā geometricas magnitudines physicis qualitatibus permistas à physicis sensu in corpore sensili tractari. Sic Aristoteles 2. cap. 2. phys. Lineam geometricam ab Optica distinguit. Geometria (inquit) considerat lineam physicam, at non quatenus physica est: Optica autem considerat lineam geometricam quidem, non autem quatenus geometrica est: sed quatenus physica. Sic igitur Aristoteles de abstractione mathematicum philosophatur. Neque verò in hac logica abstractione (quæ constituendæ doctrinæ causā instituitur) geometra mentitur, sed crassis symbolis, & notis, & exemplis punctorum, linearum, superficierū, corporū abutitur ad res notis illis significatas explicandū: quod Aristoteles monuit in prioribus 1. lib. 39. cap. & in posterioribus 1. lib. 8. cap. & in physicis 2. cap. 2. lib. & in philosophia 3. cap. 13. lib. & 2 c. 14. l. Deniq; tota *ἀφαίρεσις* geometrica est logica, quæ cōsiderat genera generaliter, & sola mēte cōcipit, generū tamen essentiā & veritatē docet in singularibus consistere. & si quid omnino logicis legibus contrariū geometria profiteretur, id *ἀνογόν* planeque absurdum judicarem. Quare cū magnitudo geometrica sit in infinitum dividua, *ἀφαίρεσις* neque phisicas magnitudines tollit, neque interea quidquam mentitur.

6. *Punctum est signum in magnitudine individuum.*

Euclides.

Euclides 1. d. 1. id ipsum comprehendit, cum ait, signum esse cuius nulla pars sit. Neque tamen absolute σημειον signum (ut Euclides) appellamus, sed punctum dicimus, quia Platoni & Aristoteli σημειον punctum est pro eodem hic proprium. Punctum vero ut definitur, physicum & sensu perceptibile nullum est, quia sensus tantum corpus sentit & si quid sensu minimum sit, punctum physicum dicitur. Quare punctum quidem nulla est magnitudo, neque id ipsum est, quod creta pingitur, pictumque oculis cernitur, sed quod in magnitudine individuum concipitur & cogitatur. Ac quamvis sit magnitudinis expers, magnitudinis tamen omnis est principium & principium potentia: fluxu siquidem motuque puncti linea deinde exoritur, ex qua superficies, unde corpus. Itaque Aristot. 14. cap. 1. Top. punctum ait esse idem in linea, quod unitas est in numero: utrumque enim principium: unitatem enim principium numeri ajunt esse & punctum lineae. Proinde & Pythagoreis (ut est apud Proclum) punctum definitur unitas habens situm.

Punctum est magnitudinis principium potentia.

Unitas est numeri principium
Punctum non magnitudo

7. *Magnitudines symmetrae sunt, quas eadem mensura metitur, asymmetrae contra* 1. 2. d. 10.

Magnitudinum inter se est a numeris symmetria & ratio: a seipsis autem congruentia & adscriptio, sed mensura magnitudinis tantum est μέτρος, & arbitrio geometrae statuendis digitum, palmum, pedem, aut aliud quodlibet pro mensura. Ergo duae magnitudines, altera pedalis, altera bipedalis sunt symmetrae, quia magnitudo pedis unius utramque metitur, primam semel, secundam bis. At quaedam magnitudines mensuram communem non habent, ut diagonus quadrati & latus ad 116 p 10. actu asymmetrae sunt, quae Aristoteli propositio est in ore perpetua. Diagonus tamen & latus potentia symmetrae sunt, per sua nempe quadrata, quia quadratum diagoni duplum est ad quadratum lateris.

Mensura magnitudinis est μέτρος.

Diagonus quadrati
et latus asymmetrae



8. *Rationales sunt quarum ratio est explicabilis numero data mensura, irrationales contra* e 5 d 10.

Data mensura Euclidi dicitur μέτρον id est dicta, definita, certa, quae nempe numero expressa sit, famosa nempe quae prius dicta est, velut signum propositum confessumque (ut ait author de lineis individuis) a qua mensura capitur (ut ait Theon ad 11 p 10.) Atqui haec mensura rationalis est sibi ipsi, ut sunt omnes magnitudines inter se aequales: Ideoque vulgo rationalis dicitur, sed ratione obscuriore, cum reipsa terminus rationis unicus appareat: manifestiore autem ratione magnitudines rationales dicuntur, quae symmetrae sunt ad datam mensuram, sicut ait idem author de lineis individuis, lineas rationales vel irrationales μέτρον ἀκέραιον inter se dici: quod nusquam tamen Euclides satis aperte proposuit. Sic Marinus in protheoria datorum ait μέτρον esse, quod secundum aliquem numerum cognoscimus, & secundum aliquam positionem mensuram, ut secundum palmum verbi gratia vel digitum: sic apud Pachymonium definitur μέτρον per numerum nota. Sic in musicis Ptolemaeus definit rationale, cuius mensura accuratius nota sit. Irrationales igitur magnitudines contra intelligantur, ut latus la-

Marinus

Pachymonium

a. 3. teris quae

Exemplum irration-
alium

Latus lateris quadrati
20 p. ad datam bipedalem

Segmenta inter proportionalia
soluta ad rationem

Diametri irrationalis ad
latus quatuor anguli inscripti

Diagonus icosaedri et dode-
caedri ad latus, irrationalis

teris quadrati 20 pedum ad datam bipedalem, qualium irrationalium magni-
tudinum genera tredecim libro decimo elementorum docentur: sic ad nostram
hanc definitionem quamvis ad Euclide nequaquam satis expositam ad 6. 11.
16. 17 p. 13. segmenta recta proportionaliter secta sunt irrationalia ad totam ra-
tionalem: diameter in circulo rationalis est, irrationalis ad latus inscripti quin-
quanguli: diagonus icosaedri & dodecaedri est irrationalis ad latus. Atque ho-
rum omnium ratio quidem est, ut ratio duarum quarumlibet quantitatum, sed
cū sit inexplicabilis numero, satis fuerit generali notitia irrationales nosse: qua
specie aut differentia *ἀλογίας*, ad finem geometriæ nihil attinet.

9. Magnitudines congruæ sunt, quarum partes applicatæ partibus
equalem locum occupant. (eundem)

Symmetria igitur & ratio à numeris fuerunt, proxima magnitudinum affe-
ctiones geometricæ omnino sunt: in congruentia verò ^{locus} latus logice & situs intel-
ligatur, qui sit corporis, superficiei, lineæ: imo vero etiam puncti. Et sic Eucli-
des in Datīs ait dari situ, quæ semper eundem locum obtinent: & nominatim
sic puncta, sic lineas, sic superficies dari proficitur. Igitur *ἐφαρμοσία* vel *ἐφαρμογή*
congruentia, ut Euclidī & Proclo dicitur, est duarum magnitudinū, quādo pri-
ma primis, media mediis, extrema extremis, partes denique partibus usque-
quaque respondent. Sic lineæ congruunt, quando puncta terminantia punctis,
totæque longitudines totis longitudinibus eundem locum occupant. Sic super-
ficies congruunt, quando lineæ terminantes lineis terminantibus, area termi-
nata areis terminatis eundem locum occupant. Congruentia denique dicuntur
seu potentia seu actu, ut separata lineæ rectæ æquales, quæ sic applicari possunt.
Atque in lineis & superficiebus *ἐφαρμοσία* multis in geometria locis usurpatur.
Imprimis hinc oritur axioma illud axiomatū Euclidī primum, Quæ eisdem æ-
qualia: applicatione enim & *ἐφαρμοσία* magnitudinibus id convenit: Sic 17. d. 1.
congruunt in Proclo semicirculi per diametrum dissecti: sic triangula in Eucli-
de ad 4 & 8 p. 1. ex quarum propositionū fundamentō innumerabilia deinceps
concluduntur, ut eorum omnium, fundamentum sit *ἐφαρμοσία*. Triangula item in
Pappo ad 5 p. 1. congruunt: Sic commune segmentum duabus rectis congruit
ad 35 p. 1. sic secundo libro primæ propositiones planorū æqualitatē approbāt: sic
sectiones circulares ad 24 p. 3. congruunt: sic peripheriæ duæ & totidem circuli
congruunt ad 30 p. 3. Sic ad 11. & 15 p. 4. congruunt, illic quinque, hic sex cir-
culi: Sic (ut è lib. 10. patet) omnes magnitudines symmetras, quas quidem si-
ne multiplicatione vel proportionē metiari, *ἐφαρμοσία* metitur: Sic *ἐφαρμοσία* ad-
hibetur 1 p. 11. Sic *ἐφαρμοσία* postea erit mensura æqualium angulorum, quæ ipsa
fere geometriæ anima est. Sic Archimedes 8 th. 1. Ison. *ἐφαρμοσία* habet triangu-
lorū, & 20 th. in sphaeroidibus *ἐφαρμοσία* sphaeroidum. Quin Archimedi 1. Ison.
rop. axioma quintum est: æqualibus & similibus figuris planis. cōgruentib. in-
ter se, & centra ponderum congruunt inter se. Itaque ex innumerabilibus con-
gruentibus & lineis fit unica linea, & superficiebus una superficies. Sic Vitellio
cum illis Euclidis exemplis consentiens postulat libro primo, cum duæ superfi-
cies pla-

Congruentia æqualitas
p. 1. d. 11.

Lineæ congruentia

Superficies congruentia

Quæ eisdem æqualia

Vitellio

cies planæ se contingunt, unam ex eis fieri superficiem. Corpora verò si congruant, videntur tantum congruere per superficies, & sic 10 d 11. corpora definiuntur aequalia, quæ comprehenduntur à superficiebus aequalibus multitudine & magnitudine. Et tamen hoc ipso, quod aequalia sunt, eundem & æqualem locum occupant. Et sic 1 d 1. de gravi & levi, corpora definiuntur magnitudine æqualia, quæ locum replent æqualem. Hoc ἐφαρμόσις genere corpora liquidorum & flicorumque omnium metimur, replendo nempe æqualem locum. Sic monetarii monetæ ex æquipondiis laminis æqualis loci repletionem æquales iudicant. Attamen Archimedes antea citato loco Spharoidum ἐφαρμόσις facit, & à Com mandino nostro Archimedem centrobarica imitato postulatur. Solidis figuris similibus & aequalibus congruentibus centra quoque gravitatis inter se congruere: sed tamen ἐφαρμόσις ista, ut antea ἀφαίρεσις, mētis tantū est, & magnitudinū mente abstractarū, non sensilium & physicarum, quæ singulas partes sensili loco discretas habent, ut corpora duo physica simul esse nequeant. Physicum autem & sensile tactu nihil est tantum lineare, aut superficiarium tantum, sed corporeum est, quicquid est physicum.

Itaque

Magnitudines congruæ sunt æquales. 8. axi.

Potest minor recta majoris parti congruere, neque toti æqualis esse, sed tantæ æqualis est quantæ congruit, nec tamen axioma istud reciprocum est, neque congruentia atque æqualitas reciprocantur. Triangulū parallelogrammo æquari potest, neque tamen omnino congruere: & sic circulo quæritur æquale quadratum quamvis incongruum, quia ὁμοειδῶς similia specie tantum congruere possunt, ut Proclus ait ad 4 p 1. Itaque etiā parallelogramma non congrua possunt æquari, ut patet ad 35.36 p 1. Neque vero nobis ἐφαρμόσις axioma quisquam repudiet tanquam mechanicum, neque ideo geometricum. Nam Archimedes cum Euclide copulare libuit, & artis utilitatem cum veritate artis cōiungere. Neque isto principio quicquam in geometria luculentius est, prima omnino geometrica mensura, quæ granis, digitis, palmis, pedibus, cubitis, passibus, decempedis, & similibus efficitur, ἐφαρμόσις utique iudicio efficitur, & falsum est, mechanicum quod sit, geometricum non esse: postulata enim & problemata omnia (quod geometricorum & principiorum & propositionū genus alterum est) mechanica sunt: & cum theorematibus differentiā vulgo habent, quod hæc contemplantur, illa fabricantur & machinantur. Symmetria & ratio totæ mechanicæ sunt, dum eadem mensura diversas magnitudines metiuntur, & comparando numerant. Itaque ἐφαρμόσις tota geometrica est, ut tot locis jam patuit, nec regulæ & circini (quibus omnia geometræ problemata fabricas & machinas suas fabricantur & machinantur) vis alia atque alia facultas est, quam ἐφαρμόσις geometrica: ut qui ἐφαρμόσις à geometrica schola expellit, expellat ex eadem Euclidem & Archimedes, imo geometriam ipsam. Geometricæ tamen agere non videatur qui mechanicam à geometricis principiis sejuerunt, ut vulgo solent imperiti opifices, & plerisque in rebus etiam mathematici, ut

Corpora æqualia sunt per superficiem

Corpora æqualia sunt per

monstrari monetæ non sunt æqualia sed congrua

Archimedes

ætiam per se non congrua sunt sed per se congrua sunt

Congruentia & æqualitas non reciprocantur.

tici, ut cum sine geometriæ principiis, solis instrumentis inveniunt duas meti-
as continuè proportionales: Hic verò geometricum est principium ab Euclide
& reliquis geometris approbatum.

10. *Magnitudines adscriptæ sunt inter se, quando unius termini alterius
terminis terminantur: quæ intra est, dicitur inscripta: circumscripta,
quæ extra.*

Sequitur adscriptio, cuius species sunt inscriptio & circumscriptio. Hec igitur
definitio generalis facta est è specialibus septem definitionibus de inscriptione
rectæ in peripheriam 7 d 4. de inscriptione & circumscriptione rectilineorum
inter se 2 d 4. de adscriptione rectilinei & circuli 3. 4. 5. 6. Adscriptione
rectilineorum inter se Euclides non utitur in elementis: utitur autem 13.
lib. adscriptione corporum ordinatorum in sphaeram: neque tamen usquam
definit. Definitio itaque generalis ab Euclide veritatem generalem accipiet, ut
intelligamus rectam in periphæria terminari punctis, quomodo Ptolemæus vo-
cat inscriptam circulo, & rectilineum terminari suis rectis, & circulum periphe-
ria, & corpus planum suis planis superficiebus, ut postea patebit. Homogenea
autem tantum inter se recte terminantur & cum rotundo propriè adscribuntur. He-
terogenea tamen lib. 15. adscribuntur, quinque nempe ordinata corpora plana
inter se & recta inscribitur periphæriæ & triangulo. Adscriptionis verò rectilinei
& circuli usus singularia mysteria tandem declarabit per rationes adscriptorū,
quæ clavis erit quædam præstantissimæ per subtensas vel inscriptas circulo (ut
Ptolemæus loquitur, vel sinus, ut recentiores appellant) doctrinæ.

P. R A M I G E O M E T R I A E . L I B . I I .
de Linea.

Magnitudo est linea aut lineatum.

Communes affectiones magnitudinis expositæ sunt: sequitur di-
chotomia, quæ adhuc nobis occurrit.

2. *Linea est magnitudo tantum longa.*

Ut sunt a. e. i. o. u. y. Talis autem magnitudo (ait Proclus ex A-
pollonio) concipitur dimensione viarum, differentiaque loci lu-
minosi à tenebricoso: Euclidi 2 d 1 definitur linea longitudo
latitudinis expers: & quidem longitudo propria est differentia
lineæ, ut latitudo superficiei, soliditas corporis.

3. *Lineæ terminus est punctum.*

Euclides 3 d 1. lineæ extrema ait esse puncta: antè verò de ter-
mino generaliter locuti sumus, & nunc lineæ proprium intelli-
gatur punctis terminari. Periphæria autem cum nec initium nec exitum habeat
videtur



Dimensio viarum
Differentia loci
luminosi à tenebricoso

videt punctis non terminari: at cum describitur, a puncto aliquo incipit, & in aliquo puncto definit. Quare punctum est terminus lineae, modo actu, ut in linea recta, modo potentia, ut in peripheria perfecta: Imo vero, ut antea patuit in continui definitione, punctis quolibet lineae seu rectae, seu obliquae continetur. Linea vero lineatur motu puncti. Omnis enim magnitudo generaliter geometrico motu creatur, ut jam dictum est, & deinceps per species patebit, ut fiant uno motu totae figurae, ut conversione circulus, sphaera, conus, cylindrus multiplicatione basis & altitudinis rectangula parallelitermina.

4. *Linea est recta vel obliqua.*

Partitio est e 4 d 1. Vbi rectitudo attribuitur lineae, tanquam inde superficies & corpus rectitudinem assequantur: & certe sic Euclides videtur probare 17 p 13. quinquangulum dodecaedri esse planum, id est rectum, quia rectam capiat, quod & Proclus ad 7 d 1 indicat. Corpus planum id est rectum, definitur a superficie plana 9 & 10 d 11, & sic omnino rectitudo solidae figurae postea intelligetur per rectam a vertice in centrum basis perpendicularem. Itaque rectitudo est linea, ideoque & obliquitas, unde superficies recta vel obliqua, & corpus rectum vel obliquum iudicatur.

5. *Linea recta est linea, quae intra suos terminos aequaliter interjacet: obliqua contra. 4 d 1.*

Aequaliter autem intra suos terminos interjacet linea, quando non hic humilior, illic altior, sed aequalis est spatium intra duos terminos comprehensio: ut hic a e. Sic qui rectum iter facit, vulgo dicitur tantum itineris conficere: quantum necesse est, qui facit obliquum plusquam, oporteat, ut Proclus ait. Itaque

Recta est brevissima intra eosdem terminos.

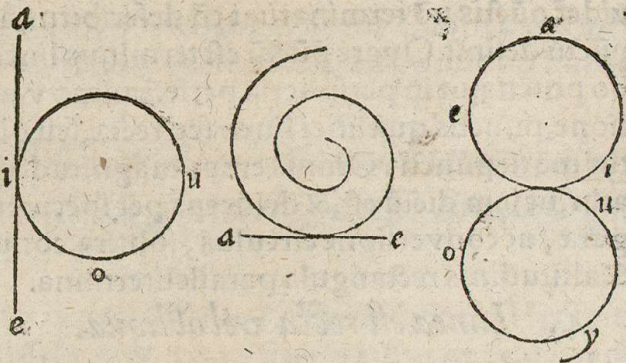
Confectarium est Archimedeum ad 1 post 1 de sphaera. & sic Platoni postque Platonem Euclidi in catoptrici linea recta est, cuius media extremis officiant, ut in solis ellipsi si linea recta a sole per lunam ad oculum nostrum duceretur, media ipsa luna nostris luminibus officeret, solisque aspectum nobis admeret, quod ex opticis sumptum est, in quibus docetur visum rectis radiis fieri. Itaque quod Euclides definit rectum in linea per aequalem inter puncta tanquam dices interjacentiam, id est per aequale intervallum, illud ipsum est Archimedi brevissimum intra eosdem terminos, quodque Platoni & Euclidi medium extremis officit.

6. *Linea obliqua tangitur a recta vel obliqua, quando ambae ita concurrunt, ut continuatae non interfecentur.*

b

Tactus

Tactus proprius est obliqua lineæ ad lineam rectam vel obliquam, ut constat e 2 & 3 d 3. Recta circum tangere dicitur, quæ tangens circum & producta non secat circum, 2 d 3: ut hic *a e* recta tangit peripheriam *i o u*, & *a e* tangit helicem. Circuli sese tangere dicuntur, qui tangentes sese non secant, 3 d 3. Ut hic periphe-



*Tactus & Sectio
distinguitur*

ria *a e* tangit peripheriam *o u y*. Hæ speciales Euclidis definitiones circum pro peripheria nominant, & tactum à sectione, & sectionis potentia distinguunt. Alioqui tactus verbum etiã in elementis commune est pro quolibet concursu: sic 8 d 1 angulus planus definitur inclinatio linearum sese tangentium in plano.

Itaque

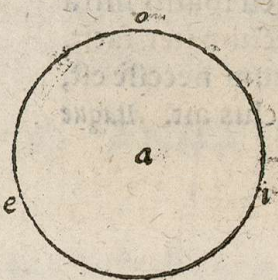
Tactus fit unico puncto. e 13 p 3

Confectarium protinus è definitione intelligitur, alioqui sectio esset non tactus. Sic Aristoteles in mechanicis ait rotundum esse mobilissimum & velocissimum, quia minime tangatur à subiecto plano.

7. *Linea obliqua est peripheria aut helix.*

8. *Peripheria quæ distat æqualiter à medio comprehensi spatii.*

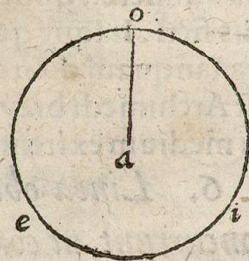
Uteio
distat æ
qualiter
ab a me
dio com
prehensi
spatio.



*Peripheria fit conversione lineæ altero termino quiescente, altero li
neante.*

Itaque

Ut in eio maneat punctum *a*, & convertatur linea *a o*, ita ut punctum *o* imprimat vestigium, fiet peripheria *e o i*. Ex hac fabrica Euclidi peripheria definitur 15 d 1. & sic sphaera, conus, cylindrus eidem definiuntur. Linea vero quæ convertitur, recta vel obliqua esse potest in plano: obliqua duntaxat est in sphaerico: in conico autem & cylindraco recta potest esse, ut latus est coni & cylindri. Itaque in conversione lineæ peripheriam procreantis spectatur tantum intervallum: imo puncta duo, alterum in centro, alterum in



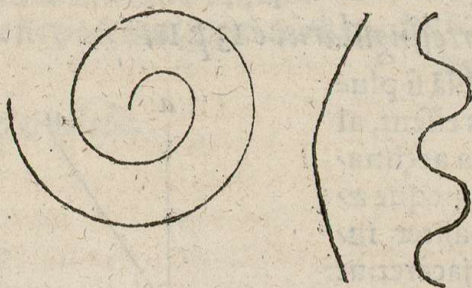
summo,

*Linea sphaerica obliqua
in sphaerico*

summo, quæque ideo Aristoteles 10 cap 8. Phys. nominat rotundi principia.

9. *Helix est quæ distat inæqualiter à medio utcunque comprehensi spatii.*

Hæc autem tortuosa linea *ἑλικοειδής* Proclo dicitur, at helix etiã dici potest, cujus var-
riæ species sunt, ut Arithmetica quæ est
Archimedæ helix, ut cõchois, ut cittois:
quæ in geometria suos postea authores
habuerunt Archimedes, Nicomedem,
Geminum. Linea autem *τετραγωνίσουσα*
(cujus ope circulus quadratur) & ad-
mirabilis, celebrantur: *τετραγωνίσουσα*
Dinostrato, Nicomedî, Hippia. Pap-
pus initio tertiî & Proclus 9 p 1 attribu-
unt. Pappus admirabilem attribuit Me-
nelao: Conicæ verò ellipsis, hyperbole, parabole, quales hic sunt, attribuuntur



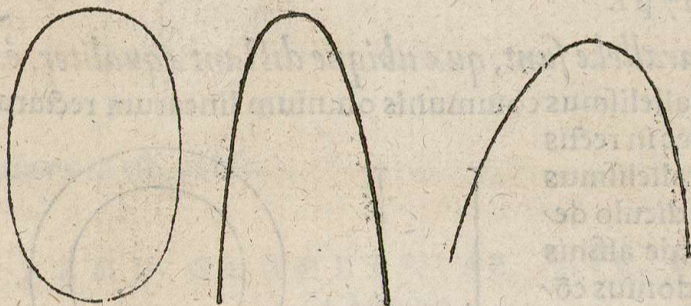
Pappus

Menechmus

Apollonius

Menechmo.

Apollonius
eas libris 8
complexus
est, quas o-
mnes mistas
lineas, ut ex-
plicatu enu-
meratuq; dif-
ficiles Eucli-

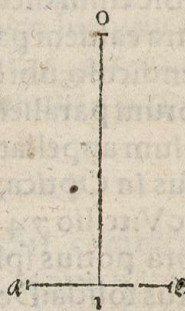


des prætermisit, ait Proclus ad 9 p 1.

10. *Lineæ inter se rectæ sunt, quarum altera in alteram incidens æ-
qualiter interjacet: obliquæ contrâ. é 10 d 1.*

Adhuc affectiones unius & solius lineæ fuerunt rectitudo & obliquitas: dua-
rum inter se affectiones sunt perpendicularum & parallelismus, qualescunq; sint
rectæ vel obliquæ: perpendicularum primo definitur generaliter.
Sic duæ rectæ in plano perpendiculares sunt. Vt æ & 10. Sic duæ
peripheriæ in spherico erunt perpendiculares, quando altera
in alteram incidens æqualiter interficebit, nec quoquam incli-
nabit. Sic recta peripheriæ perpendicularis fuerit, si incidens
neutro acclinet, sed æqualiter interjaceat. Denique ut de pri-
mo & composito numero, primisq; inter se & compositis inter
se numeris dictum est, duos primos esse primos inter se, item
duos primum & compositum, denique cõpositos ipsos posse
inter se primos esse: sic duæ rectæ possunt esse rectæ inter se, sic
item recta & obliqua, denique obliquæ duæ. Atque omnino lineæ inter se rectæ
& perpen-

Lineæ rectæ vel obliquæ
affectiones inter se sunt per-
pendicularum & parallelismus



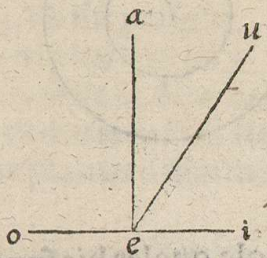
b 2

& perpen-

& perpendiculares pro eodem dicuntur, & à perpendiculo linearum perpendiculum superficierum sumitur, ut patebit postea. De corporum perpendiculo nullum est in elementis verbum, attamen etiam corpus rectum corpori iudicatur per lineam perpendicularem. Itaque

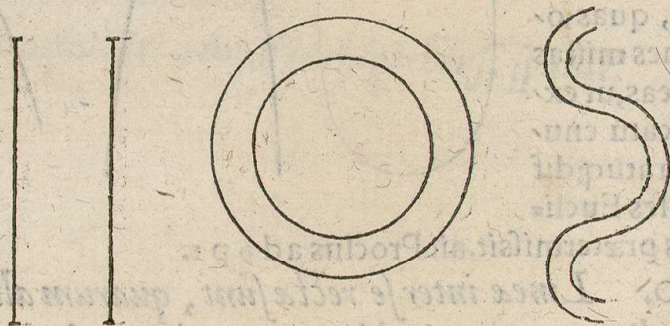
Si recta est perpendicularis rectæ, est ab eodem termino & eadem partesingularis. é 13 p II.

Nā si plures essent, altera acclineret, neque æqualiter interjaceret: ut hic vides in rectis *ae, io, e u.* Procius ad 17 p I.



II: *Lineæ parallele sunt, quæ ubique distant æqualiter. é 35 d I.*

Sequitur parallelismus communis omnium linearum rectarum & obliquarum: ut hic vides in rectis & obliquis. Parallelismus autem è perpendiculo derivatur, & ei valde affinis est. Itaque Posidonius cōmuni perpendiculo definiebat parallelismū: quævis nostræ definitionis est. Et sic Euclides circulo inscriptarum à centro æquidistantiam metitur æqualibus perpendicularis, 4 d 3. Sic etiā ad rem multo propius Euclides idem metitur parallelorum altitudinem & distantiam 4 d & 1 p 6: Sic enim dicuntur 1 p 6 æque alta, quæ 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41 p 1 dicuntur esse intra easdem parallelas. Sic 6. 8. 14 p 11 diiudicat parallelismum communi perpendiculo; ubi & parallelismus superficierum erit è parallelismo linearum. Corporum parallelismus in elementis nusquam appellatur, sicuti neque perpendiculum appellatum est. Est tamen & quidem è parallelismo linearum, magnicq; usus in Optica, Mechanica, pictura, architectura per lineas nempe parallelas. Sic Vitellio 74 p 1 sphaeras parallelas appellat, sed sphaeras concentricas, & corpora potius spherica quàm sphaeras. Nam cava sunt intus illa corpora, non penitus solida: Denique sic appellat sphaeras parallelas, uti peripherias concentricas parallelas diceret. Parallelismus igitur, ut è definitione patet, est linearum, indeq; ad superficies & corpora, ut rectitudo & obliquitas & perpendiculum transfer-



Posidonius

Lineam à centro ad arcum
cylindri distinetur angulus
transversum parallelismum

Æquidistantia cylindri
inter easdem parallelas

prismatis
Sphaera cum concentricis
parallelis

transfertur: secus si quid dicitur, sensus tamen huc respicit, ut cum Vitellio ad definitiones 61 & ad 49 p 6 dicit lineam rectam esse parallelam sphaerae, intelligit quando est parallela rectae sphaeram tangenti, & sic rectarum inter se etiam parallelismus est: non est vero praetereunda etymologia παραλλήλων. Nam παραλλήλα contra se, & e regione posita dicuntur, saepeque authores sine compositione sic usurpant. Sic Aristoteles appellat χαμμήν παρά τήν χαμμήν pro lineis parallelis lineam contra lineam. Quomodo & Euclides loquitur ad 10 & 15 p 11, & multo sapius in opticis: sic in Datis, & sic post Euclidem Archimedes & Apollonius loquuntur. Itaque

Lineae eidem parallelae sunt inter se parallelae.

Hoc elementum proponitur specialiter de lineis rectis, & demonstratur 30 p 1. At per additionem aequalium distantiarum aequalis distantia nota est, ut hic.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. III.
de Angulo.

Lineatum est magnitudo plusquam longa.

Nova doctrinae forma coegit novis uti plerumque vocabulis, praesertim in partiendo, ut ad logicam perfectioris partitionis legem dichotomia teneretur. Itaque magnitudo bisecatur in lineam & lineatum, & lineatum genus erit superficiei deinceps & corporis: lineatum quippe, in quo lineae sint. Possunt enim duci lineae in superficie, quod proprium est linearum solum, possunt in corpore, ut diameter in prisma, axis in sphaera, omninoque sublimes linea. Ideoque Proclus ad 4 d 1, item 12 & 35 p 1 lineas facit alias planas, alias solidas. Sic conicae lineae, ellipses, hyperbole, parabole, solidae vocantur, quia oriuntur e corporis sectione.

Linea ducta in corpore

*Linea plana
solida seu conica
ellipsi
hyperbola
parabola*

2. Lineati est angulus & figura.

Communes affectiones magnitudinis fuerunt terminari, secari, commensurari, congruere, adscribi: deinde lineae dirigi, obliquari, tangi, converti, torqueri, quae omnia etiam in lineato sunt per lineam. Lineati est angulari & figurari. Angulus porro & figura in tota ratione geometricarum rerum utramque:

b 3. fere par

Magnitudo terminata, secata, commensurata, congruit adscribitur.

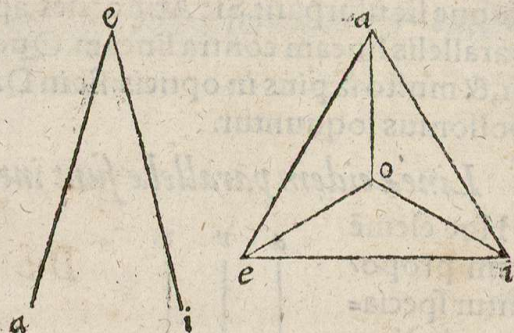
Linea dirigitur, obliquatur, tangitur, convertitur, torquetur

Lineatum angulari & figurari

fere paginam faciunt. Itaque diligenter utrumque considerandum est.

3. *Angulus est lineatum in communi sectione terminorum.*

Sic angulus superficiarius est superficies in communi sectione duarum linearum, sic angulus solidus est corpus in communi sectione trium minimum superficierum. Sic angulus $a ei$ superficiarius est. sic angulus comprehensus à tribus superficiebus $a oi, io e, a oe$ solidus est, neque superficies duarum dimensionum una recta linea, neque corpus trium dimensionum duabus superficiebus saltē planis terminatur. Hæc generalis est definitio anguli, qui totis mathematicis tractatur, ubi angulus bisecatur, ubi æqualis major, minor instituitur. Hæc (inquam) generalis est definitio anguli, quæ quantum negotii veteribus mathematicis exhibuerit, ostendit ipsorum inter ipsos cōtroversia apud Proclum 8 d 1. Carpus angulum definiebat intervallum sub inclinatione terminorum ad unum. Apollonius & Plutarchus Carpum sequebantur, illud (ad unum) interpretati primum. Proclus præceptorem Syrianum (opinor) sequutus licet verbo longissime ab iis dissentire videatur, tamen re ipsa huc accedit, dum angulum superficiarium definit superficiem in uno signo ab inclinatis lineis collectam, solidum ab inclinatis superficiebus. His igitur authoribus angulus definiatur lineatum in communi sectione terminorum. Carpi vero ad unum, Apollonii & Plutarchi primum intervallum erat adversus elenchum, ne totum lineatum ubique angulus esse diceretur, sed tantum in ipso communis sectionis puncto, ubi terminatur ab inclinatis terminis. Euclides 8 d 1 & 11 d 11 definit angulum inclinatione linearum, in quo reprehenditur à Proclo. Causa dicetur in scholis.



4. *Crura anguli sunt termini comprehendentes angulum.*

Crura *quædam* dicimus basi anguli insistentia, quæ in triangulo æquicruro tantum nominavit Euclides, latera alias appellat. At proprietas ut rei, ita sermonis placet. Sic in exemplis positis duæ lineæ sunt ea, ei crura superficiarii anguli: sic superficies tres $a ei, ie o, a eo$ sunt crura anguli solidi. Itaque crura angulantia sunt lineæ, aut superficies: angulata autē lineata sunt superficies aut corpora.

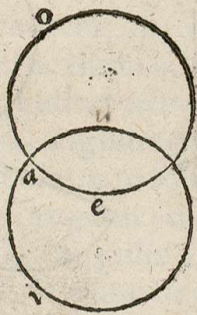
5. *Anguli homogenei sunt anguli cruribus & crurum concursu genere iidem.*

Itaque homogenia ista duplex est, prima crurum, secunda concursus: sic anguli recti rectilinei sunt homogenei inter se. Recti autem rectilinei rectis obliquilineis sunt heterogenei, sic non omnes obtusi omnibus obtusis, nec omnes acuti omnibus acutis homogenei sunt: nisi adsit homogenia & crurum & concursus. Lunularis systroidi & pelecoidi crurib. est homogeneus: quilibet enim comprehenditur à peripheriis: lunularis altera concava, altera convexa, uti $a e$: systroides

Anguli recti rectilinei sunt homogenei inter se
Recti autem rectilinei obliquilinei sunt heterogenei

Systroides ab utraque convexa, ut *40*: pelecoides ab utraque concava, ut *41*.

Lunularis tamen concur-
su est heterogeneous systro-
idi & pelecoidi. Itaque
& absolute heterogene-
us. Hæc igitur distinctio
præcedat ad distinctionē
sequentium. De homo-
geneis igitur angulis for-
lis sequentia sunt, ne sæ-
pius idem verbum repe-
tatur.



DE HOMOGENEIS ANGVLIS

6. Anguli cruribus congrui sunt æquales.

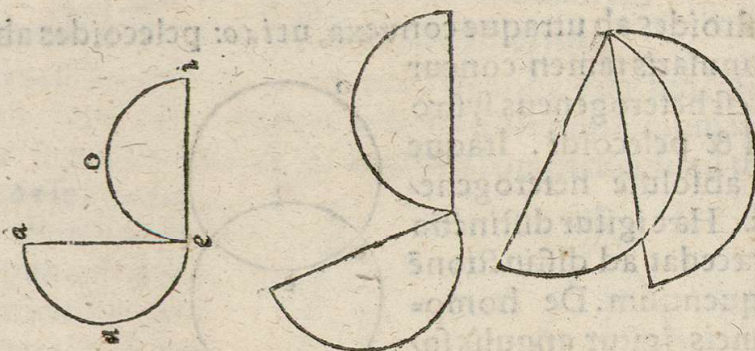
Hoc axioma prætermis-
sum in elemētis geometricis magnas obscuritates pe-
perit: bene autem & ex ordine constitutum permagnam lucem afferet. Est igitur
ē prima illa *ἐφαρμογή* luce. Nam si bis bina crura congruant, non quatuor, sed
duo crura erunt: neq; tam duo anguli æquales quam angulus unus. sed enim
axioma istud æqualium angulorum jam olim in scholis mathematicis agitatū
est, ut patet ē Proclo ad 4 p 1. Illic enim sic loquitur Proclus: Angulus rectiline-
us rectilineo æquatur, quando crure altero alteri superposito reliquum reliquo
congruit, cum reliquum crus cadit extra, angulus est major extra cadentis cru-
ris: cum vero cadit intra, minor: illic enim comprehendit, hic comprehendit-
tur. Angulorum igitur rectilineorum æqualitas sumetur secundum congruen-
tiam crurum in rectilineis: item in cæteris omnibus, qui sunt *ὁμοειδῆς* ejusdem
speciei. Hic igitur Proclus affirmat æquales angulos, quorum crura applicata
congruunt, quod nostrum axioma est, & *ὁμοειδέων* notat, quam diximus *ὁμογέ-
νεια*. Veritas autem axiomatis huius est ē congruentiæ axioma. Quia duo li-
neata hic unum est *ἐφαρμογή*. Itaque axioma istud illinc erit immensæ quidē lu-
cis & utilitatis. Nam mäteries 4.5.6.7.8.9.10.11.12.18.19.21.23.24.25.26 p 1 ex
ista generali luce lucem accipiet, & si de pyramide in solidis similia docerentur,
indidem lucem etiam caperent. Ergo quod generale & commune est tam mul-
tis elemētis, præponitur, quod speciale est, hinc postea derivatur facilitate
prorsus admirabili, si quis myriades syllogismorum Euclideanorum & directē &
per impossibile concludentium cum brevibus consecrariis nostris comparet.
Congruentia tamen & æqualitas angulorum non reciprocantur. Nam recti-
lineo recto lunularis æquari potest, ut Pappus apud Proclum in axioma de
angulis rectis docet: ut hic vides.

proli axioma

>> Non om̄ æqualia
congruunt.

Nam an-

Nam anguli semicircu-
lorum æqualium $i e o$
& $a e u$ æquantur, quod
ex p^{re}cedentis ostendet: cō-
munis est angulus $a e o$
recto $a e i$, & lunulari
 $a u e o$: addatur igitur
utriq; cōmunis $a e o$ æ-
quabitur rectus $a e i$, lu-
nulari $a u e o$. Potest ve-
ro & idem lunularis e-



quari obtuso & acuto, ut idem argumentum demonstrabit.

Itaque

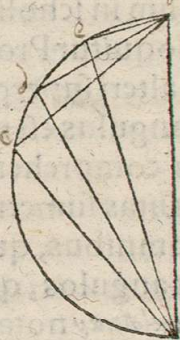
1. Si angulus angulo æquicrurus æquatur basi, est æqualis, & si est æ-
qualis, æquatur basi. ex 8 & 4 p 1.

Nam cruribus erunt congrui, & basibus item congrui.

Et

2. Si æqualis basi est æquicrurus, æquatur. *Non contra.*

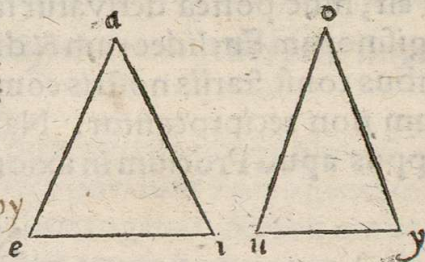
Nam congruen-
tia eadem est: non
tamen si æquales
æquatur basi, sunt
æquicruri, ut in an-
gulis in eadem se-
ctiōe apparebit, ut
hic: & sic ē duabus
æqualitatibus pri-
ma reciprocatur, se-
cunda non item.



Et

3. Si angulus angulo æquicrurus est major basi, est major, & si ma-
jor, est major basi, ē 25 & 24 p 1.

Vt
hic
major
basi q̄
non

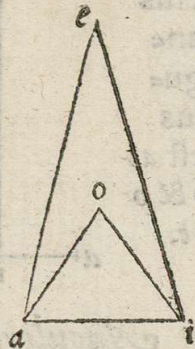


Et

4. Si æqualis basi est minor interioribus cruribus, est major.

Vt hic interior $a o i$ est major exteriore $a e i$: interioribus autem additur ne-
cessario:

cessario: secus apparebit error in illa sectione. Ex eodem illo congruentiae axioma, hæc rursus omnia deducuntur, quod Proclus ad 8 p 1 luculenter exposuit. Videtur autem (ait) æqualitas crurum & basium facere æqualitatem verticalium angulorum. Neque enim si bases sunt inæquales, æqualitas crurum eosdem angulos relinquit: At si minor sit basis, angulus decrescit: si major, augetur: neque si bases sunt æquales, crura inæqualia: angulus manet: at dum imminuuntur, augetur: dum augentur, imminuitur: Cōtrarium enim accidit angulis & angulorum cruribus.



10 Nam si crura in eadem basi deorsum depressa cogites, ipsa quidem minuis, eorum vero angulum auges, maioremque ipsorum inter ipsa distantiam facis: Sin cogites sursum erecta atque aucta, angulum minuis. Quanto enim amplius coincidunt, tanto magis à basi vertex removetur. Quare certum sit affirmare, quod basis eadem & crura æqualia definiunt æqualitatem angulorum. Hic Procli locus facit æquales angulos æqualitate crurum basiumq; ut anguli sint æquales, qui crurum æqualium bases habent æquales. Nam homogenea æqualitas crurum est ipsa congruentia, sed à Proclo homogenia prætermittitur, sine qua tamen consecrarium falsum sit. Quare axioma congruentiae præponimus, & ex eo consecrarium hoc, sed emendatum deducimus. Veruntamen ad ejus consecrarii constantiam commentarii veterum è Proclo non sunt potius excutiendi, quam Euclides ipse ad 23 p 1 & 26 p 11 attendendus: cum ex hac æqualium angulorum materia nō consecrarium postulat, sed demonstrabilē propositionē duplicem de rectiterminis angulis facit. Interroga nempe Euclidē ad 23 p 1, quomodo dato angulo rectilineo æqualē facturus sis, respondebit, si crurum æqualium bases æquaveris: idemque ad 26 p 11 de solido angulo plano Euclides profitetur. Itaque Euclidē magna gratia pro tanto beneficio à geometris debeatur: unde licebit magnā postea variarū propositionum familiam derivare, neque vereamur ne objiciatur hoc axioma ab Euclide demonstrari. Nullo enim antecedente elemento utitur Euclidis demonstratio, quod postulandum non fuerit, ut illic intelligetur, & tamen materies ex axioma protinus postulanda fuerat. Itaque & nos postulavimus, & fabricam tamen interea æquandi anguli non minus geometricam retinemus, sic de problemate maledubitato αἰτῆμα per se indubitatum facimus. Oenopides aut problematis de æquando angulo primus author à Proclo efficitur, de cuius inventis in proœmio dictum est. Itaque

5. Si dati anguli cruribus ad datum punctum crura homogenea æquetur æqua basi, æquabunt angulum dato. è 23 p 1. & 26 p 11.

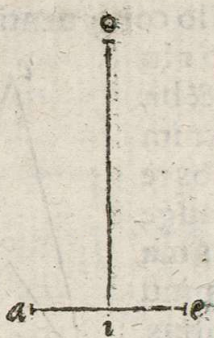
7. Angulus est rectus vel obliquus.

8. Rectus cujus crura sunt inter se recta, obliquus contra.

c

Rectus

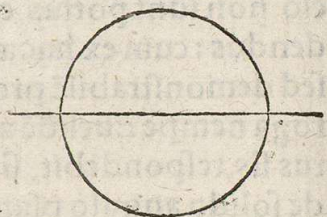
Re-
ctus
an-
gu-
lus
est at
o & o
i.e.



Itaque

Anguli recticruri recti sunt aequales.

Axiomata de aequalitate angulorum tria jam fuerunt, unum generale, duo consecretaria: Hic de aequalitate rectorum angulorum speciale prae-
rea unum est. Angulos homogeneos recticruros, id est quorum crura sunt
recta, ut linea recta, ut superficies plana (hoc enim verbum nobis conce-
datur) rectos aequales esse: sic anguli rectilinei recti propositi sunt aequales:
sic anguli solidi plani recti, ut in cubo, sunt aequales. Axioma igitur commune
potest esse etiam de solidis angulis modo recticruris: quia non omnes semicir-
culares recti omnibus semicircularibus rectis sunt aequales: ut hic cum diameter
sit continua perpendicularis est, & facit bis binos intus
forisque externos aequales inter se, & interiores aequales
inter se, sed externos interioribus inaequales, & maioris
semicirculi angulus major est angulo minoris. Neque o-
mnino affectio reciproca est, ut omnes anguli aequales
sint recti: possunt enim obliqui inter se aequari, & potest
obliquus aequari recto, ut lunularis rectilineo, ut patuit.
Obliqui anguli definitio est crurum obliquitate intelligi-
tur: unde etiam patet angulum obliquum inaequale esse
recto homogeneo: neque ulla lege obliquos angulos aequari: quia infinite ob-
liquitas augeri minuique potest.

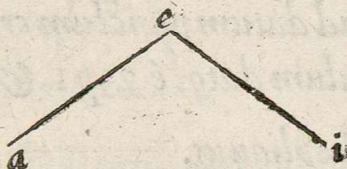


9. *Angulus obliquus est obtusus aut acutus.*

Obliquitatis alia differentia fuit in linea, peripheria nempe & helice, hic alia
dichotomia est obtusum & acutum, quae differentia propria est angulis, unde
alio transfertur: ut ingenium obtusum, acutum, & similia.

10. *Obtusus est obliquus major recto. II d. I.*

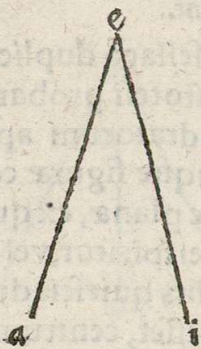
Vt hic a ei. Intelligi-
tur in definitione ge-
nus speciei utriusque:
Nam rectus rectiline-
us est major recto
sphaerico, neque ta-
men obtusus est: hac autem major inaequalitas infinite potest augeri.



II. *Acutus*

II. *Acutus est obliquus minor recto, 12 d1.*

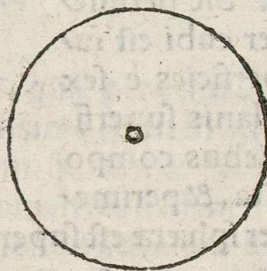
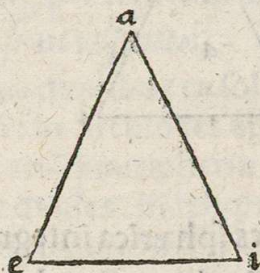
Vt aei. Hic genus idem intelligatur, quia non omnis angulus minor quolibet recto, acutus est: nam rectus semicircularis & sphericus minor est recto rectilineo, neque tamen est acutus.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IIII.
de figura.

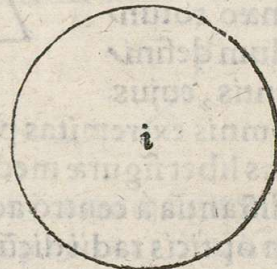
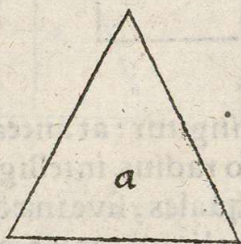
Figura est lineatum undique terminatum.

Sic triangulum aei est figura, quia est planum tribus lateribus undique terminatum. Sic circulus est figura, quia est planum una peripheria undique terminatum. Sic 14 d1 figuram cum definit Euclides, quod ab aliquo, aut ab aliquibus terminis comprehenditur, lineam figuram non facit, cum linea duobus tantum punctis ad extrema duo terminetur, neque longitudo sola expressa latitudinis potest in latum terminari. Figura itaque lineatum tantum est, sed sequentia figurae generatim in superficie & corpore rem totam declarabunt.



2. *Centrum est punctum in figura medium.*

In figura parte aliqua spectantur centrum, perimenter, radius, diameter, altitudo. Centrum igitur est punctum in medio figurae: sic in triangulo, in quadrate, in circulo centrum est a, e, i. Centrum videtur Euclides 16 d1 & 16 d11 rotunda figurae propriè attribueret, quomodo & Apollo oraculi sui carmine definivit,



Κέντρον ὃν ὅς πᾶσαι μέγεις ἀπὸ τοῦ ἰσίου ἐσὶν.

Centrum à quo omnes usque ad oram æquales sunt.

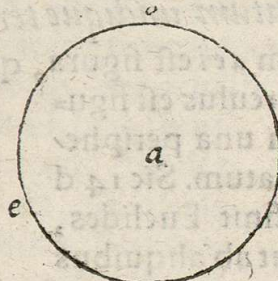
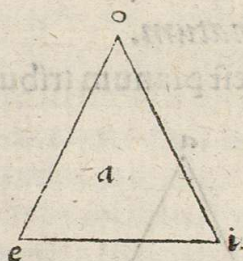
Verum ne hic Apollo quidem, quamvis deliaco duplicandī cubi problema te mathematicus haberi voluerit, tamen Aristoteli probaretur generale specialiter definiendo. Nam 3 & 4 p 15 centra quadratorum appellantur, item 4 p 15 centra triangulorum, quomodo cujuscunque figuræ centra dicentur: & cētrum gravitatis dicitur in omni magnitudine plana, ex qua suspensa est parallela horizonti: ut ex Archimede & Eutocio perspicitur, vel (ut Pappus ait 8 theor. 8 lib) est punctum à quo suspensum pondus quiescit dum fertur. Itaque si lamina aliqua partibus omnibus æque gravis esset, centrum idem esset magnitudinis & gravitatis.

3. Perimeter est comprehensio figuræ.

Hæc definitio est nominis græci. Ergo perimenter trianguli est una ē tribus lineis composita linea: ut à Proclo dicitur 4 p 1. sic trianguli perimeter est eio.

Sic perimenter circuli est peripheria, ut in ei

o. Sic perimenter cubi est superficies ē sex planis superficibus composita, & perimenter sphaeræ est superficies sphaerica integra, ut postea patebit.



ter sphaeræ est superficies sphaerica integra, ut postea patebit.

4. Radius est recta à centro ad perimetrum.

Ut in sub-

jectis figuris

ae, ai, ao, an,

radius est

verbum Pla-

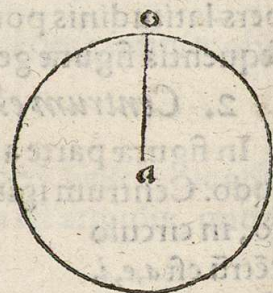
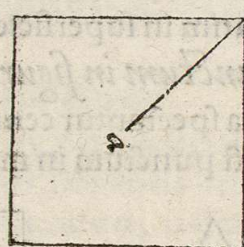
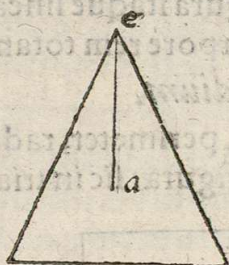
tonis in Ti-

mao rotun-

dum defini-

entis, cujus

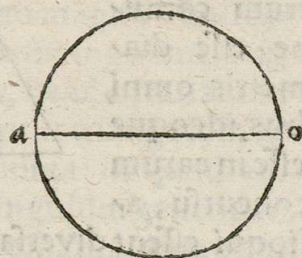
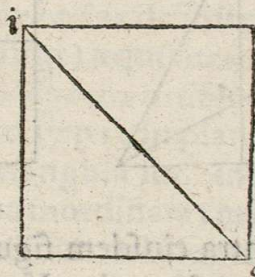
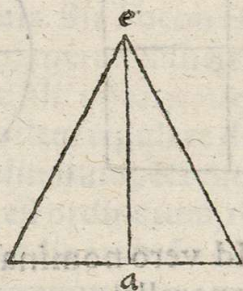
omnis extremitas paribus à medio radiis attingitur: at antea centrum pro cujus libet figuræ medio sumptum est. Sic modo radius intelligatur pro qualibet distantia à centro ad perimetrum, sive sint æquales, sive inæquales: quomodo in opticis radii dicuntur à visibili tanquam ab aliquo centro, quo quoque versus rectis lineis agi. In geometricis elementis radii nomen nusquam est, sed periphra-
sis perpetua. Quæ ex centro, cum de circulo agitur.



5. Diame-

5. *Diameter est recta inscripta figurae per centrum.*

Utin sub-
fectis figu-
ris a e, a i, a o.
Diameter
est recta li-
nea in circu-
lo ad 17 d 1:
in paralle-
logrammo



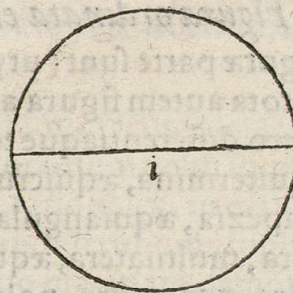
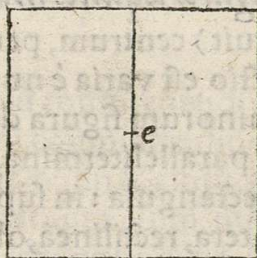
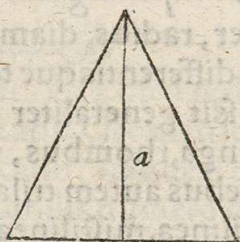
ad 34 p 11: in sphæra ad 17 d 11: in prismate ad 39 p 11. Diameter trianguli etiam
similiter est, & omnino cuiuscunque figuræ, quia ut antea dictum est, figuræ
cuiuscunque centrum est, tamethi & centri & diametri nō proinde facilis sit in-
ventio. Diagonus autem dicitur, quando terminatur oppositis angulis, ut
28 p 11, ut in demonstratione 39 p 11. sed in planis & rectilineis proprie. Nam
potius in solidis axis dicitur, ut patebit postea: ut vero ex infinitis per totam
figuram punctis unicum centrum est, sic ex inæqualibus lineis infinitis per to-
tam figuram ea sola diameter est, quæ per centrum transit. Itaque

1. *Diametri in eadem figura sunt infinitæ.*

Diameter quamvis ex infinitis inæqualibus ea sola sit, quæ per centrum, at-
tamen per centrum varia esse potest: in circulo res apertissima est, ut in astrola-
bio index volvi potest per omnia puncta peripheriæ: sic in sphæra & rotundis
res facilior est, ubi diametri sunt æquales, in reliquis tamen res eadem: quia
diameter est recta per centrum inscripta, utrum ad angulos an ad latera termi-
netur, nihil interest. Itaque diametros infinitas in eadem figura esse, est e dia-
metri definitione. Et

2. *Centrum figuræ est in diametro.*

Uthic
vides
a, e, i.
Hoc
est e
dia-
metri
defi-
nitio



ne. Nam quia diameter inscribitur figuræ per centrū, ideo centrum figuræ in di-
ametro esse necesse est: id præcipue assumit Archimedes 9.10.11.13 th.1. Isorro.

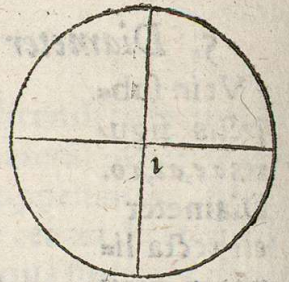
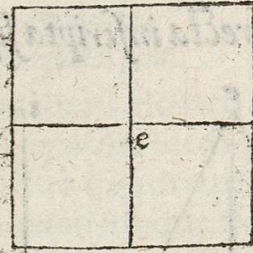
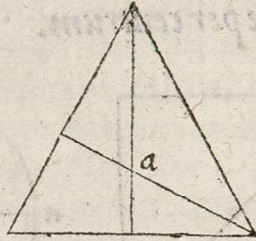
Et

3. *In concursu diametrorum.*

Hoc item est ex eadem definitione diametri, ut hic. Nam cum diameter quæ

c 3. libet sit:

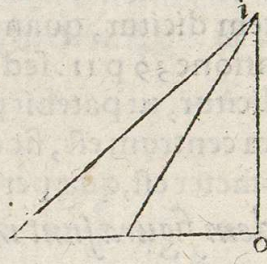
libet sit per
centrum, ne-
cesse est cen-
trum cōmu-
ne esse dia-
metris omni-
bus, ideoque
esse in earum
concurſu, a-



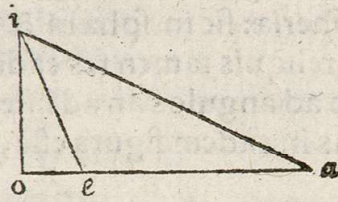
lioi qui essent diuersa centra eiusdem figuræ. Id vero nominatim Archimedes proponit in Isorropicis 8 & 12 th. 1 Isorr. de parallelogrammis & triangulis præcipiens.

6. *Altitudo est perpendicularis à vertice figuræ ad basim.*

Vt in subjectis figuris sunt ae , io , uy vel sr . Hæc definitio ita generalis est in Euclide 4 d 6, cōmunis in plano rectilineis & circulis, in solido pyramidibus, prismatis, sphaeris, conis, cylindris, cōmunis denique omni figuræ: nec vero interest



utrum basis eadem sit, an longius continuata, ut in triangulo, obtusangulo, cū ba-
sis est
ad ob-
tusum.
Vt hic
in tri-
angulo aei est ao .



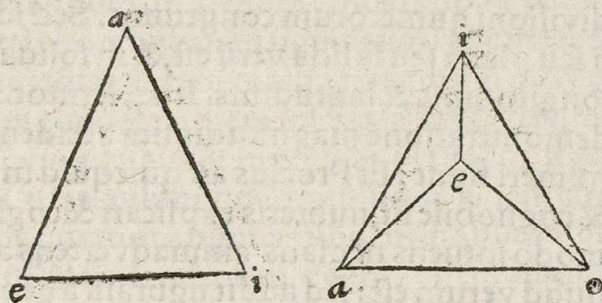
7. *Figura ordinata est figura æquitermina & æquiangula.*

In figuræ parte sunt (ut patuit) centrum, perimeter, radius, diameter, altitudo. In tota autem figuræ affectio est varia è numero differentiaque terminorū: à numero differentiaque terminorum figuræ dici possit generaliter rectitermina, æquitermina, æquicrura, parallelitermina, oblonga, rhombus, rhomboides, trapezia, æquiangula, rectangula: in superficiebus autem trilatera, quadrilatera, multilatera, æquilatera, rectilinea, obliquilinea, mistilinea: in solidis tetraedra, pentaedra, polyedra, plana, sphaerica, conica, cylindracea: à numero differentiaque angulorum in superficiebus triangula, quadrangula, multangula: in solidis similis differentia nominari non solet, quamvis tamen insit. Hæ verò differentia aut suis nominibus intelliguntur, aut speciatim per suas species intelliguntur. Tres igitur affectiones generales hic videntur definiendæ: figuræ ordinatio, primatus, & ratio. figuræ verò ordinatæ definitio nomina-
tim non

tim non est in elementis Euclidis, attamen ex 25. 26. 27. 28. 29 dⁱ sumi potest, ubi adhibentur ad ordinatorum corporum definitionem plana, æqualia, æquilatera & æquiangula. Sic Theon *τεταγμένον σχῆμα* definit primo magnæ constructionis: (cum de planis rectilineis loquitur) æquilaterum æquiangulum. Pappus autem & græci alii vocant *τεταγμένον σῆμα* ordinatum, benè ordinatum: Campanus pro eodem regulare dixit ad 17 p 13. In planis igitur triangulum æquilaterum est ordinatum, & reliqua triangula sunt inordinata: in quadrangulis quadratum est ordinatum, reliqua inordinata: multangulum generis cuiusque potest esse ordinatum. In obliquilineis circulus est ordinatus, quia æqui-
 terminus, cum terminus pro terminis innumerabilibus unicus & singularis sibi ipsi præcipuè sit æqualis, quia æquiangulus; cum (licet reipsa nullus insit angulus) par tamen & æqualis utique sit inclinatio & velut angulus peripheriæ sibi ipsi semper æqualis: unde Platoni ac Plutarcho circulus dicitur polygonia, & Aristoteli *ὁληγωνία* totus angulus. In mistilineis nihil est ordinatum: in solidis, & pyramidibus tetraedrum est ordinatum; è prismatis cubus, è polyedris tria tantum octaedrum, dodecaedrum, icosaedrum: In obliquilineis sphaera est ordinata eodem argumento quo circulus.

8. *Figura prima est figura in alias simpliciores figuras individua.*

Sic in planis prima est triangulum, quia in simplicio-
 rem figuram dividi non potest, quamvis multis modis dissecari possit: sic in solidis pyramis prima figura est, quia in simplicio-
 rem corporis figuram dividi non potest: licet in alias innumerabiles possit dividi: à triangulo autem omnia plana oriuntur, ut à pyramide corpora, quales figurae sunt *aei, aeio*.



9. *Figura rationalis est quæ comprehenditur à basi & altitudine rationalibus inter se.*

Sic Euclides 1 d 2 dicit rectangulū comprehendī à duabus rectis inter se, quip-
 pe multiplicatis. Geometrica enim comprehensio est interdum velut in numeris multiplicatio. Itaque si dederis basim & altitudinē rationales, ut earum ratio sit explicabilis numero datae mensuræ, tum numeris laterum multiplicatis explicabitur magnitudo figuræ. Generis huius definitio materiam demonstrabilis propositionis Euclidī præbuit, 20 p 10 de rectangulo rationali: At materiam principii præbere debuit, ut præbuit 16. 17 d 7 in definiendo plano & solido numero. Tales enim numeri significant figuras rationales explicabiles numero, & numeri multiplicati inter se facientes numeros illos planos, solidosq;
 latera figurati numeri dicuntur ab Euclide in illis definitionibus. Figura itaque rationalis sit duobus rationalibus lateribus inter se multiplicatis; & per synec-
 dochem

dochen ita figura unica dicitur rationalis, per latera nempe rationalia, tales figurae tandem erunt in planis parallelogrammum rectangulum, in solidis rectis prisma & cylindrus, unde reliquarum omnium figurarum ratio & mensura capiatur.

Itaque

Numerus figurae rationalis figuratus dicatur, & numeri unde fit, latera figurati.

Et specialibus nominibus plani, quadrati, solidi, cubi quibus Euclides utitur, generale figurati nomen hic factum est, & analogia eadem numeros factores figurati, lateratos dici conveniebat: latera tamen dicta sunt Euclidi, neque tropum mutari necesse est. Geometria vero sui & generis & juris magnam quidem partem est, neque aliter quam geometricè tractabilis: attamen parte quaedam numeris associatur, & iis explicatur, numerique geometricarum affectionum interpretes geometricis vocabulis appellantur (ut dixi) planus, quadratus, solidus, cubus à geometrico plano, quadrato, solido, cubo: quorum umbræ quaedam tales numeri sunt. Sic Euclides ait sed specialiter 19 & 20 p 10 rectangulum comprehensum à rectis longitudine symmetris esse rationale: & si rationale ad rationalem comparatum sit, latitudinem efficit rationalem & symmetram basi: ut si rectangulum comprehenditur à basi 4 & altitudine 3, erit rationale nempe 12, & rectangulum rationale ut 12 comparatum sit ad basim rationalem 4, facit latitudinem rationalem nempe 3: Quæ leges multiplicationi & divisioni numerorum congruunt. Sed id generaliter de quavis figura rationali seu plana seu solida verum est, & in solida basis sumitur pro duplici dimensione longitudinis & latitudinis. Itaque Aristot. generaliter ait 7 c 1 Post. arithmetica demonstratione magnitudinum accidentibus convenire, cum magnitudines numeri fiunt: Et Proclus ait quicquid in geometria *παρὰ τὴν γεωμετρίαν* explicabile & cognobile sit, numeris explicari & cognosci. Sed Proclus idē huc nescio quomodo intuens nec satis animadvertens ait figuram esse propriam geometriæ, quod verum est: sed addit figuram à geometriā ad arithmetica *κατὰ ἀναλογίαν* pervenire. Analogia igitur ista mathematicos omnes & græcos & latinos decipit, ut figurarum numerorum doctrinam arithmeticae attribuerent, eo moti fortasse, quod videatur multiplicatio (quæ propria est arithmeticae) omnes talium figurarum affectiones explere, sine continuitate, sine contactu, sine angulo, sine situ, id est sine magnitudinis affectione. Verum magna differentia hic est. Multiplicatio enim arithmetica est unitatum, ut 4 per 3 facit 12 unitates: at cum lineam 4 pedum ducis angulo recto secundum lineam 3 pedum, facis non lineam 12 pedum, sed superficiem planam 12 pedum quadratorum, aliudque omnino est generis arithmetica, aliud geometrica: principiumque numeri est pars numeri, principium magnitudinis non est pars magnitudinis. Itaque rerum quidem magna hic dissimilitudo est, verborum autem sola similitudo: ac licet figurarum & planarum & quadratarum item solidarum & cubicarum quædam affectiones numeris explicentur, non tamen omnes explicantur. Neque enim quadratum vel cubum arithmetica duplicare potest, quod utrumque tamen geo-

men geometria proficitur. Neque vero geometriæ corpus suis membris constabit, si præcepta de planis & solidis numeris ad arithmeticam referantur, & absurdum fuerit species figuræ in arithmetica præcedere, genera in geometria sequi. Denique usus geometricus disceptator & iudex controversiæ hujus esto, quem in figuratis numeris extra geometricas figuras, nullum deprehendes, & talis arithmetica quædam consequentibus artibus specialis accommodata est in sonis, in astris: ut arithmetica hic geometrica, illic musica, istic astronomica dici possit, absolute arithmetica nequaquam, quæque extra geometriam, musicam, astronomiam inutilis esset futura. De planis itaque & solidis numeris tanquam planarum & solidarum figurarum adjunctis umbris in geometria suo loco præcipiendum fuit, & iis numeris utendum quoties magnitudines numeri fient, ut vere Aristoteles monuit, nec heterogenia hic erit, cum superioris & altioris doctrinæ usus in subalterna & inferiore doctrina adhibebitur.

IO. *Figuræ Isoperimetrae sunt figuræ æqualis perimetri.*

Affectiones unius figuræ adhuc fuerunt in ordinatione, primatu, ratione, sequitur duarum figurarum comparatio in ratione, proportionem, similitudinem. Qua si nihil in geometricis rebus præstantius esse dixerem, nihil à veritate (opinor) aberrabo. Axiomata enim sequentia maximam in geometria partem complectuntur, primaque sunt sui quodque generis & antiquissima. Itaque postulanda & exemplis illustranda sunt, ratio est in Isoperimetris. Sic triangulum perimetri 16 pedum est Isoperimetrum triangulo 16 pedum, quadrato 16 pedum, & circulo 16 pedum: nec isoperimetria homogeniam figurarum requirit, sed tantum æqualem ambitum: unde manifestus est error mathematicorum qui figuras isoperimetas definiunt, quæ intra eundem orbem inscriptæ sunt, vel quarum anguli eundem ambitum capiunt, cum æqualis & inæqualis perimetri figuræ in eundem orbem inscribi possunt, & triangulum quadratumque eidem circulo inscripta capiunt illud tribus, hoc quatuor angulis eundem ambitum: neque tamen sunt isoperimetra, & circuli ipsi inter se ad talem definitionem nunquam essent isoperimetri. Definitio illa fuit Omnisanti in Cusani Cardinalis mathematici interpretis, quo errore imbuti postea multi *ψευδογεωμετρικῶν* latissime propagaverunt.

II. *Ex isoperimetris homogeneis ordinatius est majus, ex heterogeneis ordinatis terminatis.*

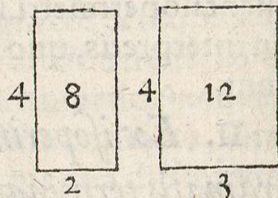
Geometricum axioma de ratione figurarum ex isoperimetria, Theon primo magnæ constructionis reperit à Zenodoro. Idem tractatum plenius est à Pappo quinto libro: & à Proclo propositum in Timæum Platonis: & ad 27 p 1: Archimedis etiam scripta quædam de isoperimetris prædicantur. Ordinatus vero in theoremate intelligatur etiam pro minus inordinato. Sic triangulum æquilaterum erit majus isoperimetro inæquilatero, & æquicrurum vario. sic in quadrangulis quadratum majus non quadrato. sic oblongum ordinatius est majus minus ordinato oblongo. Sic ex heterogeneis ordinatis quadratum ma-

d jus tri-

ius triangulo, & circulus quadrato, quia quadratum est *πολυπλευρώτερον*, & pluribus terminis constat quam triangulum, & circulus quam quadratum. Sic in solidis icosaedrum majus est dodecaedro. Zenodorus in planis *πολυγωνιώτερον* seu *πολυπλευρώτερον* quod in planis idem est: Pappus in solidis *πολυεδρώτερον* majus efficit, quod in solidis non sit idem quod *πολυγωνιώτερον*. Ratio isoperimetricum ea est, ex cujus ignoratione *ψευδογραφία* infiniti per omnes humanæ vitæ partes erroris orta est, Isoperimetra esse æqualia. Hinc enim geodesia in agrorū dimensionibus fraudulenta, hinc geographia in regionibus & insulis mendax & mendosa, cum geographi metiuntur insulas numero dierum, quibus circumcuntur & circumnavigantur. Metire isoperimetris mensuris altera cylindracea, altera cubica frumentum, longe inæqualem capacitatem reperies. sed summa figurarum capacitas & perfectio in isoperimetris ita summam concludatur.

12. *Si figure primæ sunt æquealtæ, sunt ut bases: & contra.*

Ex elementis geometricarum comparisonum primū fuit in ratione isoperimetricarum figurarum: secundum sequitur in proportionē primarum figurarū, aurea vere, si illud primum argenteum fuerit. Proportio numerorum geometrica dicitur in arithmetiis regulis, aurea regula: Hæc vero proportio figurarū in geometricis figuris longe amplissima materia laudis aurea quoque possit appellari: pertinet enim non ad primas solum, sed argumento proportionis ad primarum multiplices. Hoc igitur aurum quanto abundantius, tanto cupidius & avidius excipiendum. Proportio primarum figurarum hic duplex est, prima est directæ in æquealtis. Hoc directum proportionis geometricæ in primis aurum ex arithmetica lege directæ proportionis derivatum est, non est tamen rationale, nec explicabile numero in primis ipsis figuris, sed tantum in earum quibusdam æquemultiplicibus, quæ suis simplicibus sunt proportionales. Elogico proportionis axioma æquemajorum patuit in arithmetiis. Si numerus numeros multiplicet, facti erunt proportionales multiplicatis. Itaque æquealtarū vis explicabilis est in figuris rationalibus. Ut in duobus parallelogrammis rectangulis eadem altitudo 4 duas bases 2 & 3 multiplicet: facta parallelogramma 8 & 12 sunt proportionalia basibus 2.3. Itaque ut 2 ad 3, sic 8 ad 12: Idem erit postea in rectis prismatis & cylindris. In planis parallelogramma sunt duplicia triangulorum: in solidis prismata sunt triplicia pyramidum, cylindri triplices conorum. Hæc (in-



quam) causa propositi axiomatis sic numero explicari potest in multis: quæ tamen antiquior in primis figuris, triangulis pyramidibus, conis est, quam in triangulatis, pyramidatis, conicatis, quamvis numero explicari non possit. Hoc axioma prædicanda per universam geometriam fecunditatis est: Hinc enim propositiones in elementis novēdecim oriuntur 35.36.37.38.39.40.41 p i: 1 p 6.25.29.30.31.32 p ii: 4.5.6.11.13.14 p 12, præter rotundas figuras, ut circulos & sphaeras, in quibus veritas est eadem, si diameter pro basi intelligatur, ut 2 & 18 p 12 Euclides intelligit: item præter innumerabilia consecutaria, quæ per universam

universam geometriam ē i p 6 ducuntur. Hæc (inquam) aurea geometria tam copiosa ex altera primarum figurarum proportionē nobis erit, unde nihil in-
tuendo spatia figurarum, attamen ē solis basibus ratio ipsarum æqualitasque
vel inæqualitas poterit explicari. Conversio autem protinus patet, figuræ pri-
mæ ut bases sunt æquealtæ, nempe cū facti sunt proportionales multiplicatis,
numerus idem multiplicavit.

Itaque

Si sunt in basi æquali, sunt æquales.

Sic triangula, sic parallelogramma, quæ est 35.36.37.38 p 1, quo possunt etiam
referri 39 & 40 p 1. Sic ceteræ figuræ propositæ in æquali basi æquantur.

13. *Si figuræ primæ sunt reciproca basi & altitudine, sunt æquales: & contra.*

Sed jam proportionis geometricæ alterum aurum dicatur in reciprocatione,
prius enim fuit in directa proportionē, & hæc ex arithmetica aurea regula est
proportionis reciproca, sed figuris primis accomodata. Euclides altitudinum
& basium proportionem reciprocationi subiecit, & 2 d 6 reciprocationem figu-
ris tanquam propriam attribuit, & figuras reciprocas ait esse, quando in utra-
que figura sunt antecedentes & consequentes termini, id est quando rationum
termini in utraque figura reciprocantur: sitq; ut primus terminus primæ ad pri-
mam secundæ, sic secundus secundæ ad secundum primæ. Verum reciprocatio
res arithmetica est omnino, ut in arithmetica nostra docuimus. Atque hic con-
sumptæ sunt 14.15 p 6, 34 p 11, 9.15 p 12. Reciprocatio rationalis & explicabi-
lis est numero non in figuris primis, sed in æquemultiplicibus primarum: ut

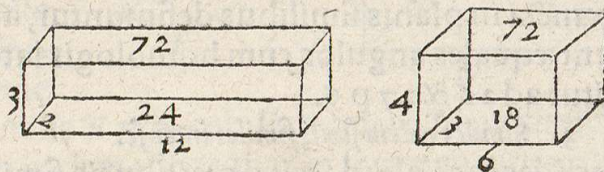
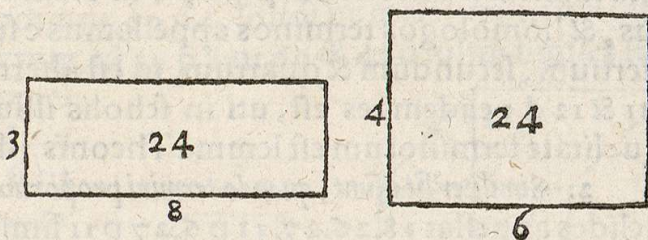
jam prædictum in directa pro-
portionē. ut sunt rectangula pa-
rallelogramma duo inæqualia
basibus & altitudinibus 3. 8.

4. 6. ut hic vides. Proportio reci-
proca est ut basis 3 ad basin 4,
sic altitudo 6 ad altitudinem 8:
& parallelogramma ipsa sunt
æqualia, nempe 24 & 24: Sun-

to solida duo inæqualibus item basibus & altitudinibus (quia hic etiam basis
est pro longitudine & latitudine)

12. 2. 3. 6. 3. 4. solida ipsa erunt 72
& 72, ut hic vides, & proportio i-
tē reciproca est basium & altitu-
dinū: ut enim 24 ad 18, sic 4 ad
3. Et causa est ex ipsa aurea pro-

portionis in arithmetica lege, quia bis bina latera sunt proportionalia, ideo
que factæ ab iis areæ sunt æquales. Et vicissim ex eadem lege, quia areæ sunt æ-
quales, termini quatuor sunt proportionales, quæ conversio est præsentis a-
xiomatis.



14. *Figurae similes sunt figurae aequiangulae & proportionales cruribus aequalium angulorum.*

Geometricum aurum in figuris primis tum aequalitatis tum altitudine & basi reciprocis expositum est, superest in similibus omnium purissimum & pretiosissimum aurum. Primo similes figurae definiuntur, deinde comparantur. Similitudo figurarum est, non primarum modo & a primis multiplicium, sed omnino omnium, & duabus rebus comprehenditur aequalitate angulorum & proportionem crurum: & duae figurae dicuntur similes tali synecdoche particularium & angulorum aequalium & crurum proportionalium, qua figura rationalis dicta est ratione laterum rationalium. Neque duo termini ut duae figurae similitudinem faciunt, ut neque illic unicus terminus ut unica figura rationem facit. Verum definitio similitudinis in figuris magnam geometris anxietatem attulit, ut in unoquoque figurae genere nova similitudinis definitio facta sit: 21 d 7 de figuratis numeris similibus: ut 1 d 6 de similibus rectilineis, 10 d 3 de sectionibus similibus, 7 d 11 de similibus inclinationibus, 9 d 11 de similibus solidis, 24 d 11 de conis & cylindris similibus: Hinc etiam novae definitiones de segmentis conicis similibus apud Apollonium, de similibus sphaeroidibus apud Archimedes, de quibus in scholis. Circuli autem & sphaerae similes intelligentur ex illa polygonia infinitorum laterum, ut suo loco de singulis intelligetur.

Itaque

1. *Habent homologos terminos aequalibus angulis subtenfos, & aequales, si ipsae sint aequales.*

Consecrarium est e proxima generali definitione in rectiterminis praecipuum: & ita sumitur a Theone ad 4. 5. 6 p 6 in rectilineis, sed nos generale etiam fecimus, & homologos terminos appellamus e sumptis proportionalibus, primum & tertium, secundum & quartum, id est alternos: Homologia enim & ἀναλογία 11 & 12 d 5 eadem res est, uti in scholis illius loci docuimus. Pars ultima de aequalitate terminorum est lemma Theonis ad 22 p 6. Et

2. *Similiter sitae sunt, quando termini proportionales simili situ respondent.*

Euclides appellat 18. 26. 27. 31 p 6, 27 p 11 similiter sitas figuras, vel similiter descriptas, ut in consecrariis 19 & 20 p 6, & 22 p 6, & 37 p 11, neque definit, sed res tamen ea est in situ simili, cum nempe supera superis, infera inferis, & reliquae loci differentiae congruunt: & apud Archimedes in Isorropicis 9 axi, similiter sita puncta in planis similibus definiuntur, a quibus ad aequales angulos recte faciunt aequales angulos cum homologis lateribus: situs ille similis necessario exigitur ad 26 & 27 p 6. Et

3. *Similes eidem sunt, similes inter se.*

Euclides speciale id fecit de rectilineis similibus 21 p 6. Patet autem protinus ex ipsa definitione similitudinis. similitudo enim duarum figurarum ad eandem concludit & aequalitatem in angulis, & laterum proportionem inter se. Et

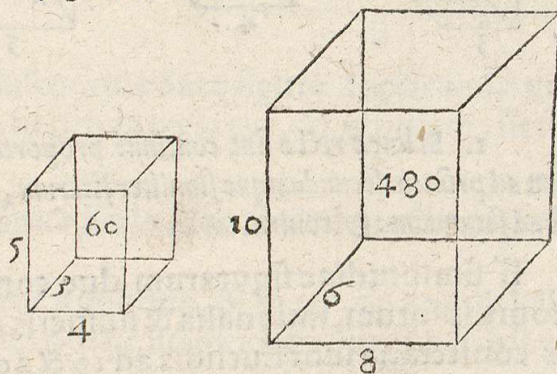
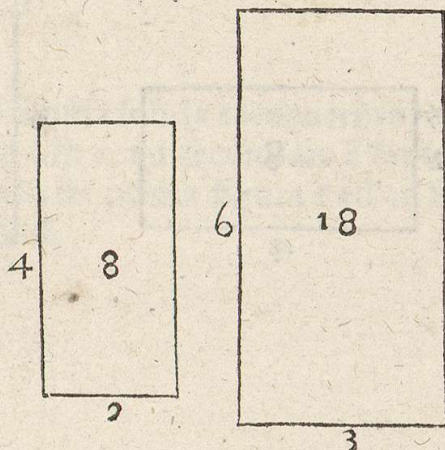
4. *Si partibus datae figurae partes ad datum terminum similes similiterque sitae constituantur, figura constituetur similis datae similiterque sita.*

Hac

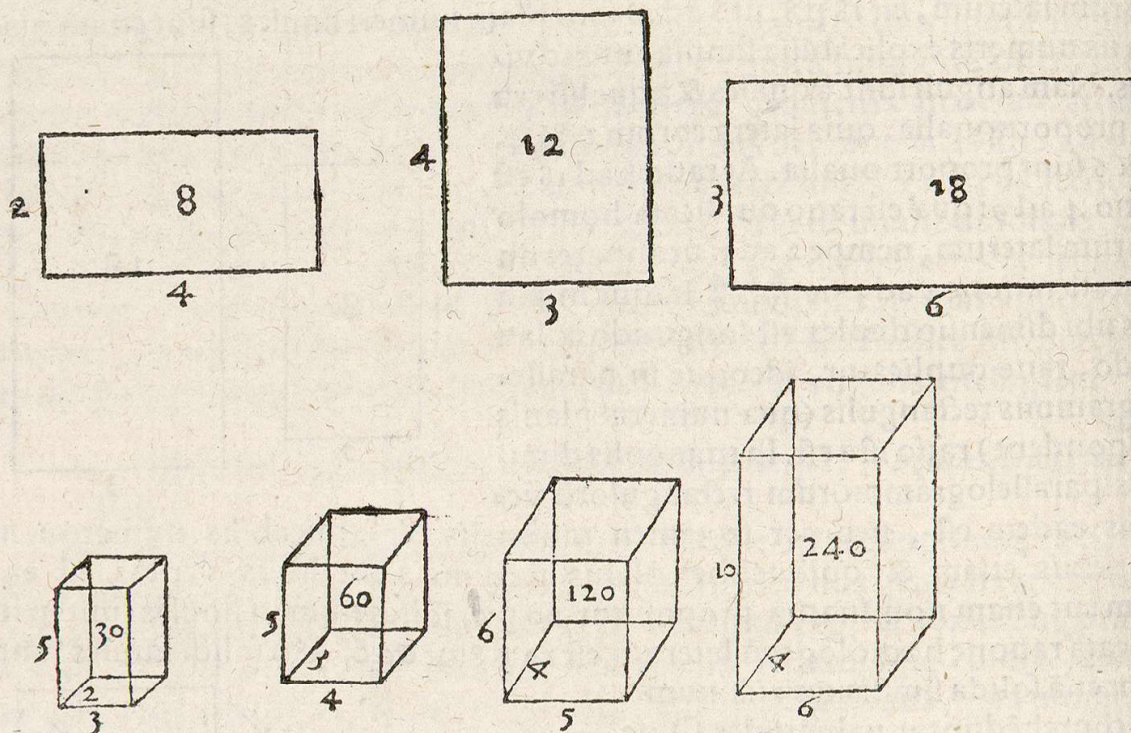
Hæc fabrica specialiter proponitur ad 18 p 6, & 27 p 11.

15. *Figuræ similes habent rationem homologorum laterum æquemultiplicatam dimensionibus, & medium proportionale una minus.*

Jam aurum sequitur illud (ut dixi) pretiosissimum, aurum tamen, ut in cæteris antea generalibus, ex parte tantum rationale & numerabile. figuræ vero planæ duarum sunt dimensionum, solidæ trium: Itaque habebunt illæ duplicatam rationem homologorum laterum, hæ triplicatam. Ratio in rationalibus primo manifestior erit. Numeri plani similes sunt in duplicata ratione homologorum laterum, est 18 p 8, ut 8 ad 18 sunt plani numeri similes, sunt etiam plana iis numeris explicabilia similia: ut hic vides. Nam anguli sunt æquales & æqualiū crura proportionalia, quia latera eorum 2 & 4, 3 & 6 sunt proportionalia. At ratio 8 ad 18 est ratio 4 ad 9: quæ est ratio duplicata homologorum laterum, nempe 2 ad 3: ut apparet duplicata ratione 2 ad 3: sic $\frac{2}{3} \frac{2}{3} (\frac{4}{9})$ Itaque in planis ubi dimensio duplex est longitudo & latitudo, ratio duplicatur, ideoque in parallelogrammis rectangulis (quæ numeris planis respondent) ratio ista est. In triangulis dimidiis parallelogrammorum rectangulorū veritas eadem est, nec per se tamen rationalis & explicabilis numero: in trapeziis etiam & quibuslibet planis rectilineis similibus veritas est eadem: ut etiam nominatim proponitur 20 p 6. Solidi numeri similes sunt in triplicata ratione homologorū laterum, est 19 p 8: ut 60 & 480 solidi similes sunt, sunt etiā solida similia quæ iis numeris cōprehēduntur, ut hic vides. Quia latera ipsorum 4. 3. 5 & 8. 6. 10 sunt proportionalia. At ratio 60 ad 480 est ratio 4 ad 8 triplicata: sic $\frac{4}{8} \frac{4}{8} \frac{4}{8} (\frac{64}{512})$ id est 1 ad 8, seu octupla, quod offendit divisio 480 per 60. Itaque in solidis ubi dimensio triplex est, ratio triplicatur, ideoque in parallelepipedis rectangulis (quæ solidis numeris respondent) ratio ista est rationalis & explicabilis numero. In pyramidibus trientibus prismatum & ratio item eadem est, neque per se tamen rationalis vel explicabilis numero: In conis & cylindris similitudo, inde suo loco percipietur. Quare tertium hoc geometriæ proportionis in similibus figuris aurum per se relucet resplendetque, sed in suo generali & proprio lumine collocatum. Atque hinc apparet labor angoreꝝ Euclidis & Theonis tot locis dispersas ejus micæ



consecrantur, 10 d 5, 5 d 19, 20, 23 p 6. 5, 18, 19 p 8, 33 p 11: 2, 8, 12, 18 p 12, de quib. in scholis. sed prima pars adhuc exposita sit, secunda brevius percipitur, quod habeant medium proportionale dimensionibus una minus. Nam inter duas similes figuras planas est una media proportionalis, inter duas solidas sunt due. Euclidis de planis est 18 & 20 p 8: de solidis est 19 & 21 p 8. Causaque tantum est arithmetica ut prius. Nam si duplicata ratio est numeri ad numerum, necesse est ex continuorum lege unum interesse proportionalem, cuius cum primo etiam sit illa duplicata ratio: si triplicata, necesse est duos interesse, ut hic vides.

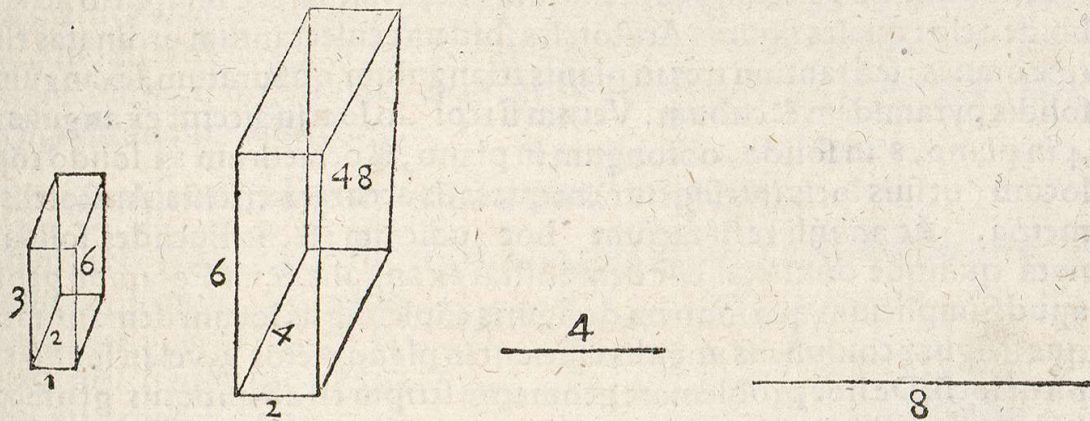
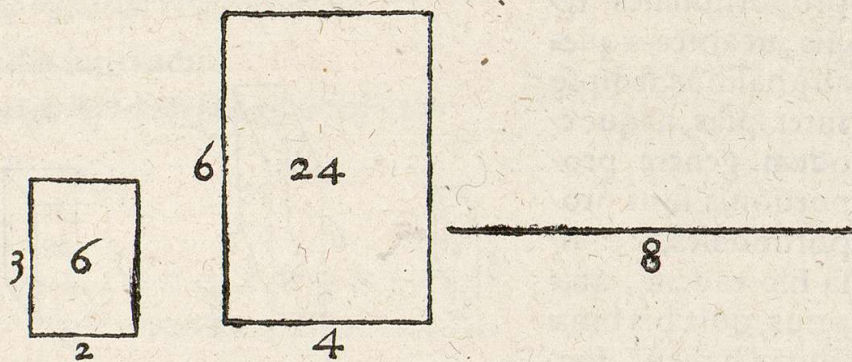


Itaque
 1. Si lineæ rectæ sint continuè proportionales una plures dimensionibus figurarum similium ad primam secundamque similiter sitarum, ut prima recta est ad ultimam, sic prima figura est ad secundam: & contra.

E' similitudine figurarum duo consecutaria oriuntur ex parte tantum, ut axioma ipsorum, rationalia & numeris explicabilia. De triangulis & triangularis consecutaria sunt Euclidis ad 19 & 20 p 6. Si tres rectæ sint continuæ proportionales, erit ut prima ad tertiam, sic rectilineum comparatum primæ ad rectilineum comparatum secundæ simile similiterque situm, quod in numeris parte quadam potest intelligi: ut sunt tres lineæ pedum 2, 4, 8. & ad primam secundamque comparentur figuræ similes pedum 6 & 24: sic nempe ut 2 & 4 sint bases earum: Hic ut prima linea 2 est ad tertiam 8, sic prima figura 6 est ad secundam 24: ut hic vides. Sic res patet in planis de tribus continuis, & causa manet

sa manifesta est e
proximo axioma
te & duplicatione
rationis in tertio.
De pyramidibus
& prismatis tale
in elementis no-
minatim nihil est:
de prismatis pa-
rallelopipedis cō-
sectariū est ad 33
p 11. Sinto rursus

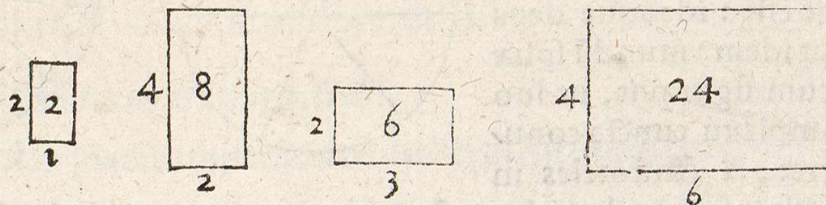
4 lineæ continue proportionales 1.2.4.8. & duo similia solida comparentur ad
primam & secundam: ad primam ē lateribus 1.3.2. sit 6: ad secundam ē lateri-
bus 2.6.4 sit 48, ut prima lineā 1 est ad quartum 8, sic prima figura 6 est ad se-
cundam 48, ut constat divisione, exempla ita sunt.



Atque in hoc consecrario via patet cujuscunque datæ figuræ duplicandæ tri-
plicandæ & data ratione augendæ. Nam ut prima recta erit ad ultimam, sic fi-
gura prima erit ad secundam. Et

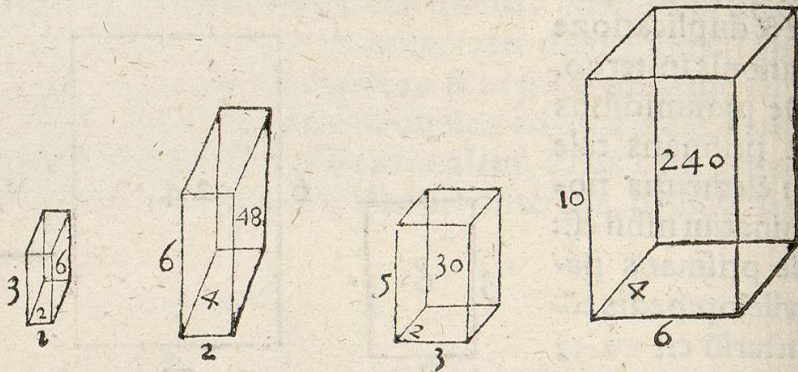
2. Si quatuor rectæ sint proportionales, figuræ similes ad eas similiter sitæ sunt propor-
tionales: & contra.

Euclidis est 22 p 6 de omnibus rectilineis similibus, & 37 p 11 de parallelepi-
pedis, unde generale institui consecrarium potest, uti fecimus: proportio hinc
etiam ex parte potest explicari, neque tamen continua proportio hic exigitur,
ut antea. Esto in
planis primū exē-
plum. Causa ve-
ro est proportio-
nāliū figurarū,
quod bis binæ fi-



gura hæ-

gurae habent eandem rationem duplicatam. Secundum exemplum esto. Neque tamē hic figurae sunt proportionales rectis, ut antea aequales basibus, sed ipsae inter ipsas, neque eodem genere proportionis sunt proportionales, & causa hic eadem, quae prius, quia bis binariae figurae habent eandem rationem triplicatam.

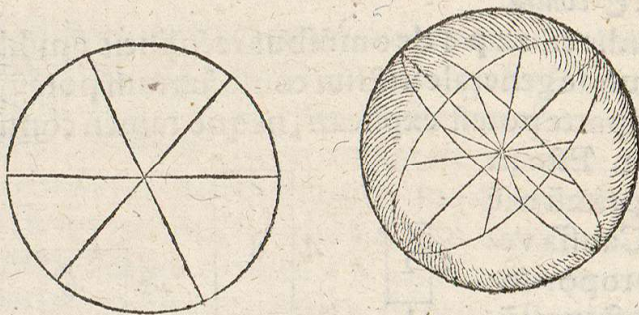


16. *Figurae complentes locum sunt, quae circa idem punctum quolibet modo collocatae nihil inane relinquunt.*

Hae definitio veterum geometrarum fuit, ut apparet ē Simplicio ad 8 cap 3 lib. de cælo: quales figuras Aristoteles ibidem censet tantum ordinatas esse, neque omnes: sed tantum tres in planis triangulum, quadratum, sexangulum: in solidis pyramidem & cubum. Verum si repletio loci iudicetur ex angulis rectis 4 in plano, 8 in solido, oblongum in plano, & octaedrum in solido complebit locum (ut suis locis intelligetur) neque satis accurata erit ista Aristotelis geometria. At anguli recti faciunt hoc iudicium: & sic Euclides solida ordinata quinque duntaxat esse demonstrat ex angulis, & ita Potamon geometra apud Simplicium quaestionem de figuris complentibus locum demonstrat: Denique si figurae conjunctis angulis efficiant in plano rectos 4, vel in solido 8, complent locum. De hoc problemate geometria scripta est ab antiquis geometris, & ē recentibus Regiomontanus dicitur accurate commētatus esse, & Maurolycus librum pollicetur, quorum nihil dum videre nobis contigit.

17. *Figura rotunda est, cujus radii omnes aequantur.*

Talis erit in planis circulus, in solidis sphaera. Haec vero figura est ex isoperimetris maxima, ut patuit 12 e. eaque de causa Plato dixit in Timæo hoc σχῆμα τελειώτατον πάντων perfectissimum omnium esse: ideoque deus (ait idem) mundum sphaericum figuravit, ut suo complexu cuncta contineret, & Aristoteles in mechanicis, prob. ait hanc figuram omnium miraculorum esse principium & causam.



causam. Sed ea miracula suo tempore narrabuntur. Rotundum pro figura rotunda dicatur. Itaque

1. Diametri in rotundo bisecantur radiis æqualibus.

Quia nempe dimidia sunt radii.

Et

2. Rotunda diametrorum æqualium sunt æqualia. ϵ 1 d 3.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. V.

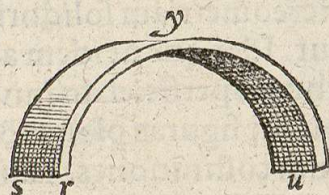
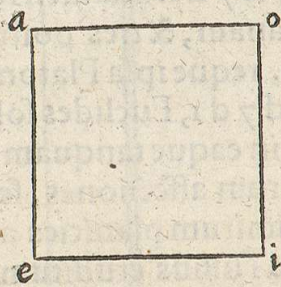
de lineis & angulis in plano.

Lineatum est superficies aut corpus.

Lineati partitio manifestam intelligentiam habet ϵ lineati definitione, qua excluditur linea, & comprehenditur superficies & corpus. Atque hinc orta est metricæ artis partitio in geometriâ de superficie, & stereometriam de corpore, quomodo Plato 7 de rep. & Aristoteles 7 c 1 Post. geometriam & stereometriam distinguunt, attamen etiam geometriæ nomen ad totam metiendi artem significandum usurpatur.

2. Superficies est lineatum duntaxat latum. 5 d 1.

Ut hic ϵ io & uys r. superficiei definitio complectitur intervallum lineæ, longitudinem nempe, sed addit intervallum alterum, id est latitudinem. Itaque superficies definitur à quibusdam (ut Proclus ait) magnitudo duorum intervallorum. At duo intervalla non tam specialiter tamque proprie definiunt; ergo superficies magnitudo longa tantum & lata melius definietur.



Tales (inquit Apollonius) sunt super terram umbræ, quæ longe & late campos occupant; terram vero non ingrediuntur, nec crassitudinis quidquam habent. ϵ $\pi\alpha\lambda\epsilon\alpha$ nomen hic significantius est græce, tanquam diceretur apparentia, quia magnitudinis nihil visibile sit nisi superficies.

3. Superficiei terminus est linea. 6 d 1.

Res manifesta est in planis: superficies enim trilatera terminatur tribus lineis, quæ

ϵ

is, quadrilatera quatuor, multilatera multis; circulus una: sphaerica superficies integra, non videtur terminari linea: At si spectetur sphaerica genesis in conversione semiperipheriae, principium erit linea, item finis, nempe semiperipheria: & sicuti punctum non solum terminat actu lineam, sed potentia medium est, sic & linea superficiem terminat actu, & lineae innumerabiles per totam superficiem accipi possunt. Superficies igitur creatur motu lineae, ut linea motu puncti.

4. *Superficies est plana vel gibba.*

Differentia superficiei respondet differentiae lineae in rectitudine & obliquitate.

5. *Superficies plana est superficies, quae equaliter intra suos terminos interjacet. e 7 d 1.*

Ut vides in a di o. Quod igitur linea recta in duas partes oppositas spectabat, superficies plana spectat in omnes usquequaque partes, ut superficies plana sit omnium superficierum intra eodem terminos brevissima, & ejus media extremis officiant: denique aequatur intervallo intra duas lineas: potest etiam per unicam rectam explorari quoquo versus applicatam, ut Proclus hic innuit. Planum vero pro superficie plana usurpatur, ut antea rotundum pro figura rotunda, & geometria de planis stereometriae solidorum opposita, & sic Proclus lib 1 cap 13 geometriam de planis a stereometria de solidis separat. Euclides vero quamvis definiendo superficiem faciat genus plani 5 & 7 d 1: attamen totis elementis nullam aliam superficiem instruxit, quam planam, & tres postremos liberos ~~consequenter~~ inscripsit stereometriam solidorum, reque ipsa Platonis & Aristotelis sententiam sequitur. Ideoque ut idem ait ad 7 d 1, Euclides solam superficiem planam de speciebus superficiei definivit, in eaque tanquam in aliquo subjecto abaco contemplatur figuras planas & earum affectiones, sectiones, contactus, situs, angulorum constitutiones. Talis nimirum planities antiquis geometris abacus ille fuit hyalini pulveris (quem & Tullius eruditum vocat) resperione coloratus: de quo Persii carmen:

Nec qui abaco numeros & secto in pulvere metas

Scit risisse raser. —

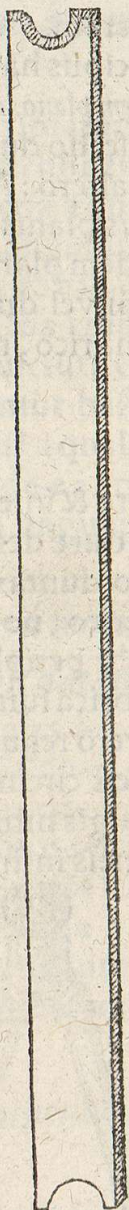
Atque hic Proclus phantasmam efficit, veluti planum quoddam speculum, in quod a cogitationibus rationum imagines influant. De superficie tamen gibba nonnihil suo loco praecipietur.

Itaque licet in plano

1. *A puncto ad punctum rectam ducere. 1 & 2 post 1.*

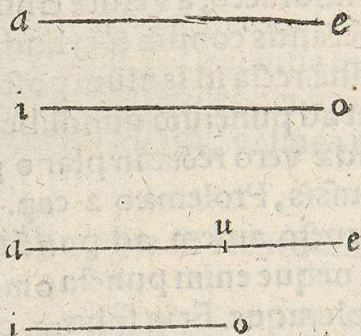
Tria deinceps postuluntur, primum de linea recta. Linea recta & peripheria 2 lib. definita sunt, sed utriusque fabrica in plano hic proprie dicitur. fabrica lineae rectae est 1 Post. & justum duntaxat in plano: neque enim licet in sphaerico intra duo pun-

duo puncta rectam ducere, neque licet intra duo qualibet in conico & cylindraceo, à vertice enim ad basim tantum licet: & tum plani secantis conum & cylindrum terminus est. Ergo (ut dixi) de plana recta id tantum postulari iuste possit, ut à puncto quolibet ad punctum quodlibet recta ducatur, ut hic ab *a* in *e*. Ducendæ vero rectæ in plano geometricum instrumentum dicitur Amulsis, Ptolemæo 2 cap. 1 musica regula, quale hic vides: à puncto autem ad punctum iuste postulatur, non ad puncta: neque enim puncta omnia in rectam cadunt, sed in obliquam pleraque. Et in sphaera, cono, cylindro, regula intra duo puncta possit esse, sed spherica, conica, cylindracea. Quin exemplo rectæ postulat Vitellio 2 p 1 intra duas lineas superficiem extendi: & sic videatur in elementis de figuris plerisque planis solidisque postulari: ut figura describatur ad 7 & 8 p 2: item figura compleatur ad 8. 14. 16. 23. 28 p 6, quæ sunt de planis, ite ad 25. 31. 33. 34. 36. 40 p 11, quæ sunt de solidis: sed tamē superficiēs plana, & corpus planū rectitudinē suā metiuntur linea recta, ut ius postulandi in linea recta plana primarium videatur. Cōtinuatio autē rectę lineę nihil aliud postulat, quā prolongationē jã ductæ rectæ, & quidē à puncto ad punctum, ut recta *a e* licet continui re in *i*. Quare primum & secundum postulatū Euclidis in unum conveniunt. Et



2. Rectā ponere ad datum punctū æqualem datæ, & à majore secare æqualem minori. 2. 3 p 1.
e 2 *ut data*

Ut data sit ae , & ad punctum i ponatur æqualis io : item sit ae maior quã io , & secetur congruente regula æquãte minorem au , ut hic. Nam si quis mente tantum id fieri putet oportere, is etiam regulam mente complectatur, ut regulam opera faciat, neque vero fabrica æquandæ & æqualis amputandæ lineæ difficilior est, quam dato puncto & intervallo peripheriæ describendæ, quam datis triangulo, parallelogrammo, semicirculo describendi conum, cylindrum, sphaeram, quæ tamen omnia Euclides in principiis habuit.



Itaque

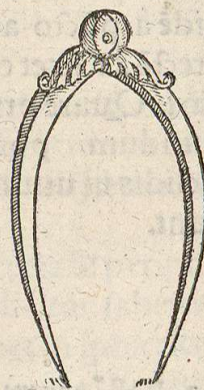
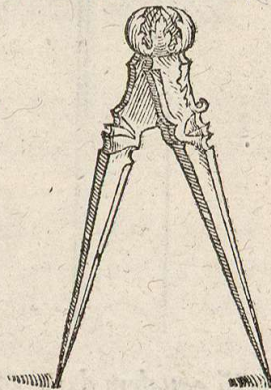
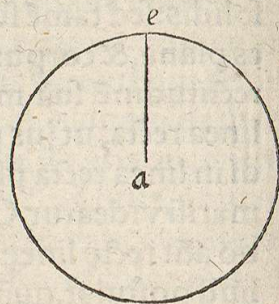
Recta una duæque intersectæ sunt in eodem plano. ϵ 1 & 2 p 11.

Recta una potest esse communis sectio duorum planorum, tota tamen in plano eodem est una & tota in eodem altero: Atque ita tota est in eodem. Duæ rectæ intersectæ possunt esse in duobus planis intersectis, sed planum per eas duci potest. Itaque ambæ erunt in eodem plano: & planum hoc geometricè concipiendum, quod lineæ obliquæ uni, vel duabus intersectis non semper idem subijcitur, cum peripheria sit in sphaerico, nec omnes intersectæ peripheriæ in uno plano esse possunt.

Et

3 Data recta peripheriam describere.

Hæc fabrica est ϵ 3 Post. Dato centro & intervallo circulum describere. Sed hic terminus circuli tantum quæritur, qui est definitione peripheriæ melius ducitur & in plano duntaxat ista rectæ conversio fieri potest, non in sphaerico, non in conico, non in cylindræo, nisi à vertice ubi peripheria tamen esse potest. Itaq; antea generalis fabrica fuit peripheriæ, hic autem tantum plane, ut hic. Ut vero regula fuit instrumentum ducendæ rectæ, sic modo est circinus peripheriæ describendæ, cruribus rectis an valgis nihil interest, ut hic vides. Circinus vero est geometricis instrumentis instrumentum longe præstantissimum est, cujusque machinatione nobiles geometriæ problemata confici posse: & extat Ioan Baptistæ liber, quod una circini apertura omnia Euclidis problemata resoluantur: & Cardanus mathematicus



in signis

in signis lib. 15 subtilitatum scribit à se & à Ferrario inventam circini opera omnium ab Euclide demonstratorum demonstrationem. Talus Dædali ex sorore nepos hoc instrumentum invenisse dicitur 8 Metamorph.

—Et ex uno duo ferrea brachia nodo

Iunxit, ut æquali spatio distantibus ipsis

Altera pars staret, pars altera duceret orbem.

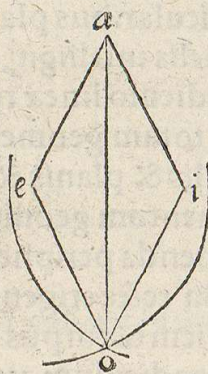
Itaque

Radii ejusdem vel æquales peripheriæ sunt æquales.

Quia eadem recta est ubique conversa. Atqui hic radius peripheriæ pro radio figuræ peripheriæ comprehensæ intelligatur.

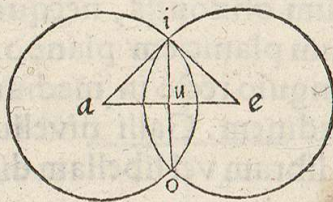
6. Si duæ æquales peripheriæ à terminis æqualium crurum dati anguli rectilinei ante concurrant, recta à concursu ad verticem bisecabit angulum. 9 p I.

Adhuc de lineis planis, sequitur ipsarum affectio, primum in anguli bisecti-
one. Est igitur datus angulus rectilineis æqualiū crurū ae, ai , & duæ peripheriæ æquales ab e & i terminis crurum ante angulum concurrant in o , rectaque ducatur ab o in a , dico datum angulum bisecari: ductis enim rectis oe, oi , anguli oae & oai æquicruri ex thesi & ex communi latere æquantur basi, eo & io , per c 3 Post. quia sunt radii æqualium peripheriarum. Itaque per i c 6 e 3 anguli oae & oai æquantur, & ideo angulus totus est bisectus.



7. Si duæ peripheriæ æquales à terminis datæ rectæ utrinque concurrant, recta per concursus bisecabit datam. 10 p I.

Est igitur data ae , & peripheriæ æquales à terminis a & e concurrant in i & o , & ducatur recta io , dico à ducta bisecari datam ae , quia ductis radiis æqualium peripheriarum ia & ie bisecat per præcedentem angulum aie . Itaque aiu & uie æquales & æquicruri, cum crura sint æqualium peripheriarum æquantur basi, au , & ue , per i c 6 e 3. Quare cum partes au & ue sint æquales, data ae est bisecta.



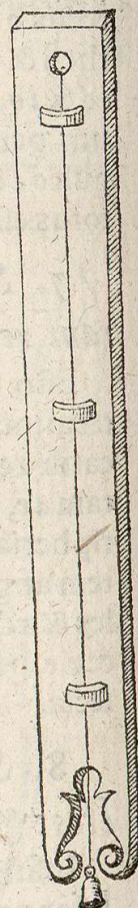
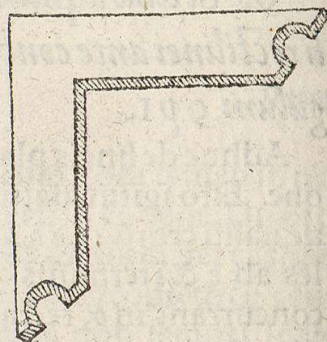
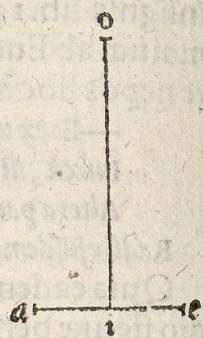
8. Si recta in rectam perpendicularis insistit, facit angulos deinceps rectos: et contra.

Insistit recta in rectam quæ secatur nec secatur: & anguli sunt deinceps quos insistens efficit cum subiecta, ut patet è Proclo ad 15 p 1. ut hic ae intersecta, & i

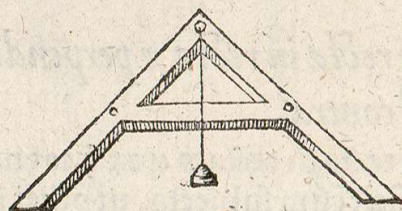
e 3 insistens

s

insistens sunt perpendicularares, anguli deinceps a *o* & *e* *o* recti erunt per 7 e 3. Perpendicularum vero commune est omnium linearum. Attamen præcipue in planis rectis animadvertitur, & hic idcirco attentius consideretur. Hinc enim postea è communi definitione deprehenditur in cæteris magnitudinibus: sic recta judicatur perpendicularis peripheriæ, quâdo est perpendicularis rectæ per cõmunẽ sectionẽ trãseuntĩ: sic duæ peripheriæ judicantur inter se, perpendicularares: sic postea linea recta perpendicularis plano, & planũ plano perpendicularare dicet, 3. 4 d 11, & à Vitelli dẽ ad 5 d 1: sic rectarũ linearũ perpendicularo corpora ipsa inter se perpendiculararia judicantur. Quod Tullius in epistola ad frat. 3 lib. diserte significavit. Columnas (ait) neq; rectas, neq; è regione Diphilus collocarat, eas scilicet demolietur, & aliquando perpendiculo & regula discet uti. Hic orator columnas rectas pro perpendicularibus plano horizontis, & è regione pro parallelis intelligit, & rectitudinem columnarum perpendiculo lineæ rectæ expendit. Atqui perpendiculi per totam geometriam utilitas immensa erit in rectangulis & planis & solidis. Regula primum fuit instrumentum geometræ in dirigendis lineis, circinus secundum in describenda peripheria. Norma vero est tertium instrumentũ in linea recta recte erigenda in eodem plano super rectam, atque inde superficiem & corpus supersuperficiem corpusve. Norma igitur sic est. Perpendicularum vero è plumbo & filo architectis physicum est, quia gravia suo pondere rectis lineis ad perpendicularum ferantur, quod à Theone primo magnæ cõstructionis demonstratur. Instrumentum duplex ita est. Primum ad explorandum perpendiculum sublime, ut utrum columna vel structura quævis recta sit ad planum orizontis, necquoquam acclinet. Secundum est ad explorandum planiciem plano orizontis parallelam. Itaque cum filum ab angulo recto in medium basis incidit, indicabit libram longitudinem. Galli nivellum, Itali livellum, item achipendum, Latini libram vel libellam dicunt.

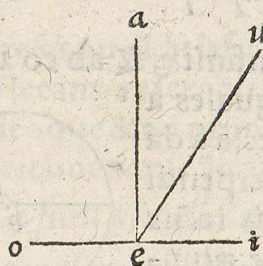
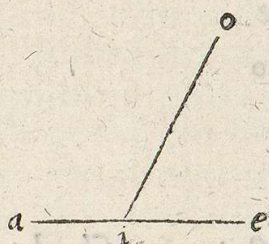


Itaque
I. Si recta



1. Si recta insistit in rectam, aequat deinceps angulos duobus rectis: & contra. ē 13 & 14 p. 1.

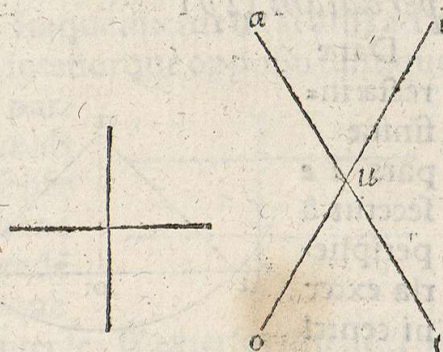
Nam duo tales anguli cum duobus rectis eundem locum occupant: si insi-
stens sit perpendicularis, faciet rectos: si obliqua ob-
liquos, ut hic aio & eio e-
undem cū duobus rectis
locum occupant. Conver-
sio per impossibile cogi-
tur, quia pars aquaretur
toti. Est igitur insistens
 ae , quæ æquet duos deinceps
angulos aeo & aei duobus rectis: dico oe & ei unam esse rectam. Secus cō-
tinuet. oe in u per i c 5 e. Iā
per i c 8 e, aeo & aeu æquā-
tur duobus rectis, quibus
item æquantur oea & aei
ex thesi: tollatur commu-
nis oea , relinquetur aeu æ-
qualis aei , pars toti. Hinc
constat duas rectas oe & ei
unam esse & continuam
rectam.



2. Si duæ rectæ interfecantur, æquant angulos ad verticem, & omnes quatuor rectis.

15 p. 1.

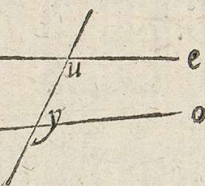
Anguli ad verticem seu verticales dicuntur, qui in eodem puncto vertices op-
positos habent. Demonstratio autem est: quia intersectæ vel sunt perpendicu-
lares, & recti æquantur, ut hic: vel sunt obliquæ,
tūque verticales etiam æquantur, ut awi & one :
item auo & iue , æquales vero sunt au & oe ,
quia per i c 8 e cum cōmuni auo æquantur duo-
bus rectis: ideoque etiam inter se. Quare detra-
cto illo cōmuni relinquantur æquales. Addit
huc Proclus Euclidis corollarium à Theone
prætermissum, angulos duarum intersectarum
æquari quatuor rectis, ex eoq; corollario ait in-
ventum esse admirabile à Pythagoreis theore-
ma, ordinatis figuris cōpleri locū planū triangulo, quadrāgulo, sexangulo: so-
lidum tetraedro, & hexaedro: de qua Aristotelis geometria prædictum est. Sed
de singulis suo loco dicetur subtilius. Potuit etiam Proclus huc addere. Quot-
libet in cōmuni puncto intersectarum angulos æquari quatuor rectis, quia
cum quatuor rectis eundem locum occupant.



3. Si rectis

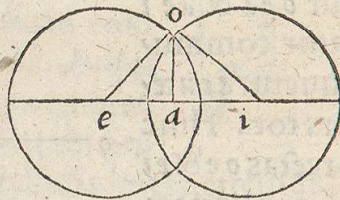
3. Si rectis recta sectis interiores eadem parte anguli sunt majores duobus rectis, oppositi minores sunt.

Uthic,
si $a u y$, a ————— e
 $u y i$ sint
majo-
res duo
bus re-
ctis, $e u y$, $u y o$, erunt minores.



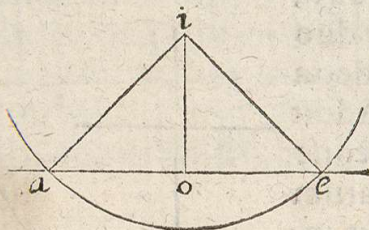
9. Si á dato data recta infinita puncto duæ partes utrinque secantur æquales, & á punctis sectionum duæ æquales peripheriæ concurrant, recta á dato puncto in concursum erit perpendicularis super datam. II p I.

Vt esto punctum a data recta infinita, & ab eo utrinque secantur per $2 c 5 e$ $a e$ & $a i$, tum duæ peripheriæ æquales á punctis e & i concurrant, ut in o , recta á dato puncto a in concursum o erit perpendicularis super datam, quia ductis rectis $o e$ & $o i$ anguli $e a o$ & $i a o$ utrinque æquicruri per fabricam $\hat{e}$ segmentis utrinque æqualibus & communi latere æquantur basi, per $3 c 5 e$: & ideo æquantur per $1 c 6 e 3$. Itaque $a o$ cum æqualiter interjaceat, per $1 o e 2$ est perpendicularis.



10. Si pars data rectæ infinitæ secetur á peripheria á dato extra puncto, recta á dicto puncto bisecans dictam partem erit perpendicularis super datam, 12 p I

Data
recta in-
finita
pars $a e$
secetur á
periphe-
ria exter-
ni centri
 i , & recta
 $i o$ bisecet

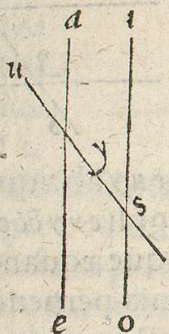


dictam partem, dico $i o$ esse perpendicularem: interjacet enim æqualibus angulis $a o i$ & $e o i$ eadem de causa, qua demonstratur perpendiculum superius. Atque hæc de perpendiculo rectarum planarum: sequitur de parallelismo.

II. Si duæ

II. Si duae rectae in eodem plano nusquam concurrunt, sunt parallelae. é 35 d 1.

Id Euclides
iuste
postulavit.
Tū ē
nim
perpetuo
quidī



stabit. Ut hīc a e, i o.

Itaque

Si recta infinita secat alteram ē rectis parallelis infinitis, secabit reliquam.

Ut in eodem exemplo *u y* secans *a e* secabit etiam *i o*: secus si non secaret, esset ad eam parallela, per II e. Ideoque & ad primam per c 11 e 2. Idque contra thesīm: Proclus ad 29 p 1 deducit hoc consecrarium ex Aristotele 1 lib. de cælo.

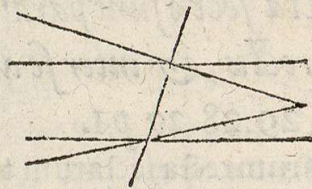
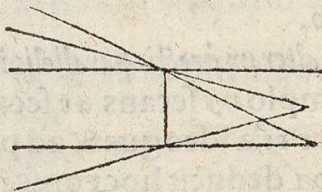
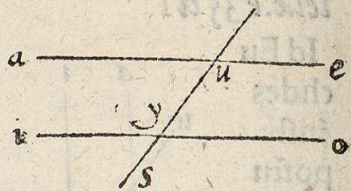
12. Si recta recta secata sunt parallelae, aquant angulos interiores eadem parte duobus rectis, & inter se alternos, & exteriorem interiori opposito: & contra. 29. 28. 27 p 1.

Parallelismus rectarum recta secatarum triplicem angulorum aequalitatem concludit, & ab earum qualibet vicissim concluditur. Primi anguli suis verbis satis explicantur: alterni autem verbum hīc est situs (ait Proclus) quod in arithmeticiis est proportionis, cum antecedens antecedenti comparatur, metaphora tamen respondet. Ut enim acutus est ad suum deinceps obtusum: sic in altera parte acutus est ad suum deinceps obtusum. Itaque alterne ut acutus ad acutum, sic obtusus ad obtusum. Exterior autem interiorque oppositi sunt, quorum alter est extra parallelas, alter intus eadem parte non deinceps, sed super eandem rectam tertius ab exteriore. Proprietatis huius triplicis causa est ē perpendiculo, quod incidens in parallelas omnem hanc varietatem ostendit: Ut hīc recti sunt interiores eadē parte: item alterni, item exterior & interior, ideoque aquantur & interiores duobus rectis, & alterni inter se, & exterior interiori opposito. Quod si secans obliqua sit, parallelis idē ex cōtrario accidet. Obliquatione enim ista, manētib. rectis & immutatis, pariter tum interiorū alter *e u y* obtunditur, alter *u y o* acuitur: tū alterni acutuntur & obtunduntur: tū exterior interiorque oppositi pariter obtunduntur & acutuntur. si quis tamen interiores inaequales duobus rectis dicat, eodem argumento utraque parte & maiores duobus rectis & minores dixerit (ait apud Proclum Ptolemaeus) ut in rectis parallelis



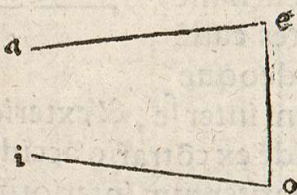
f ac & i o

ae & io sectis, recta uy, si dicas auy & iyu maiores duobus rectis, anguli deinceps per 3 c 8 e erunt minores, qui tamen iidem eodē contradicentis proposito etiam maiores essent. Idem erit impossibile, si minores duobus rectis dicantur. secunda pars & tertia ē prima concludi possunt. secūda sic. Bis binī anguli æquantur duobus rectis oyu & euy per superiorem partem: item auy & euy per 1 c 8 e. Itaque æquantur inter se: tollatur communis angulus euy ab æqualibus, reliqui alterni ad a & y æquales relinquentur. Tertia sic. Anguli euy & oys æquantur eidem uyi per secundam proprietatem & per 2 c 8 e. Itaque æquantur inter se. Conversa prima pars hic item clarior est ex illa communis perpendiculari luce: Ac si cui interioribus angulis æquantibus duos rectos recta tamen concurrere videantur, ut si ipsi æquales sint recti, ut hic, necesse esset duas rectas communi perpendiculari divisas altera parte acclinare, altera declinare, vel saltem alteram, contra 10 e 2. Si obliqui sint, ut hic, lineis inter se obliquatis anguli minuentur altera parte, altera augebuntur. Itaque æquales duobus rectis non essent, contra thesim. Hinc secunda pars & tertia concludi possunt. secūda sic. Anguli alterni ad y & u æquantur dictis interioribus per 1 c 8 e, quia utrique æquantur duobus rectis: Atque ita per primam partem secunda concluditur. Tertia similiter per secundam, quia exterior oys æquatur opposito ad verticem per 2 c 8 e. Itaque cū exterior & interior oppositi æquantur, alterni quoque æquantur. Quare ut parallelismus triplicem angulorum æqualitatem, sic triplex angulorum æqualitas parallelismum coarguit.



1. Si recta recta connexa faciunt interiores angulos eadem parte minores duobus rectis, eodē continuata concurrent.

Ut a e
& io. Assumptio
& cōple-
xio est ad
12 e de re



ctis in eodem plano. Si recta recta secta sunt parallelæ, faciunt angulos interiores, eadem parte æquales duobus rectis. Ergo si non faciunt æquales, sed minores, non erunt parallelæ, sed concurrent. De hoc consectario erit in scholis, ut Euclidem, Ptolemæum, Geminum exercuerit.

Et
2. Recta

2. *Recta connectens rectas parallelas est in earum plano. 7 p 11.*

Vt hic *uy*

connectens

parallelas *ae*

& 10. Postu-

latur ab Eu-

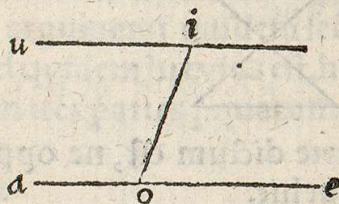
clide 35 d 1,

quod parallelæ sunt in eodem plano: & quod eas connectens sit in ipsarum pla-

Et

3. *Si recta à dato puncto cum data faciat angulum, anguli facto æquati & alterni crur alteri erit parallelum data rectæ. 31 p 1.*

Ut data sit *ae* & punctum *i* à quo recta sitio faciens cum data angulum *ioe*, cui ad *iæ* quetur alternus *oiu*, recta (quæ est crur alterum) est parallela data. potest vero æ-



quari angulus per primam proprietatem, & sic vulgo architecti erecto perpen-

Et

4. *Anguli crurum alterni parallelarum sunt æquales.*

Confectariū

est ē tertia

proprietate:

unde Eucli-

des fecit 10

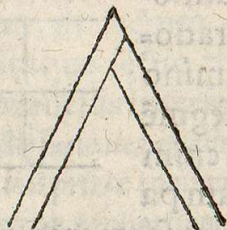
p 11, ut hic

vides altero

interioris

crure conti-

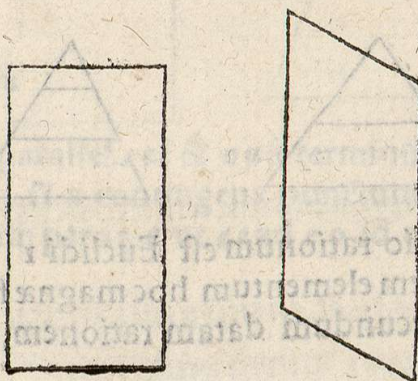
nuato.



5. *Si parallele conterminent parallelas, oppositæ æquantur. ē 34 p 1.*

Alioqui parallelæ non essent. Quod ē perpendiculis connectentibus intelligitur, quæ ex definitione sunt æqualia inter parallelas, & si ē perpendicularibus fiant obliquæ, manebunt æquales mutatis angulis.

Et

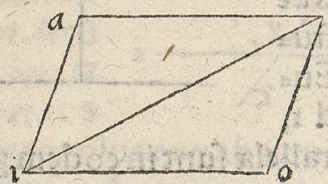


f 2

6. Si res

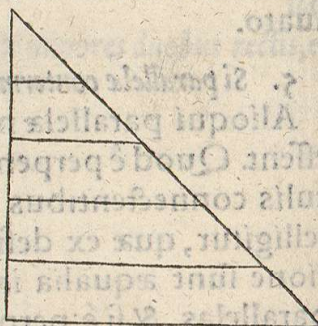
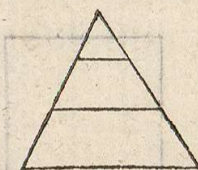
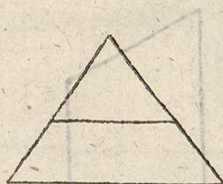
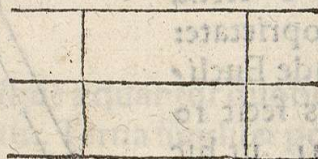
6. Si rectæ conterminent eadem parte æquales & parallelas, sunt æquales & parallelæ.
33 p I.

Potuit vero elementum concludi è proximo, addici tamen etiam potest ex antecedentibus: ut ae & io æquales parallelæ cōterminentur, ab ai & eo , & ducat ei . Hic quia recta ei incidit in parallelas ae & io , anguli alterni aei & ioe æquantur per 12 e, & æquantur crurib. ae & io per thesin & ei cōmuni. Itaq; per 1 c 6 e 3 æquantur basi ai & eo . Hoc primum est. Tum per 12 e, anguli alterni eia & ieo æquantur inter se, eosque faciunt rectæ ai & eo sectæ per rectā ei : sunt igitur parallelæ, quod erat secundum. Eadem vero parte dictum est, ne oppositis terminis, connexas rectas quispiam intelligeret, ut hic.



13. Si lineæ rectæ parallelis pluribus rectis interfecantur, intersegmenta sunt proportionalia. è 2 p 6 & 17 p II.

Adhuc de perpendicularo & parallelismo planarum, rectarum proportio postrema est, cujus elementum veritatis suæ causam ostendit ex ipso parallelismo, idque per omnes rationis species æqualitatis & inæqualitatis majoris minorisque. Nam si intersectæ sunt perpendiculares, segmenta intra duas parallelas æquantur: Communia enim perpendiculara parallelismum faciunt, ut antea jam patuit: ut hic. Quod si intersectæ annuant, non jam segmenta quidem illa bina æqualia sunt, sunt tamen proportionalia: quantoque major intersecta fuerit, tanto majora erunt ipsius intersegmenta, quanto minor tanto minora. tertia autem parallela in vertice nō expressa tamē intelligatur.



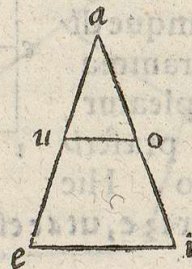
Hæc per species inductio rationum est Euclidis 1 33 p 6 demonstratio, ut in scholis dicitur. Est autem elementum hoc magnæ fecunditatis: hinc enim est primum sectio lineæ secundum datam rationem, & inventio tertiæ & quartæ proportionalis.

Itaque

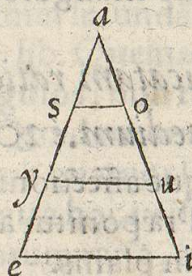
1. Si recta

1. Si recta cum data faciens angulum secetur data ratione, parallela à segmentorum terminis in finem datae & contingens in ea punctum secabunt datam data ratione.

Confectarium est valde generale ad omnem datam rectam sectionem sive bifariam sive trifariam, sive quotlibetfariam, sive omnino ratione quamcunque deris, secanda sit. Euclides ex hac materia fecit 9 & 10 p 6. Secunda sit primo data recta ae bifariam, rectaque cum data faciens angulum sit ai infinita, seceturque ao , & deinceps per 2 c 5 & aequalis assumatur oi , & ducantur per 3 c 12 & parallela à punctis i & o in finem datae, & u contingens in ea punctum. Tertia autem parallela per verticem a intelligitur, neque exprimi necesse est. Itaque ae per 13 e bisecatur, & ut ao ad oi , sic au ad ue . sed ao ad oi sunt dimidia partes. Itaque & au , & ue sunt etiam dimidia. Atque hic etiam 7 e comprehenditur non argumenti quidem sed effectus genere. At argumentum illud quidem brevius est, hoc autem est generalius. Jam secetur ai in tres partes, quarum prima sit dimidia secunda, secundaque

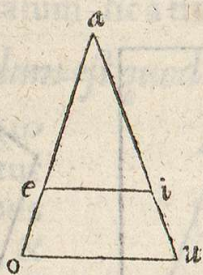


tertia & contermina datae secetur una parte ao , tum ea duplicetur in ou , denique ui assumatur dupla ipsius ou , totumque diagramma tribus parallelis compleatur ie , uy , os , quarta parallela ad verticem, ut dictum est, intelligetur. Itaque sectio erit in data, quae facta est in contermina per 13 e, quia sunt inter parallelas intersegmenta. Et



2. Si duae datae rectae facientes angulum continuentur, prima aequaliter secunda, secunda infinite, parallela à terminis primae continuationis in principium secundae, & contingens in ea punctum interfecabunt tertiam proportionalem. 11 p 6.

Sunto data rectae facientes angulum ae & ai , & prima ae continuetur aequaliter ipsi ai , & ipsa



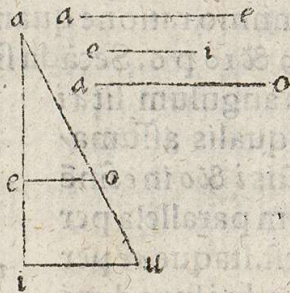
ai continuetur infinite, tum parallela ei & ou à terminis primae continuationis in i principium secundae, & u contingens punctum in secunda, secant iu tertiam proportionalem. Nam per 13 e ut ae ad e o id est per fabricam ad ai , sic ai ad iu . Et

f 3

3. Si e da

3. Si è datis tribus rectis prima tertiaque facientes angulum continentur, prima equaliter secunda, tertia infinite, parallela à terminis primæ continuationis in principium secunda & contingens in ea punctum interfecabunt quartam proportionalem. 12 p. 6.

Sunto data prima ae secunda $e i$ tertia ao , totumque diagramma cōpleatur ex præscripto. Hic per iz , ut ae est ad ei , sic ao ad ou .



P. RAMI GEOMETRIÆ LIB. VI.
de triangulo.

Plana similia habent duplicatam rationem homologorum laterum, & unum proportionale medium. 20 p. 6, II & 18 p. 8.

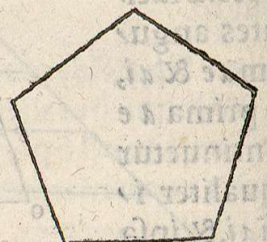
Adhuc de lineis planis earumque affectionibus actum est: sequitur de figuris planis earumque generibus. Præponitur autem commune consuetarium 15 & 4, quia dimensio duplex est in planis.

2. *Planum est rectilineum aut obliquilineum*

Rectitudinis vero & obliquitatis differentia lineæ fuit 4 & 2: unde nunc repetitur dichotomia plani à terminis rectis vel obliquis, & eadem causa præponitur modo rectilineum, quæ prius recta lineæ præposita est obliquæ.

3. *Rectilineum est planum, quod comprehenditur à lineis rectis.*

Hinc est 9 & 20 d. 1, quod angulus planus rectilineus sit, qui comprehenditur à rectis lineis, quod figura rectilinea sit: quæ comprehenditur à lineis rectis, sed generale melius erit generatim, ut in exemplis.



4. *Rectilineum aequat angulos rectis interiores quidem generatim à binario paribus, externos autem quaternis.*

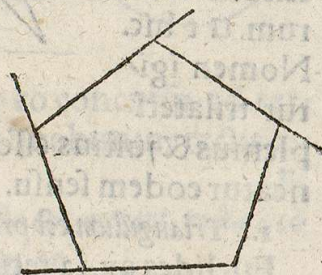
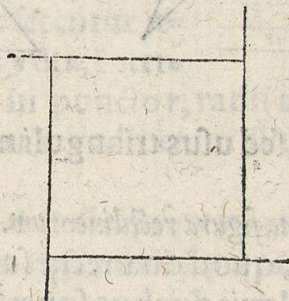
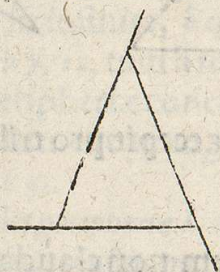
Primum

Primum nempe genus rectilinei, id est triangulum aequat interiores duobus rectis, id est binario, primo pari rectorum: secundum id est quadrangulum secundo pari id est quaternario, tertium quinquangulum tertio, id est senario rectorum, & quartum quarto, quintum quinto, & sic deinceps rectilinei genera paribus rectorum ita respondet: ut vides in hac arithmetica, progressionem parium

2. 4. 6. 8. 10. 12.

3. 4. 5. 6. 7. 8.

Externi tamen quolibet latere continuato, rectorum quaternario semper aequantur.



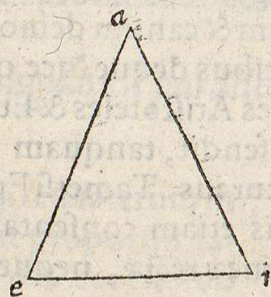
Itaque geometria haec singularis est & mysterii cuiusdam plena, jam olim iactata in scholis geometrarum. Proclus enim secundam partem de externis rectorum quatuor aequantibus, sic affirmat 11 cap 1 lib. Quemadmodum (ait) etiam quatuor rectorum aequales externos habere angulos, non triangulis modo, sed omnibus rectilineis inest. Item cap 7 lib 2. Quaedam mutuo confirmantur. Nam & ex eo quod externi rectilineorum anguli quatuor sunt rectis aequales: interiorum rectorum aequalium multitudo, & contra hoc ex illo demonstratur. Hae ille. Ut autem ab externis probetur interiorum ratio, si Proclus ipse demonstrasset, hoc illi beneficium deberetur: ab interioribus vero per genera probatur de externis. Nam trianguli tres anguli aequantur duobus rectis, quadranguli quatuor, quinquanguli sex, sexanguli octo, septanguli decem, atque ita deinceps a binario paribus, unde per 1 c 8 e 5 perpetuus externorum quaternarius concluditur.

5. *Rectilineum est triangulum aut triangulatum.*

Ut a linea lineatum, sic a triangulo triangulatum dicatur.

6. *Triangulum est quod comprehenditur a tribus lineis rectis. 21 d 1.*

Ut aei. Triangula figura definitur ab Euclide a tribus lateribus, unde & trilaterum tanquam ex causa melius appellaretur quam triangulum ex effectis: praesertim cum



tres anguli cum tribus lateribus nequaquam reciprocentur. Triangulum enim potest esse quatuor laterum, ut *amidoceles* velut cuspidatum: Zenodorus id vocat

id vocabat

πολλόγων ca

vangulum,

& potest

quinque &

sex esse late-

rum. ut hic.

Nomen igitur

trilateri

plenius & iustius esset, sed usus trianguli nomen accepit pro trilatero, & sane te-
neatur eodem sensu. Itaque

1. *Triangulum est prima figura rectilineorum.*

Euclides ax. 12 fecit, quod duæ rectæ superficiem non claudant: & Vitellio 4 postulato primi postulavit duabus superficiebus planis corpus non claudi: at negatio est ex opposito huius elementi. trilaterum est prima figura rectilineorum: Ergo in figuris rectilineis nulla est bilatera, neque duæ rectæ figuram faciunt. Quid autem sit prima figura, patuit 7 e 4. Et

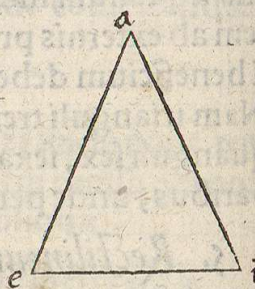
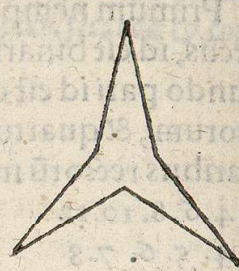
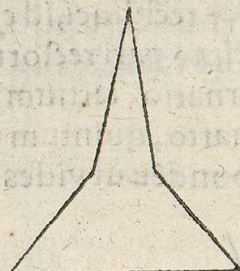
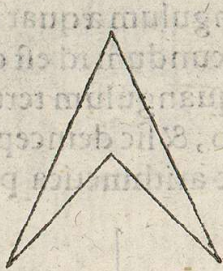
2. *Si recta infinita secat angulum, secat basin. Vitell. 29 t 1.*

7. *Trianguli duo qualibet latera sunt maiora reliquo.*

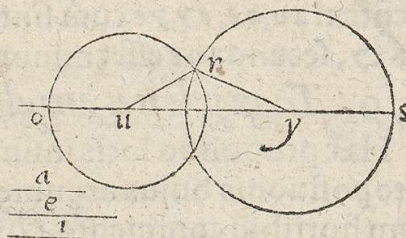
Definitum est triangulum, sequitur ratio in lateribus & angulis trianguli. Prima ratio Euclidis est 20 p 1 de ratione laterum. Esto igitur triangulum *a e i*: dico lateribus *a e* & *e i* brevius esse latus *a i*, quia per *c* 5 e 2 recta intra eosdem terminos est brevissima. Simillima propositio huic est 20 p 11, de qua erit in stereometria. Euclides hanc propositionem anxia hystorologia demonstrat, de qua in scholis. Itaque Epicureis materiam irridendi sui præbuit, ut ipsum cavillarentur, demonstrare quæ vel asinis manifesta essent. Esto enim (ajebat Sidonius Zeno) famelicus asinus in angulo *a*, pabulumque in opposito angulo *e*, asinus recta *a e* protinus ad pabulum accurret, neque duo latera peragrabit. Natura si quidem agit in omnibus secundum breviores lineas, ut Vitellio 5 p 5 exemplo aranearum & canum demonstrat, & cap 5 lib. 1 Halacenus idem prius dixerat de ponderibus deque luce, quæ non obliquis, sed rectis lineis feruntur: sed ante hos omnes Aristoteles & Euclides ipse idem senserant. Proclus tamen hic Euclidem defendit, tanquam scientificas rationes secutum, non sensum iudicem, ut Epicureus. Tametsi Epicurea illa ratio non solum physica, sed geometriæ principiis etiam consentanea sit: rationem tamen iudicem sequamur: ut è definitione lineæ rectæ, neque interea Euclidis elenchum faciamus. Itaque

1. *Si tres rectæ sint duæ qualibet maiores reliqua, peripherieque à terminis unius intervallis reliquarum concurrant, radii à concursu ad dictos terminos constituent triangulum.*

Euclidis



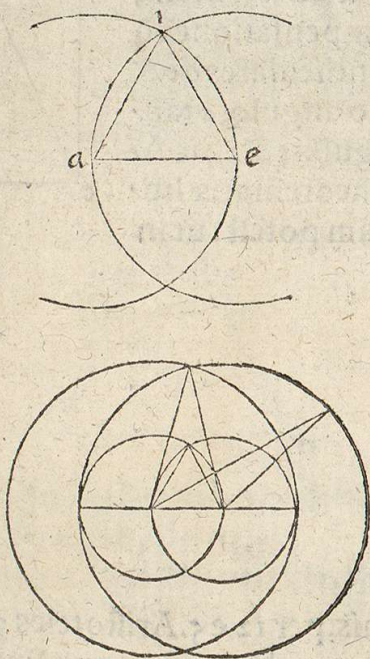
Euclidis est 22 p 11 ubi proponit constituere triangulum ex tribus rectis, quæ sint tribus datis æquales, & duæ quælibet secundum proximam trianguli legem majores reliqua. Problema igitur jubet ædificare triagulum quodcumque optaveris. Optetur igitur triangulum e tribus rectis a, e, i , duabus quibuscvis reliqua majoribus: & recta sit infinita, e qua tres secantur æquales datis ou, uy, ys , tum à terminis y & u , intervallis ou & ys peripheriæ concurrant in puncto r , radii ab eo concursu ad terminos u & y constituent triangulum ury : radii enim illi æquabuntur rectis æquatis. per 3 c 5 e 5.



Et

2. Si duæ æquales peripheriæ à terminis datæ rectæ ejusque intervallo concurrant, rectæ à concursu ad dictos terminos constituent triangulum æquilaterum super datam. 1 p 1.

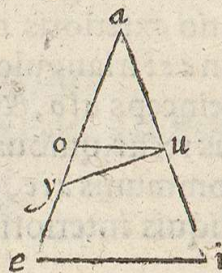
ut hic super ae constituitur triangulum $a e i$, & similiter institui possit fabrica æquicruri e communi radio non æquante datæ, & variis e tribus diversis radiis, quæ omnia in eadem figura hic proposita sunt: at



specialia hæc in generali problemate continentur, neque novam ullam geometriam interpretantur.

8. Si recta in triangulo est parallela basi, secat crura proportionaliter: & contra. 2 p 6.

Ejusmodi igitur ratio est laterum in uno triangulo, sequitur proportio laterum: ut hic in triangulo $a e i$ esto ou parallela basi, & intelligatur in a vertice tertia parallela. Itaque per 13 e 5 intersegmenta sunt proportionalia. Conversa cogitur ex antecedente, quia to-

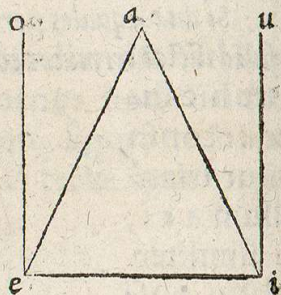


g tum est

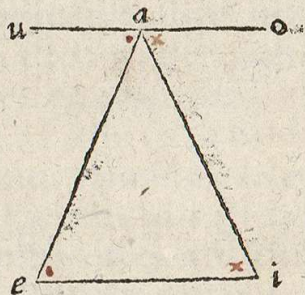
tum esset minus parte. Nam si parallela non sit ou , est yu , hic per thesin & anteceden-
dentem ao, oe, ay, ye cum sint proportionales, & prima ao sit minor quam ter-
tia ay , secunda oe esset minor quarta ye , totum parte.

9. *Trianguli tres anguli sunt æquales duobus rectis* 32 p 1.

Hæc propositio locis infinitis Aristoteli proposita est, & videtur philosophus
propositionis hujus argumento apodicticam analysin commentus esse, sed de
tam horribili commento (quo tot ingenia tot sæculis decepta sint) est in scho-
lis & logicis & geometricis. Explicata igitur est hæcenus, comparatio in trian-
guli lateribus, explicatur deinceps ratio in angulis, qui simul æquantur duo-
bus rectis. Veritas autem hujus propositionis (ait Proclus) secundum commu-
nes notitias apparet duobus perpendicularis ad basin ere-
ctis: quantum enim inclinationis nutu imminuitur ex
angulis rectis ad basin, tantum assumitur ad verticem,
duorumque rectorum æqualitas ista compensatione cõ-
struitur: at hic in triangulo aei , si perpendiculares oe &
 ui sensim inclines ad a , percipies in tertio angulo, a tan-
tum assumi, quantum detrahitur de angulis e & i . Sic A-
ristoteles 9 cap 2 Phys. repetit causam theorematis hu-
jus ex angulo recto: concludi tamen etiam potest: ut in



triangulo aei sit
per 3 e 12 e 5 paral-
lela ou contra ie .
Hic tres particula-
res anguli $iao, iae,$
 eau æquatur duo-
bus rectis per 1 c 8
e 5: sed tribus illis
interiores æquan-



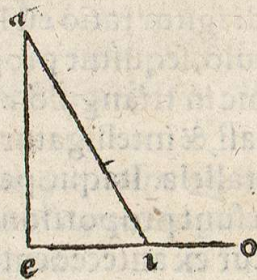
tur: primo eai sibi ipsi, tum reliqui alternis, per 12 e 5. Aristoteles 9 Philoso. quæ-
rit cur duo recti in triangulo, respondet quod ad unum punctum anguli sunt
æquales duobus rectis, quæ Euclidis demonstratio est, de qua in scholis. Itaque

1. *Trianguli duo quilibet anguli sunt minores duobus rectis.*

Nam si tres æquales sunt, duo sunt minores. Euclides fecit 17 p 1, quæ con-
sectarii loco hic assumitur.

2. *Continuato latere, exterior angulus æquatur duobus interioribus oppositis.*

Hæc ratio est interiorum angulorum in uno
triangulo: sequitur ratio exterioris cum interi-
oribus oppositis, ut in aei triangulo continue-
tur latuse ei in o , duo deinceps aio , & aie , per 1 c
8 e 5 æquantur duobus rectis, quibus æquantur
interiores: tollatur communis aie , exterior re-
linquetur æqualis reliquis interioribus & op-



positis

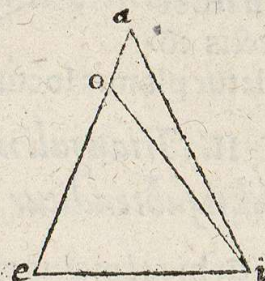
positis. Euclides fecit partem 32 p 1.

3. Est major utrolibet interiore opposito.

Euclides etiam hoc proposuit 16 p 1. at pari lucro assumitur.

10. Si triangulum est æquicrurum, est in basi æquiangulum: & contra. 5 & 6 p 1.

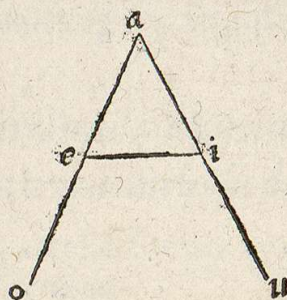
Sic Euclides trianguli affectionem complectitur nomine *ισοσκελές* æquicruri, sive triangulum sit æquilaterum sive æquicrurum tantum. Antecedens patet per 1 c 6 e 3. Conversa patet per impossibile. Nam si crus alterum majus esset, ut *ae*, amputetur per 2 c 5 e 5 æquale *oe*, & connectatur *oi*, tum per 1 c 6 e 3 basis *oi* æquaretur basi *ae*: at basis *oi* minor est. Nam per 7 c 1 a & *ao* (quibus æquatur *ae* cum *oe*) ponatur æqualis ipsi *ai*, & *ao* sit communis, maiores sunt ipsa *oi*. Itaque eadem *oi* esset æqualis ipsi *ae*, & minor eadem. Thaletis Milefii hoc inventum est.



Itaque

1. Si trianguli æqua crura continentur, anguli sub basim æquabuntur.

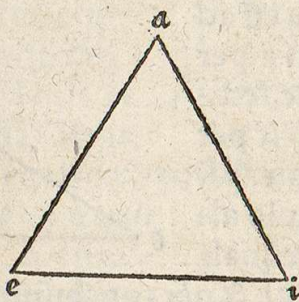
Anguli enim *aei* & *ieo*, item *aie* & *ei* u bini æquatur duobus rectis, per 1 c 8 e 5.



Itaque etiam inter se: detractis igitur interioribus æqualibus exteriores æquales relinquentur. Euclides fecit partem 5 p 1.

2. Si triangulum est æquilaterum est æquiangulum: & contra.

Confectarium est tri-
anguli æqui-
cruri lege de
duobus &
cruribus &
angulis, ut in
exemplo *aei*
demonstrabitur.



3. Angulus trianguli æquilateri valet duas tertias recti.

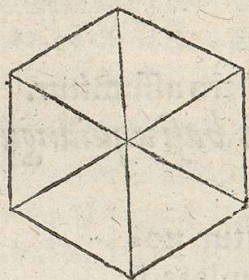
Nam cum 3 anguli æquales æquentur 2 rectis, 1 æquabitur $\frac{2}{3}$. Est 23 p 1

Et

40 4. Triangula sex æquilatera complent locum.

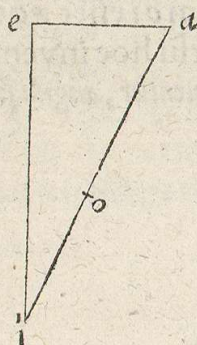
g 2 ut hic

Ut hic. Nā
sexies $\frac{2}{3}$ re,
cti, sunt $\frac{12}{3}$
recti, id est
quatuor
recti: At
quatuor
rectis cō-
pletur planus locus, per 16 e 4 Ut hic.



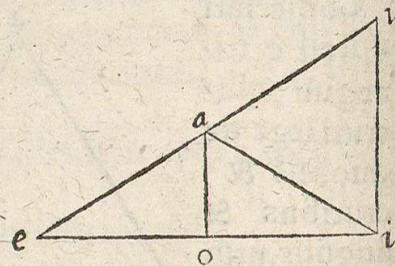
II. *Trianguli majus latus subtendit majorem angulum, & major angulus subtenditur à majore latere.* 19 & 18 p 1.

Ut hic *a i* majus esto latus quam *a e*, major erit angulus *a d e* quam *a d i*. Sece-
turenīm ex *a i* æqualis ipsi *a e*, sit
que *i o*, tum angulus *a e i* æquicru-
rus angulo *o i e* major erit basi
per thesin, ideoque major per 3
c 6 e 3. Conversa patet eadem fi-
gura: ut *a e i* angulus sit major
angulo *a i e*. Itaque per idem 3 c
6 e 3 major est basi. Quæ enim de
angulis generaliter illic propo-
nuntur, huc specialiter assumun-
tur de angulis in triangulo.



12. *Si recta in triangulo bisecat angulum, secat basin ratione crurum:*
& contra. 3 p 6.

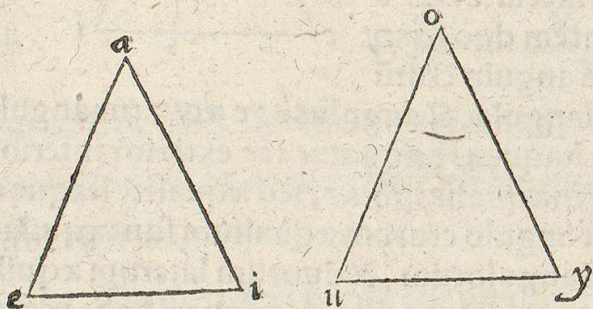
Superest mista proportio de lateribus & angulis. Esto triangulum *a e i*, & bise-
ctus sit angulus *e a i* per rectam *a o*, dico ut *e a* est ad
a i, sic *e a* esse ad *o i*: erigatur enim parallela *i u* per
3 c 12 e 5 contra *o a*, & continuetur *e a* infinite, seca-
bit ipsam *i u*, per c 11 e 5: secetur igitur in *u*. Hic per
13 e 5, ut *e a* ad *a u*, sic *e o* ad *o i*. At *a u* æquatur ipsi
a i per 10 e. Nam angulus *u i a* æquatur angulo al-
terno *o a i* per 12 e 5, & per thesin angulo æquali
o a e, & per 12 e 5 æquatur interiori angulo *a u i*, & per conclusum æquali *u i a*. Ita-
que per 10 e, *a u* & *a i* æquantur. Ergo ut *e a* ad *a i*, sic *e o* ad *o i*. Conversa similiter
demonstratur in eadem figura. Nam ut *e a* ad *a i*, sic *e o* ad *o i*, & sic *e a* ad *a u*, per 8
e. Itaque æquantur *a i* & *a u*, item anguli *e a o* & *o a i* æquantur angulis ad *u* & *i*
per 12 e 5, æqualibus inter se per 10 e.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. VII.
de comparatione triangulorum.

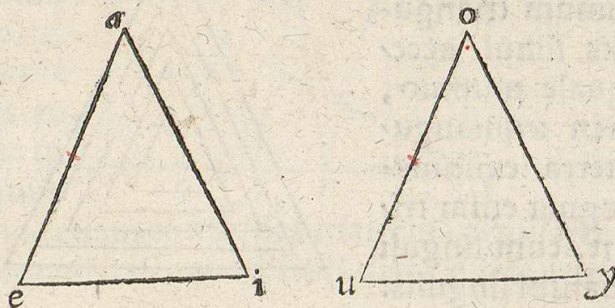
Triangula æquilatera sunt equiangulara. 8 p 1.

Atque hæc de geometria unius trianguli, sequitur triangulorum duorum inter se comparatio, primum ratio est lateribus & angulis: unde triangula inter se dicuntur æquilatera & æquiangulara. Primum ex æqualitate laterum, æqualitas ducitur & angulorum. Triangula igitur hic conjunctim æquilatera dicuntur, quorum latera singillatim equalia sint, primum primo, secundum secundo, tertium tertio, etiam si singula triangula separata sint in æquilatera. æquales igitur angulos ostendit æqualitas laterum, per 1 c 6 e 3, ut hic.

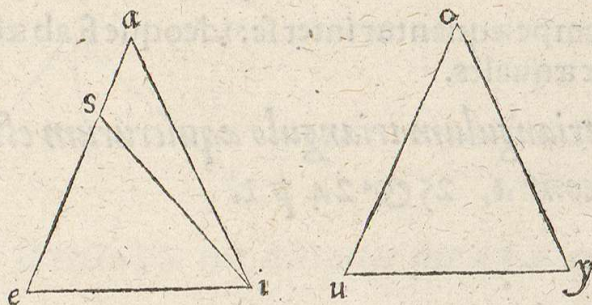


2. Si duo triangula æquantur angulis vel duobus equicruris vel binis equalis aut cruris aut basis duorum, sunt æquilatera. 4 & 26 p 1.

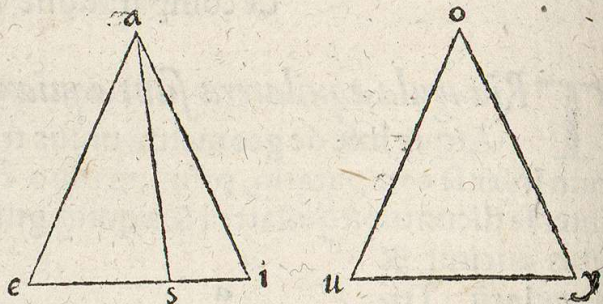
Prima pars patet sic. Sinto triangula aei, ouy: quia anguli ad a & o æquales sunt æquicruri, æquantur basi per 1 c 6 e 3. Secunda sic. Sinto triangula aei & ouy æqua binis angulis ad e & i, ad u & y, & æquantur crure ei & uy: dico æquilatera esse. Nam si latus ae



(exempli causa) sit majus latere ou, amputetur æquale es, & connectatur is. Hic per antecedentem triangula sei, & ouy æquiangulara erunt, & angulus sie æquabitur angulo oy u, cui totus aie æquatus est ex thesi. Itaque equarentur totum & pars. Quare latus ae non est inæquale, sed æquale, & per antecedentem partem

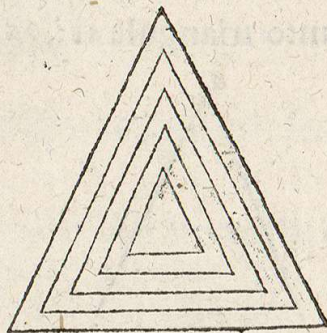


triangula aei & ouy æquicrura æquantur angulo crurum, itaque & basi ai & oy .
 Tertia pars sic cogitur, ut in trian-
 gulis aei & ouy sint anguli ade & i
 adu & y equales, ut prius, & basi ae
 anguli adi æqualis basi ou , anguli
 ady : dico æquilatera esse. Nam si
 latuse ei sit majus latere uy , ampute-
 tur æqualis es , & connectatur as . I-
 taque per antecedentem duo trian-
 gula aes & ouy æqua angulo crurū
 æqualium sunt æquiangula, & angulus ase æquatur angulo oyu æquanti per
 thesin angulum aie . Itaque ase æquatur aie exteriori interiori, contra 2 c 9 e 6.
 Ergo basis ei non est inæqualis ipsi uy , sed æqualis. Itaque ut prius duo trian-
 gula aei & ouy æqua angulo crurum æqualium sunt æquilatera. Hic notabis ex
 æqualitate binorum angulorum, & duorum laterum æquilatera triangula fie-
 ri: neque satis esse angulos duos æquales æquari basi, ut æqualitas crurum cō-
 cludatur. De hoc enim elencho monuimus 2 c 6 e 3. Quod si binos æques an-
 gulos non ad crus æquale, accidet triangulum multo majus, minori tamen æ-
 quale esse, quod apud Proclum Porphyrius diserte & accurate exposuit: de
 quo erit in scholis. p. 182.



3. Triangula æquantur ternis angulis.

Quia tres anguli in quoli-
 bet æquatur duob. rectis:
 ut hic maximum triangu-
 lum angulis simul acce-
 ptis est æquale minimo,
 neque tamen æquiangu-
 lum propterea existime-
 tur: æquiangula enim tri-
 angula sunt, cum singuli
 anguli æquantur singulis:
 non autem universi universis.



Itaque

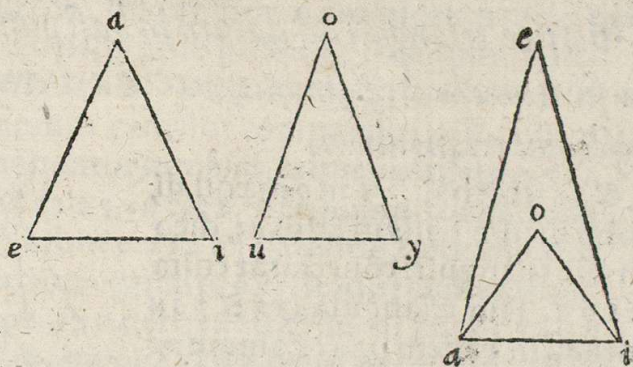
Si bini anguli duorum triangulorum æquantur, reliqui æquantur.

Terni nempe æquantur inter se: ideoque si ab æqualibus tollas æquales, re-
 linquentur æquales.

4. Si triangulum triangulo æquicrurum est majus basi, est majus an-
 gulo: & contra. 25 & 24 p 1.

Adhuc

Adhuc ratio
fuit æqualitatis
in lateribus &
angulis trian-
gulorum, sequi-
tur ratio inæ-
qualitatis as-
sumpta è com-
muni & genera-
li inæqualitate



angulorum. Primum est è 3 c 6 e 3. Ut vides in $a e i$ & $o u y$.

5. Si triangulum triangulo in eadem basi est minus interioribus cruri-
bus, est majus angulo crurum.

Hoc item est è 4 c 6 e 3, Euclidi est 21 p 1 de triangulo in eadem basi per tri-
angulum majus comprehenso, & tamen sine conversa: ut $a o i$ interius in eadem
basi minus cruribus, quam $a e i$.

6. Triangula æquealta sunt ut bases. è 1 p 6.

Ergo hæc triangulorum ratio est, sequitur proportio triangulorum, primum
de recta cum basibus. Confectarium est è 12 c 4.

Itaque

1. Inæquali basi sunt æqualia.

Id confectarium fuit genera-

le 12 c 4, unde etiam conclusit

Archimedes 7 theo. 1 de sphæ.

Si triangulum triangulis æque

altum habet basim basibus æ-

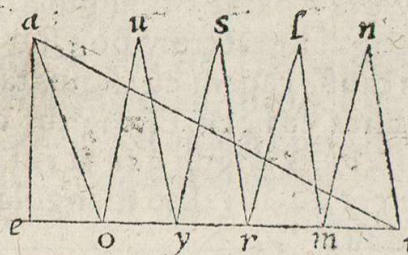
qualem, æquatur universis: ut

hic vides $a e i$ equari triangulis

$a e o$, $u o y$, $s y r$, $l r m$, $n m i$.

Hinc etiam concludes triangula æquilatera esse æqua-

lia, quia æquealta sunt inæquali basi, quod Euclides 4 p 1 conclusit per $i p a p$



Et

2. Si recta à vertice trianguli bifecat basin, bifecat triangulum, & diameter est trianguli.

Uthic vides. Bifeg,

menta enim sunt tri-

angula æquealta, nē-

pe communis verti-

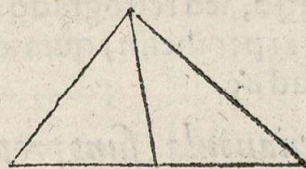
cis intra easdem pa-

rallelas, & in basibus

æqualibus.

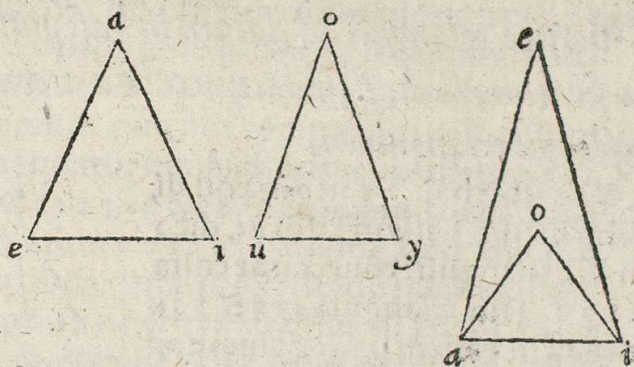
Ergo æqualia & recta illa erit diameter per 5 c 4, quia est per

centrum.



7. Si recta

Adhuc ratio
fuit æqualitatis
in lateribus &
angulis trian-
gulorum, sequi-
tur ratio inæ-
qualitatis as-
sumpta è com-
muni & genera-
li inæqualitate



angulorum. Primum est è 3 c 6 e 3. Ut vides in *a e i* & *o u y*.

5. Si triangulum triangulo in eadem basi est minus interioribus cruri-
bus, est majus angulo crurum.

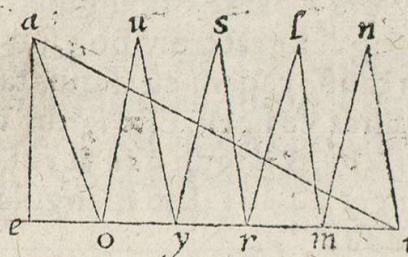
Hoc item est è 4 c 6 e 3, Euclidi est 21 p 1 de triangulo in eadem basi per tri-
angulum majus comprehenso, & tamen sine conversa: ut *a o i* interius in eadem
basi minus cruribus, quam *a e i*.

6. Triangula æquealta sunt ut bases. è 1 p 6.

Ergo hæc triangulorum ratio est, sequitur proportio triangulorum, primum
de recta cum basibus. Confectarium est è 12 e 4. Itaque

1. Inæquali basi sunt æqualia.

Id confectarium fuit genera-
le 12 e 4, unde etiam conclusit
Archimedes 7 theo. 1 de sphæ.
Si triangulum triangulis æque
altum habet basim basibus æ-
qualem, æquatur universis: ut
hic vides *a e i* equari triangulis



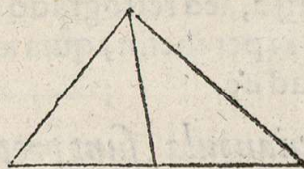
a e o, *u o y*, *s y r*, *l r m*, *n m i*. Hinc etiam concludes triangula æquilatera esse æqua-
lia, quia æquealta sunt inæquali basi, quod Euclides 4 p 1 conclusit per *ip a p*

40010.

Et

2. Si recta à vertice trianguli bisecat basin, bisecat triangulum, & diameter est trianguli.

Uthic vides. Biseg-
menta enim sunt tri-
angula æquealta, nē-
pe communis verti-
cis intra easdem pa-
rallelas, & in basibus
æqualibus. Ergo æqualia & recta illa erit diameter per 5 e 4, quia est per
centrum.

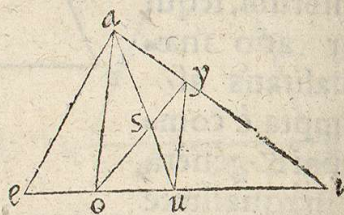


7. Si recta

æquilatera sunt
Rang erat dimidia
trianguli. vides pag
75.

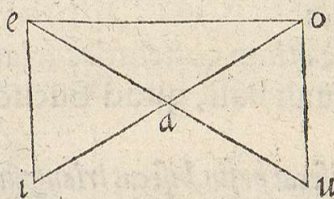
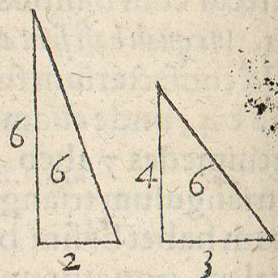
7. Si recta est a vertice trianguli ad datum in basi punctum non medium, & parallela sit a medio basis in latus, recta a vertice parallela in dictum punctum bisecabit triangulum.

Esto triangulum aei , & ao secet basim ei in o inaequaliter, & uy sit parallela ab u medio basis in latus ai , dico rectam yo bisectricem esse trianguli: conectatur enim au , ea bisecabit per 2 c 7 e. Jam triangu-
la ayu & you aequantur, quia aequae alta in eadem basi: commune tollatur ysu , relinquentur aequalia asy & osu , commune rectilineum ysu addatur utrique aequalium, tum oyi aequabitur dimidio au : Itaque & reliquum rectilineum $aeoy$ dimidium erit. Jordani est 21 p 1, ubi sunt 22 & 23 p, de dato puncto intra & extra triangulum, quae geometria si ab aliquo sine mendis ederetur, permagna esset utilitas quidlibet figura triangula comprehensum in dato puncto bisecandi, ut plerumque est inter coharedes puteus, fons, arbor, & similia.



8. Si triangu-
la equiangula reciprocantur cruribus aequalis anguli, sunt aequalia: & contra. 15 p 6.

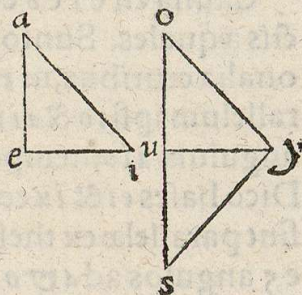
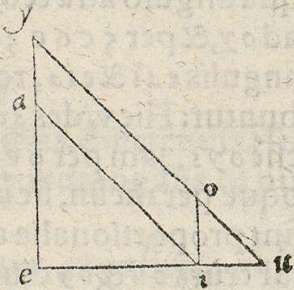
Proportio directa in triangulis ea est, reciproca sequitur. Confectarium est e 13 e 4, quod manifestum est, quoties aequalis angulus rectus est: tum enim crura ista aequales sunt altitudines & bases: Ut hic vides separatis triangulis. In triangulis autem obliquangulis licet crura non sint altitudines, veritatis tamen causa eadem est: si quis tamen demonstrationem requirat, ea sic est. Esto igitur diagramma in triangulis aei , aoi , & anguli oau & eai aequales, sitque ut ua ad ae , sic ia ad ao : dico triangu-
la aoi , eai aequari. Nam ua ad ao ad ae est ut ua ad ae per 6 e, & ia ad ao per thesim, est ut e ad ae ad ao . Itaque ua & e ad ae ad ao sunt proportio-
nalia, ideoque aequalia sunt inter se. Conversa eodem sortite, sed retrogrado concluditur. Nam ua ad ae est ut ua ad ao ad ae per 6 e, & ut e ad ae per thesin, quia aequalia, & ut ia ad ao per idem. Quare ua est ad ae , sicut ia ad ao .



9. Si duo triangu-
la sunt equiangula, sunt proportionalia cruribus: & contra. 4, 5 p 6.

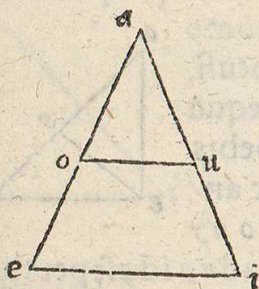
Comparatio & rationis & proportionis triangularis antecessit, restat extrema similitudo triangulorum, quae constat illa quidem e ratione angulorum & proportio-

proportione crurum. Itaque merito angulorum ratio præponitur, unde crurum non ratio, sed proportio posterior colligitur. Sunt igitur triângula aei & ioy æquiângula, & ad eandem rectam ei in communi puncto i comparata: oi & ae cum anguli ad i & e ponantur æquales, erunt parallelæ per 12 e 5. Itaque per 1 c 12 e 5 uo & ea continuatæ concurrent. Idem rectæ ai & yu sunt per 12 e 5 parallelæ, quia angulus ai æquatur interiori opposito oui . Itaque cum ai sit parallela basi yu , per 12 e 5 erit ea ad ay , id est per 5 c 12 e 5 ad io ut ei ad iu , & alterne ea ad ei ut io ad iu . Hæc prima est proportio. Item cum oi sit parallela basi ye erit yo , id est per 5 c 12 e 5 ai ad ou ut ei ad iu , & alterne ai ad ie , ut ou ad ui . Hæc secunda est proportio. Denique æque ordinate ae est ad ai , ut oi ad ou . Quare si triângula sunt æquiângula, sunt proportionalia cruribus. Conversa sic patet. Sunt triângula proportionalia cruribus aei , ouy , & ut ae est ad ei , sic esto ou ad uy , & ut ai est ad ie , sic esto oy ad yu . Tum ad puncta u & y æquentur per 5 c 6 e 3 anguli angulis ad e & i , & fiat triângulum uys , reliqui anguli ad a & s æquabuntur per c 3 e, & triângulo yus erit æquiângulum datum aei , & per antecedentem cruribus proportionale: ita duo triângula ouy ex thesi, & uys ex fabrica sunt cruribus proportionalia eidem aei , & ut ae ad ei , sic ou ad uy , sic u ad uy . Itaque cū ou & su ad idem uy sint proportionalia, æquantur: item ut ai ad ie , sic oy ad yu , sic item sy ad yu . Itaque oy ad sy cum sint proportionalia ad yu , æquantur: yu commune latus est. Triângulum igitur ouy triângulo syu est æquilaterum: & per 1 e æquiângulum, ideoque æquiângulum triângulo aei : quod erat propositum. Generaliter autem prædictum est 1 c 14 e 4 de lateribus homologis subtendentibus æquales angulos.



Itaque
Si recta in triângulo est parallela basi, defecat triângulum æquiângulum toti, & minus basi.

Ut in aei triângulo ou defecat triângulum aei per 12 e 5 æquiângulum toti, & minus

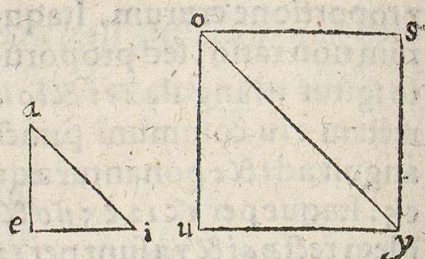


nus basi, ut patet per 9 e, & per alternationem laterum.

10. Si duo triângula sunt proportionalia cruribus æqualis anguli, sunt æquiângula. 6 p 6.

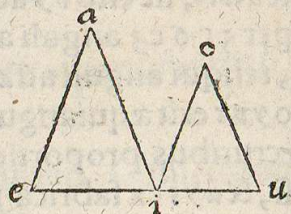
h Sinto

Sunt igitur proposita triacula aei & ouy qua angulo ad a & o , & cruribus ea ad ai sicut uo ad oy , & per 5 c 6 e 3 aequentur anguli soy & oys angulis eai & eia , reliqui ad s & e per c 3 e aequabuntur: Hic vides aei triangulum aequiangulum esse oys . Jam per 9 e, ut ea ad ai , sic so ad oy , ideoque per thesin, sic uo ad oy . Itaque cum uo & os sint proportionalia ad oy aquantur. Denique si commune addatur oy , aquantur crura ou & oy cruribus so & oy , & per c 3 e reliqui anguli. Quare secundum triangulum tertio similiter aequiangulum erit: ideoque si triacula proportionalia cruribus aquantur angulo crurum, sunt aequiangula.



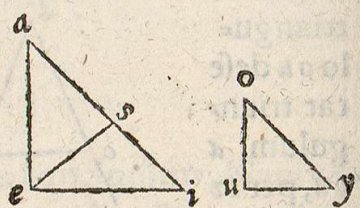
II. Si cruribus proportionalia & alterne parallela intermedium angulum faciunt, bases habent in rectam continuas. 32 p 6.

Causa est e 1 c 8 e 5. Nam duos utrinque facient cum incidente ai duobus rectis aequales. Sunt triacula aei & oiu proportionalia cruribus, ut ea ad ai , sic io ad ou , & ea sit parallelum ipsi io & ai ipsi ou , item faciat intermedium angulum aio , nempe intermediis cruribus ai & oi : Dico bases ei & iu continuari in rectam. Cum enim sint parallela ex thesi ae & oi , recta ai faciet per 12 e 5 angulos ad a & o aequales alterno aio . Ideoque aequales inter se: tumque per 10 e data triacula sunt aequiangula. Itaque angulus oiu aequatur angulo aei . Tres igitur anguli oiu , oia , aie per 3 e aquantur tribus angulis trianguli aei aequantib. per 9 e 6 duos rectos, ideoque & ipsi duobus rectis aquantur. Quare per 1 c 8 e 5 ei & iu in rectam continuantur. Hac propositio adhibetur 17 p 13, & 29 p 1. Apollonii.



12. Si habeant unum angulum aequalem, alterum cruribus proportionalem, tertium homogeneum, sunt aequiangula. 7 p 6.

Sunt proposita triacula aequa angulo ad a & o , & proportionalia cruribus angulorum ad e & u , & reliquo angulo ad i & y homogenea, id est ut ambo anguli sint vel acuti, vel obtusi, vel recti, sed primo acuti. Dico reliquos ad e & u aequari: secus per 5 c 6 e 3 aequetur aes ipsi ouy , habebis per 1 c 3 e aequiangula, & angulus ase aequabitur angulo oyu , acutusque est uterque, ac per 9 e aes , ouy lateribus proportionalia: atque ut ae ad es , sic ou ad uy id est per thesim, sic ae ad ei . Itaque quia eadem oa ad duas es & ei habet eandem rationem, aquantur s & ei , & ideo per 10 e 6 anguli ad basim ins & i aquantur. Acutus igitur uterque, acutus item & ase contra 1 c 8 e 5. Idem vero prorsus accidet utroque reliquo vel obtuso, vel recto. Pars autem ultima de recto patet per c 3 e.



P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. V I I I.
de generibus triangulorum.

Triangulum est rectangulum vel obliquangulum.

Partitio trianguli sequitur ex angulis e communibus differentiis: sed hic specialis primum, & maximè momenti, ut erit in quadrangulis & prismatis.

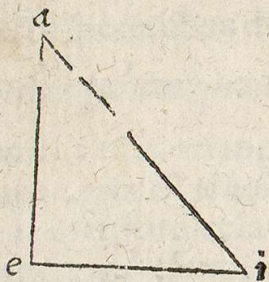
2. Triangulum rectangulum est quod habet unicum angulum: obliquangulum quod nullum. 27 d I.

Rectangulum triangulum in geometria præcipuas vires habet, & à præstantibus mathematicis non immerito magister matheseos appellatur. Itaque

1. Si duæ perpendiculares connectantur, constituent triangulum rectangulum.

ut in aei.

Hæc fabrica rectanguli ducitur e definitione recti anguli. Perpendiculares e-



nim rectæ recti anguli sunt artifices, ut patet 8 e 3.

Et

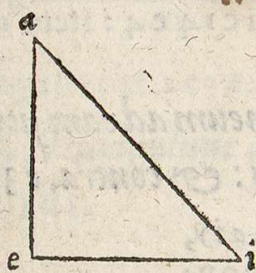
2. Si trianguli angulus ad basin rectus est, perpendicularis à vertice est crus alterum.

Ut in eodem exemplo.

3. Si triangulum rectangulum est æquicrurum, uterque angulus ad basin est dimidius recti: & contra.

Ut in

aei: æquatur enim ambo unum recto



per 9

e 6, & inter se per 10 e 6.

Itaque

1. Si trianguli angulus æquatur reliquis, est rectus.

Quia æqualis dimidio duorum rectorum. Confectarium est Euclidis ad 31 p 3.

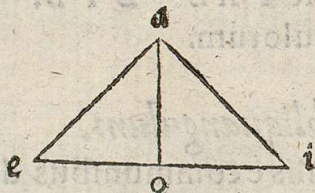
Et

2. Si recta à vertice trianguli bisecans basin est æqualis bisegmento, angulus verticis rectus est.

h 2

Ut in aei

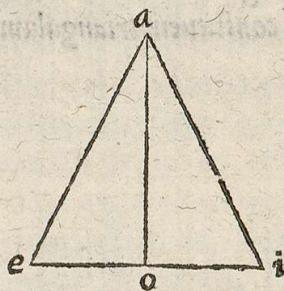
Ut in $\triangle aei$
 recta ao bi
 secans e i
 basin in o
 equalis sit
 ipsi eo di-



midio basis, facit triangula æquicrura, & particulares verticis angulos æqua-
 les extremis ade & ai per 10 e 6. Est Jordani 1 p. Itaque verticis angulus æquatur
 reliquis. Ideoque per 1 c rectus.

4. *Perpendicularis in triangulo ab angulo recto in basim secat trian-
 gula similia toti & inter se.* 8 p 6.

Ut in triangulo a
 ei perpendicularis ao
 secat triangula ao
 e & aoi similia toti,
 quia ipsi æquiangu-
 la: cum rectus utrin-
 que sit unus & alter
 communis in i & e .
 Reliquus igitur æ-



quatur reliquo, per c3 e 7. Itaque particularia triangula sunt æquiangularia toti,
 proportionaliaque cruribus æqualium angulorum, per 9 e 7: similia vero inter
 se triangula esse patet per 3 c 14 e 4.

Itaque

1. *Perpendicularis est proportionalis inter segmenta basis.*

Ut io ad oa , sic oa ad oe , quia æqualium angulorum crura sunt proportio-
 nalia per 4 e. Hinc Platonis mesographus inventus, de quo in scholis.

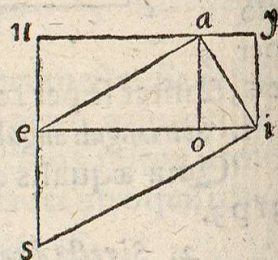
Et

2. *Crus utrumlibet est proportionale inter basim & basis segmentum conterminum.*

Ut enim ei ad ia in toto triangulo, sic ai ad io in minore. Sic enim homologa
 sunt latera, quæ subtendunt æquales angulos per 1 c 14 e 4: item ut ie ad ea
 in toto triangulo, sic ae ad eo in minore.

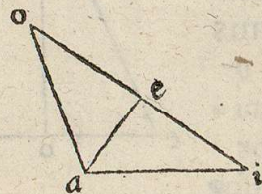
5. *Si basis trianguli subtendit rectum, rectilineum ad eam situm æqua-
 tur rectilineis ad crura similibus similiterque sitis: & contra.* e 31 p 6.

Sit triangulum rectangulum $a ei$, & triangula ean , aiy ,
 & iis simile similiterque situm per 4 c 14 e 4, sit triangu-
 lum ies . Dico ipsum duobus illis æquari. Sit ab angulo
 recto a perpendicularis ao , hæc ostendet proportionales
 bis ternas per 2 c 4 e, nempe ie , ea , eo , item ei , ia , io . Itaq;
 per 1 c 15 e 4, ut ie est ad eo , sic triangulum ies est ad tri-
 angulum ean , & ut ei est ad oi , sic triangulum ies est ad
 triangulum aiy : At ei æquatur eo & oi , suis nempe parti-
 bus. Quare per secundam compositionem in arithme-



tica 9

rica 9 cap. 2 lib. triangulum eis æquatur triangulis ean & $ia\gamma$. Euclides nominat hic eis & $ia\gamma$ speciem & speciebus, id est figuram & figuris. Nos ad plana rectilinea accommodavimus. Causa dicetur in scholis. Conversa sic probatur. Sit triangulum aei & perpendicularis erigatur eo super ae equalis ipsi ei , & connectatur oa . Hic per præcedentem sita ad oe & ea rectilinea, id est per fabricam ad ae & ie æquantur rectilineo ad ao simili & similiter sito, & ex thesi æquantur simili & similiter sito ad ai . Itaque ad oa & ai similia rectilinea cum sint æqualia, homologa latera habebunt æqualia, per 1 c 4 e 4, & triangula duo fient æquilatèra, & per 1 e 7 æquiangula. Rectus autem est ex fabrica oea , cui æqualis concluditur aei . Itaque aei per 8 e 5 est rectus.



6. Triangulum obliquangulum est obtusangulum vel acutangulum.

Partitio est e specialibus differentiis anguli.

7. Obtusangulum quod habet unum obtusum angulum. 28 d 1.

Rectus unicus est in triangulo. Itaque & obtusus.

Itaque

1. Si obtusus angulus est ad basim, perpendicularis a vertice cadit extra.

Ut hic in aei perpendicularis io , ut patet 2 c 2 e.

Et

2. Si trianguli angulus sit major reliquis, est obtusus.

ut patet e 1 c 3 e.

Et

3. Si recta a vertice trianguli bifecans basim, est minor bisegmento, angulus verticis obtu-

sus est.

Ut

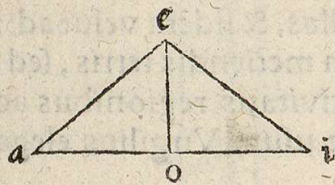
in ae

i sit e

o bi-

secans

mi-



nor, ut patet per 2 c 3 e.

8. Triangulum acutangulum est quod habet omnes acutos angulos. 29 d 1.

Itaque

1. Perpendicularis a vertice cadit intra.

Ut in aei perpendicularis ao , ut patet per 2 c 2 e.

2. Si trianguli angulus sit minor reliquis, est acutus.

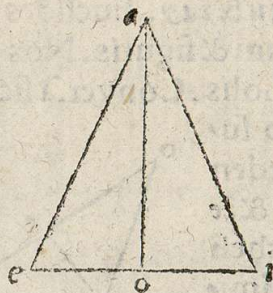
Ut patet per 1 c 3 e.

3. Si recta a vertice trianguli bifecans basim est major bisegmento, angulus verticis acutus est.

h 3

Ut in ae

ut
in $\triangle$
i sit
bise/
cans
a o
ma =
for
bise



mento, angulus $\triangle$ erit acutus, ut patet per 2 c 3 e.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IX.

de Geodesia rectarum & triangulis rectangulis similibus

Triangulorū rectangulorum similium geometria, cum plerosque alios usus habet, tum imprimis geodesiā linearū rectarum suppeditat, & magisterium geometriæ in triangulis rectangulis antea collocatum, tandem verum magisterium hic esse deprehendetur. Continebit enim geodesiam rectarum, posteaque geodesiam planorum & solidorum, & dimensis lateribus, quæ rectæ lineæ sunt. Ad rectarum igitur geodesiam radius instrumentum omnium geometricorum instrumentorū præstantissimum & commodissimum adhibetur.

1. Radius est norma crurum inæqualium.

Instrumentum perantiquum est, & vulgo baculus jacob dicitur, tanquam à Sancto Patriarcha illo jam olim inventus sit. Archimedes in arenâ numero simile quidpiam notavit, & Hipparchus instrumento non ab simili ausus est rem etiam diis improbam, annumerare posteris stellas, & sidera velut ad normam expangere, ait Plinius. Et sane radius non solum metiendis terris, sed astris loco & ordine definiendis, omnibusque caelestis civitatis regionibus ac viis describendis præcipue usurpatur: & sic utrumque usum Virgilius eleganter expressit.

—ecquis fuit alter,

Descripsit radio totum, qui gentibus orbem?

—calique meatus.

Describent radio & surgentia sidera dicent.

Egl. 3

item

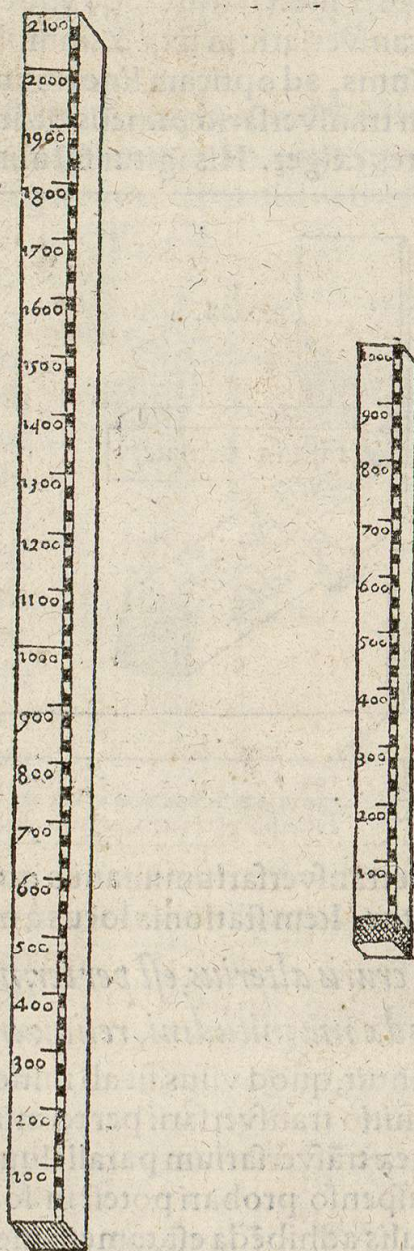
6 Aen.

Arabes tandem, ut Rabi, Levi, sed proximis temporibus Germani imprimis excoluerunt, Regiomontanus, Vernerus, Schonerus. Appianus maxime omnium Gemma opere separato illustravit. Radius igitur suis & geometricis partibus describatur: astronomica autem distributio in suum tempus reservetur, tum usus adhibeatur dimensionibus linearum. Radius autem pro arbitrio minoris parvus aut magnus est. Quantitas enim instrumenti aliter definiri non potest.

2. Radii crura sunt index & transversarium.

3. Index

3. Index est duplus sesquidecimus transversarii.
ut hic

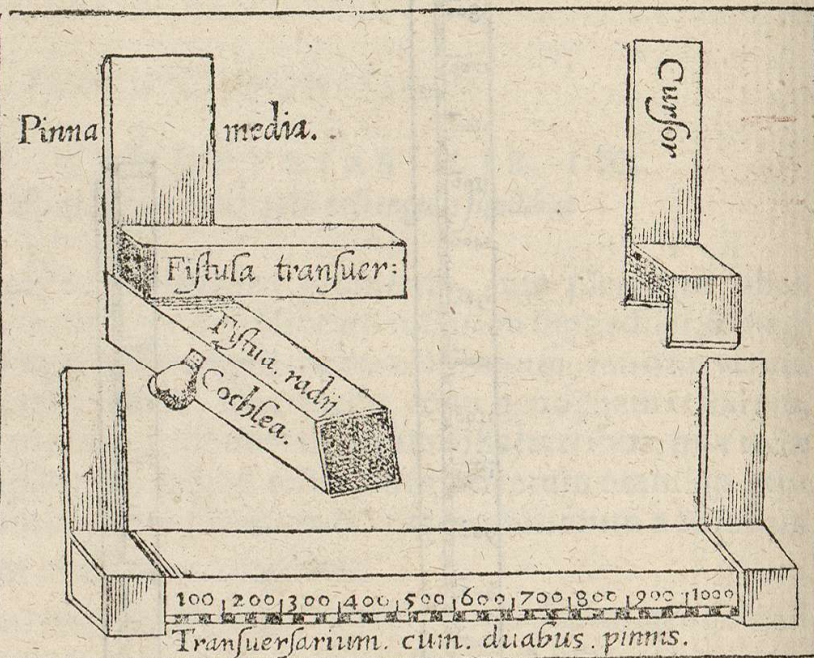


4. Transversarium est per indicem volubile modo sublimius, modo humilior.

Hæc ratio in definiendis & componendis radii cruribus perpetua est: ut si transversarium sit 10 partium, index sit 21. Transversarium itaque sit 2000 partium, index erit 4200: & quia index sustinere debeat, transversarium sustineri, index esto crassior, transversarium tenuius. Verum è qua materia sit radii pars utraque ænea, lignea nihil interest, modo firma sit & stabilis: transversarium
tamen

tamen commodius æneis fistulis volvetur, & per indicem & per se fursum deorsumve ad rectos ita contiguus, ut ore alterno latus alterius contingatur: tertia fistula sit volubilis per totum transversarium, quæque ideo cursor appellatur: quarta & quinta fistulæ transversarium fixæ & immobiles terminent ad tertiam & secundam æquealtæ pinnis, ad opticam lineam, ubi opus erit disternendum, & tanquam certis in transversario punctis definiendum. Tres primæ fistulæ cochleis sistentur, ubi res exigit. His igitur fistulis transversarium tan-

tum efficitur, quanto opus fuerit, ut hic vides. fabrica radii dicta est, usus sequitur, ad quem communiter attinet primo iustam esse distantiam: nec enim visus est infinitus: alterum obductum oculum: vis enim optica è duobus oculis in unum conducta firmius collimat, & radius ad os genæ commodius applicatur: Hic enim oculus est tanquam cē-



trum circuli, cui inscriptum sit transversarium: manus quietas: nam si trepident, geodesiæ proportio turbabitur. Item stationis locus à medio pedis.

5. Si visus est ab initio cruris alterius, est per terminum reliqui, crurisque alterum est rectum metiendæ magnitudini, reliquum parallelum.

Hæc communia præponuntur, quod visus sit ab initio indicis per terminum transversarii, vel contra ab initio transversarii per terminum indicis: quodque index sit rectus metiendæ lineæ transversarium parallelum, vel contra. Perpendicularum vero indicis plumbo suspensum probari potest in longitudine: in altitudine aut & latitudine fides oculis adhibenda est, tamen modicus deflexus perpendiculari sensilè errorem adferre non potest. Terminum vero transversarii intellige, qui linea visus efficitur, sive extrema pinna, sive quocumq; alio loco cursor.

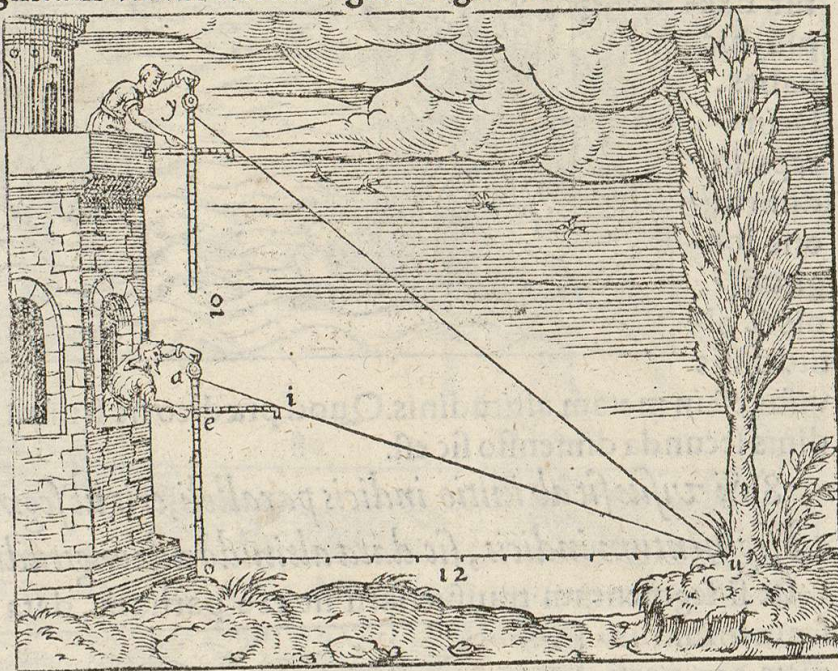
6. Longitudo & altitudo triplicem mensuram habent, primam & secundam unius distantie, & quidem data alterius dimensione pro tertio proportionali, tertiam duplicis distantie, qualis tantum est dimensio latitudinis.

7. Si vi-

7. Si visus sit ab initio indicis recti in metam longitudinis, erit ut segmentum indicis ad segmentum transversarii, sic mensoris altitudo ad longitudinem.

Theorema est Euclidis in opticis, quod & ideo libentius assumpsimus, ut planum fieret, hunc etiam geometricum usum geometriæ doctori nequaquam alienum geometricæ dignitatis visum esse. Sit igitur segmentum indicis à vertice nempe ad transversarium, 6 partium,

segmentum transversarii ab indice nempe ad opticam lineam, 18. Index qualis hic esto mensor altitudo quatuor pedum, longitudo erit 12 pedum. figura sic est: Ut enim ae ad ei , sic ao ad ou , ut patet per 9 et 7. Sūt enim triangula similia. Nam aei & aoi recti, & quia ae communis: reliquus igitur æquatur reliquo

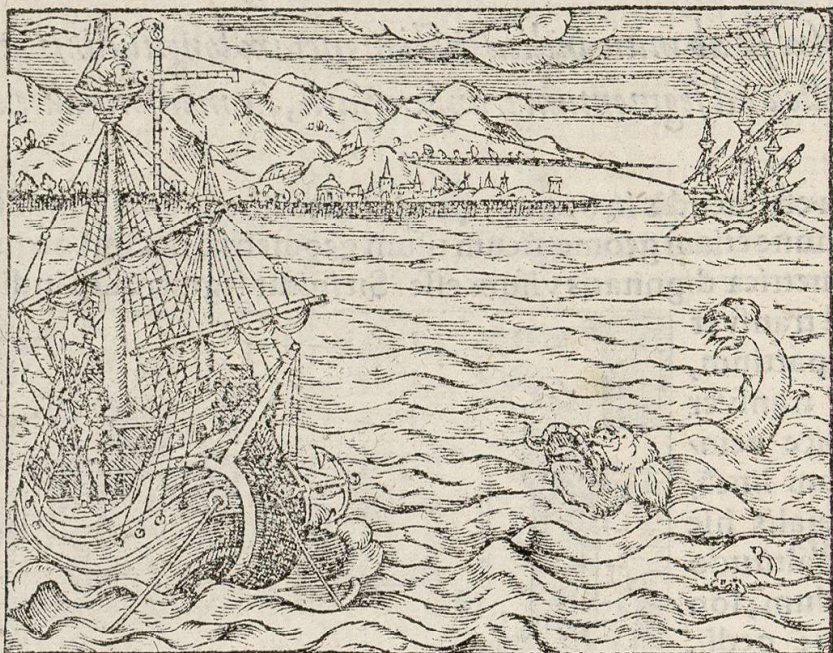


per 3 et 7. Idem erit metiendi modus ex altiore loco, ut ex y , segmentum indicis 5 partium, tumque sit altitudo 10 pedum, transversarium 6: Neque vero quidquam interest, utrum longitudo sit in subiecto plano, an in ascensu descensu vè montis, ut in subiecta figura. Hoc modo poteris metiri latitudines fluminū, vallium, fossarum. Longitudo enim semper est hoc modo, ut in mari distantiam navium liceat metiri,



i quomodo

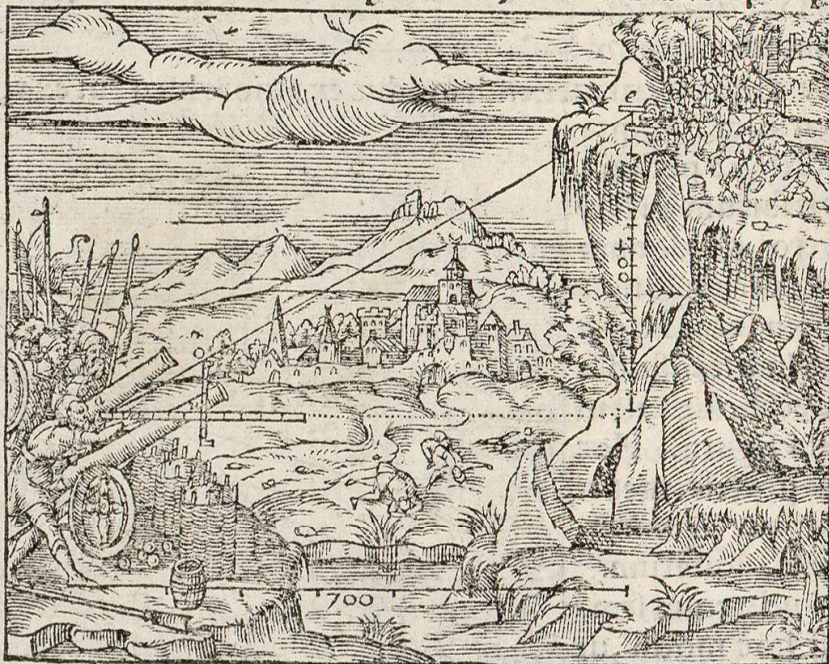
quō
& Tha-
les Mile-
sius a=
pud Pro-
clum 26
p i meti-
tur. Exē-
plū hīc
habes.
Dein=
ceps in
dimensi-
one lon-
gitudi-
nis & al-
titudinis



visus est in metam altitudinis. Quod prædico ne frustra sapius iteretur. Longitudinis secunda dimensio sic est.

8. Si visus sit ab initio indicis paralleli, erit ut segmentum transversarii ad segmentum indicis, sic data altitudo ad longitudinem.

Ut si segmentum transversarii sit 120 partium, data altitudo 400 pedum, segmentum indicis 210 partium: Longitudo per auream regulam erit 700 pedum. figura sic est, ut demōstratio par superioribus, vel etiam facilior. Triangula enim sunt æquiangularia, ut prius. Ut igitur o u ad Wa, sic ei ad ia. Hæc dimensio est prima secundaque



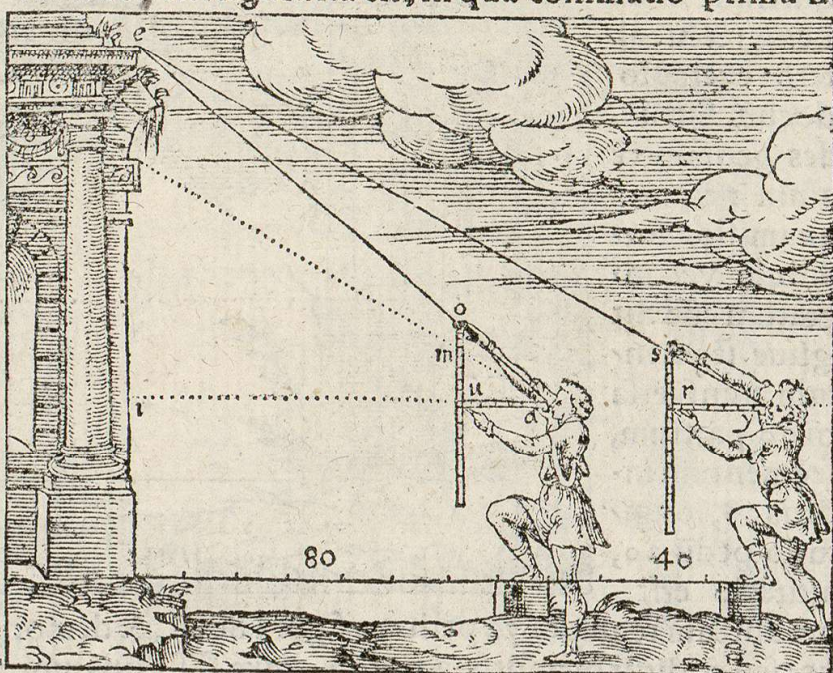
longitudinis per simplicem distantiam, tertia superest per duplicē, ubi transversarium si recedens copia sit maior, deprimetur in secunda distantia.

9. Si visus

9. Si visus sit ab initio transversarii paralleli, erit ut in indice differentia majoris segmenti ad minus, sic differentia secunda distantiae ad longitudinem.

Hac geodesia paulo subtilior est. figura ita est, in qua collimatio prima sit

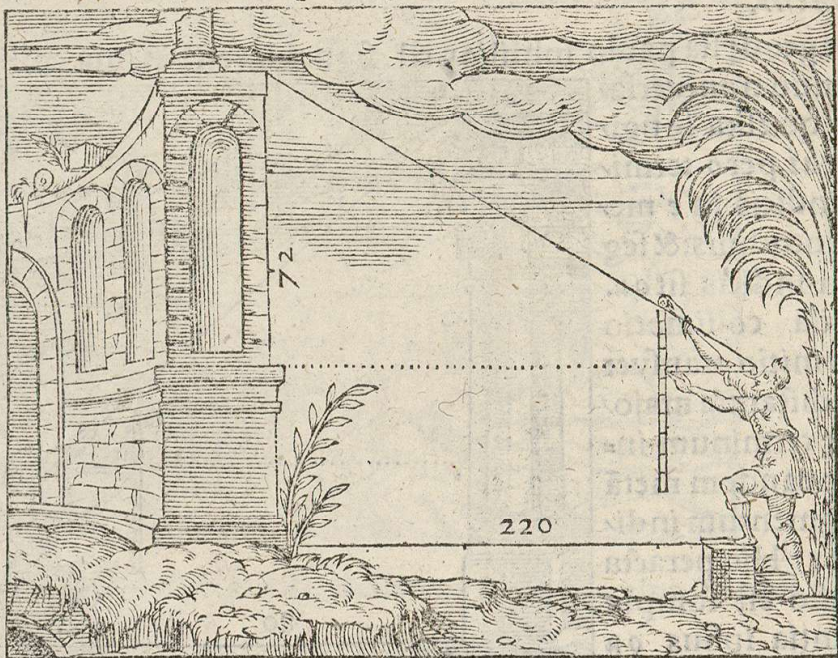
ab initio transversarii & est quæsitæ longitudine ad per terminum indicis in eadem altitudinis: & segmentum indicis sit ou . Secunda collimatio sit ab initio transversarii & distantia majoris per terminum indicis in eandem metâ e , & segmentum indicis sit sr : Hic peracta dimensio est sumpta differentia ipsius ou supra sr . Demonstrati-
onis ergo cætera effin-



guntur. Parallela igitur contray e in prima distantia ab initio transversarii sit a ml . Hic primum mu æquatur ipsi sr . Nam mu a & sr y triangula æquantur crure ua & ry per thesin (quia transversarium eodem suo loco manet) & anguli ad i ipsum mu a , ua m æquantur angulis sr y & rys , quia illi recti, hi exterior & interior oppositi. Itaque per 2 & 7 sunt æquilatera, & om est differentia segmentorum indicis. Deinde ut om est ad mu , sic el ad li , ut æquatio ternorum graduum ostendit. Nam per 9 & 7 ut om ad ma , sic el ad la , & ut ma ad mu , sic la ad li . Itaque ex æquo, ut om ad mu , sic el ad li , & per 8 & 6 sic ya ad ai : ut si differentia primi segmenti sit 36 partium, secundum segmentum sit 72 , differentia secundæ distantiae 40 pedum, quæsitæ longitudo erit 80 pedum. Atque hic altitudo nulla definite datur, ut faciat ullum principis proportionis terminum: Altitudo tamen licet dimensionis ignotæ est quæsitæ longitudinis terminus: ideoque ad iumento ad ratiocinationem quæstionis, quia perpendiculariter insistentis extremæ longitudini intelligitur. Tertia igitur ista longitudinis geodesia sæpe est necessitatis, cū superiore neutro modo longitudo capi possit, interjectio quippe vel muri vel arboris vel montis impedimēto, ut meta longitudinis videri nequeat, qui primus modus est, neque altitudo contermina extremæ longitudini data sit, qui secundus est modus. Adhuc dimensio fuit longitudinis triplex prima & secunda est data altitudine, tertia est distantia duplici: sequitur altitudinis dimensio item similis triplex, & altitudo est perpendicularis à vertice magnitudinis ad solum mensoris, quomodo definita est altitudo 6 & 4 . Prima geodesia altitudinis sic est.

10. Si visus sit ab initio transversarii recti, erit ut segmentum transversarii ad segmentum indicis, sic data longitudo ad altitudinem.

Deducitur e 18 th. *Euclidis in opticis*, ubi Euclides umbra solis utitur pro radio optico, qui nunc adhibetur: & hic altero exemplo docuit Euclides geometriæ usum nequaquam sibi sordidum vel ingratum esse. Sit igitur segmentum transversarii 60 partium, segmentum indicis 36, longitudo pedum 20, altitudo erit

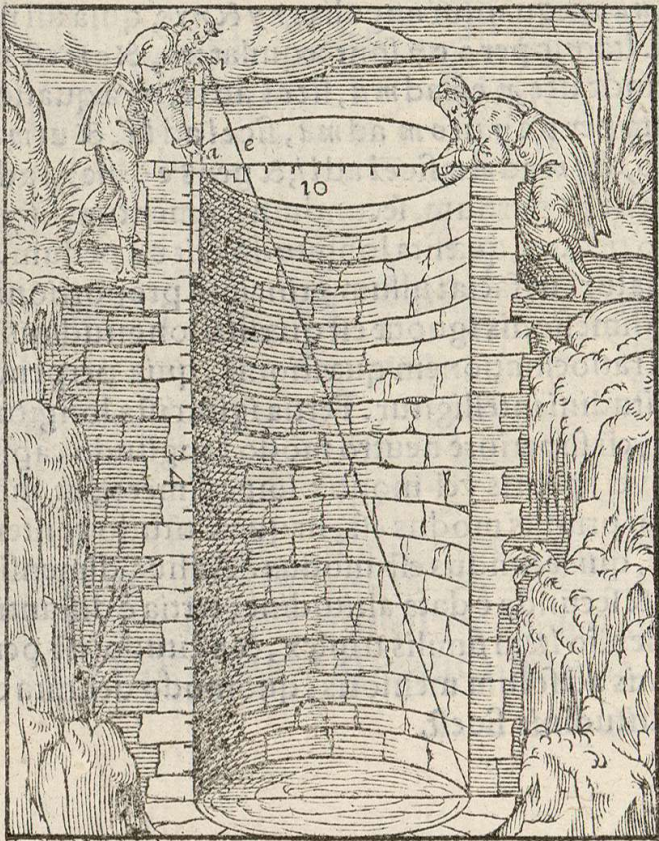


per auream regulam 72 pedum, figura sic est, & demonstratur per 9 e 7 ut prius: sed additur mensoris altitudo, quæ si sit quatuor pedum, altitudo tota erit 76.

Itaque in eversa altitudine.

Si visus sit ab initio indicis paralleli, erit ut segmentum transversarii ad segmentum indicis, sic data longitudo ad altitudinem.

E^a conclusa nempe altitudine subducto quod supereminet, relinquetur altitudo putei. Theorema est 20 in Euclidis opticis, id est tertium testimoniū de geometriæ usu geometris nec illiberali nec ingrato, nempe de dimensione putei, rupis, turris. Itaque segmentum transversarii *a* sit 5 partium, segmentum indicis *e* 13, diameter putei (quæ modo est pro longitudine) 10 pedum, quæ superne sumatur pro *a* quali in fundo, oppo-

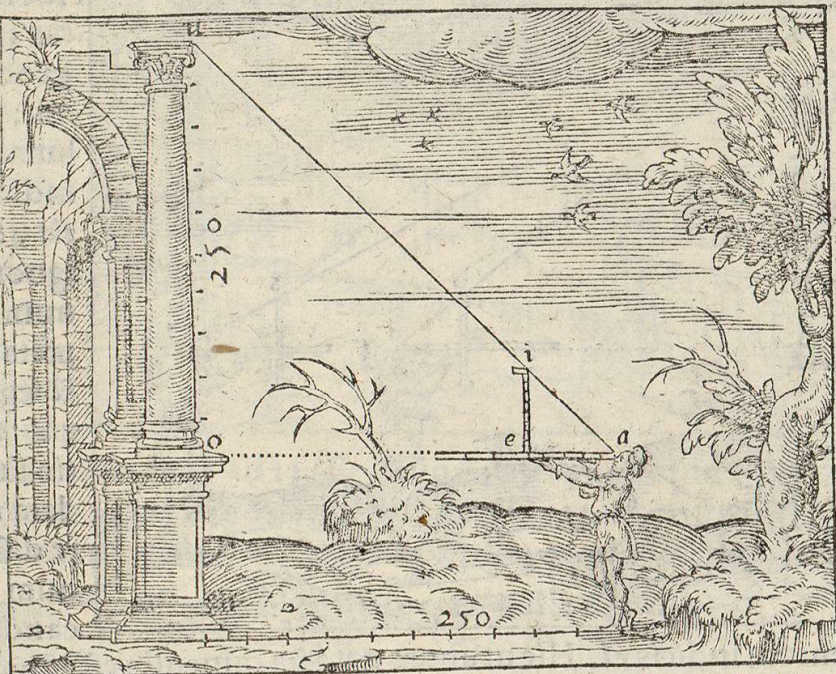


sita alti

Ita altitudo per 9 et 7 & auream regulam erit 26 pedum, unde tollendum segmentum indicis supra oram putei, relinquetur vera altitudo, ut si segmentum illud 13 partium valeat pedes 2, altitudo erit pedum 24. Secunda altitudinis dimensio.

II. Si visus sit ab initio indicis recti, erit ut segmentum indicis ad segmentum transversarii, sic data longitudo ad altitudinem.

ut si indicis segmentum est 60 partium, transversarii segmentum 60 partium, longitudo data 250 pedes, per auream regulam altitudo erit 250 pedum: ut vides in subsecuto exemplo: ut enim ae ad ei , sic aeo ad ou per 9 et 7. Sed inventa altitudinis altitudo mensuris

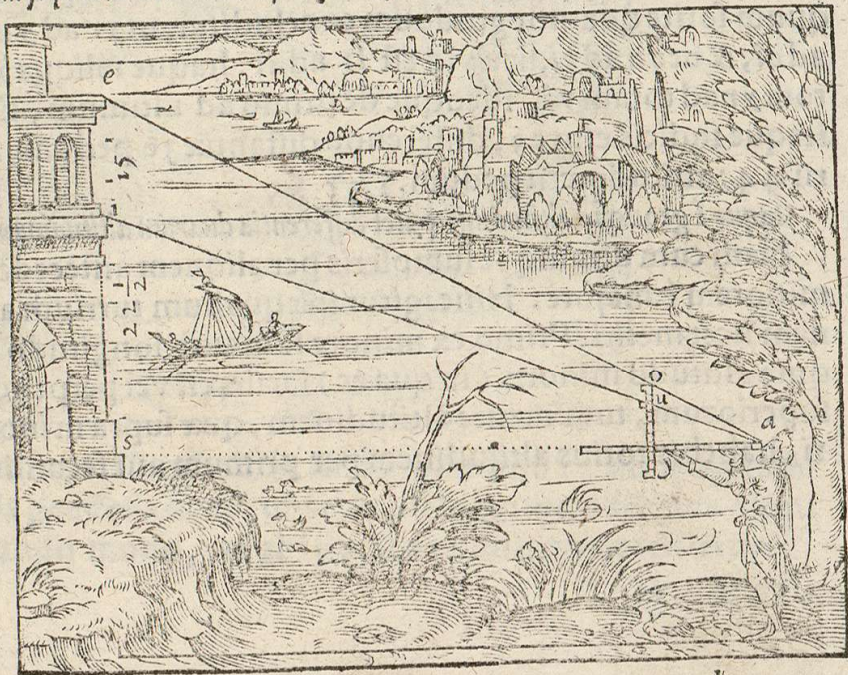


addenda est, quæ si sit 4 pedum, tota altitudo erit 254 pedum. Et hic modus à superiore distat solo radii situ.

Itaque

Si visus sit ab initio indicis recti per pinas transversarii in terminos notæ partis, erit ut intervallum pinarum ad reliquum supereminentis transversarii, sic nota pars ad reliquam.

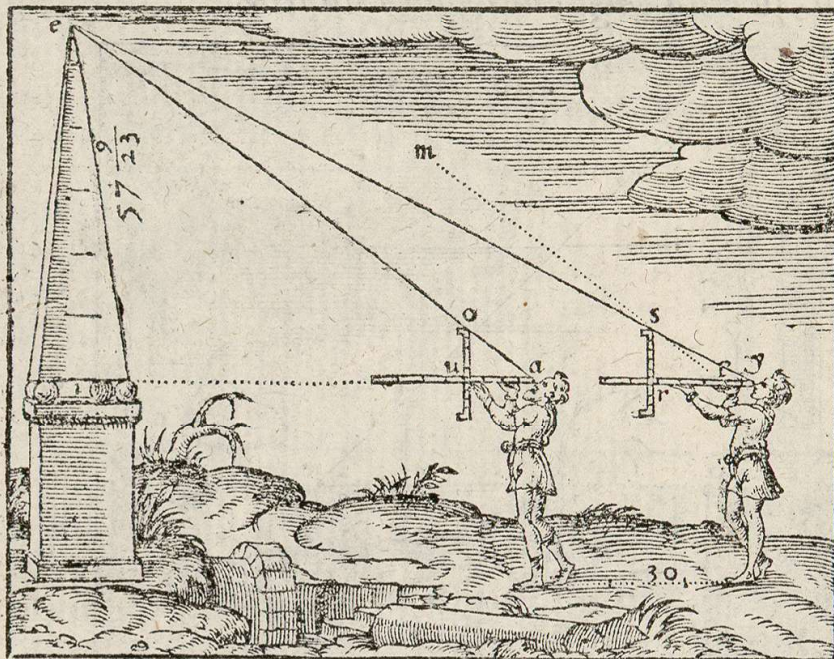
Confectarium est de altitudinis nota parte, unde reliquum cognoscatur, ut in diagrammate. Sicut ou ad uy , sic ei ad is . Nam ut ou ad ua , sic ei ad ia per 9 et 7: & ut ua ad uy , sic ia ad is , & ex æquo: ut ou ad uy , sic ei ad is . Hic habes terminos tres proportionis. Sit igitur ou 20 partium, uy 30, nota pars ei 15 pedum: Concludes pro reliquo is



1 3 22 1/2

Dimensio altitudinis prima secundaque sic est, tertia sequitur.

12. Si visus sit ab initio indicis recti, erit ut in indice differentia segmenti ad differentiam distantiae, sic segmentum transversarii ad altitudinem.



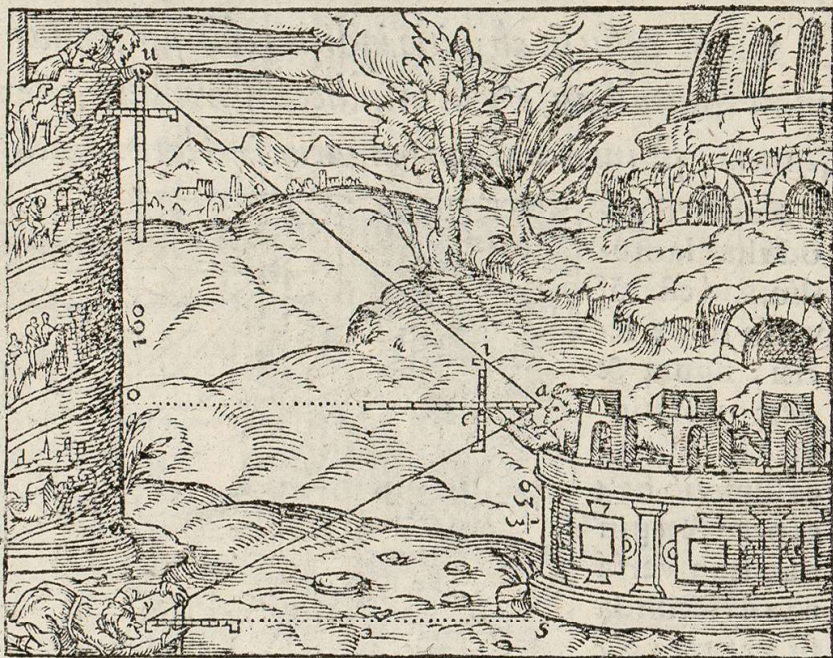
Huc revocatur subtilitas quæ fuit in tertia geodæsia longitudinis: prima itaque collimatio sit ab a initio indicis perpendicularis, & est longitudine ignota ai per o terminum transversarii in eam metam altitudinis ei: & segmentum indicis ua : secunda collimatio sit ab y initio ejusdem indicis & est major distantia per s terminum transversarii in eandem metam e : &

segmentum indicis rl . Hic ut antea perfecta dimensio est, sumpta differentia ipsius yr supra au , demonstratio jam (ut antea) concludetur. Parallela lsm contra ao erigatur. Hic primum triangula oua & srl æquilatera sunt per 2 & 7 , cum anguli ad a & l exterior & interior æquales æquentur basi ou & sr , segmentum transversarii in utraque distantia idem manet. Itaque ua æquatur rl . Jam reliquum sorte quatuor graduum concluditur, ut yr ad y , sic per 9 & 7 sr id est ou ad ei , & ut ou ad ei , sic al id est lr ad ai . Itaque reliqua yl ad reliquam ya erit ut tota yr ad totam yi , ideoque de primo ad ultimum, sicut sr ad ei . Differentia itaque indicis esto 23 , differentia distantiarum 30 pedum, segmentum transversarii 44 : altitudo erit pedum $57 \frac{2}{3}$.

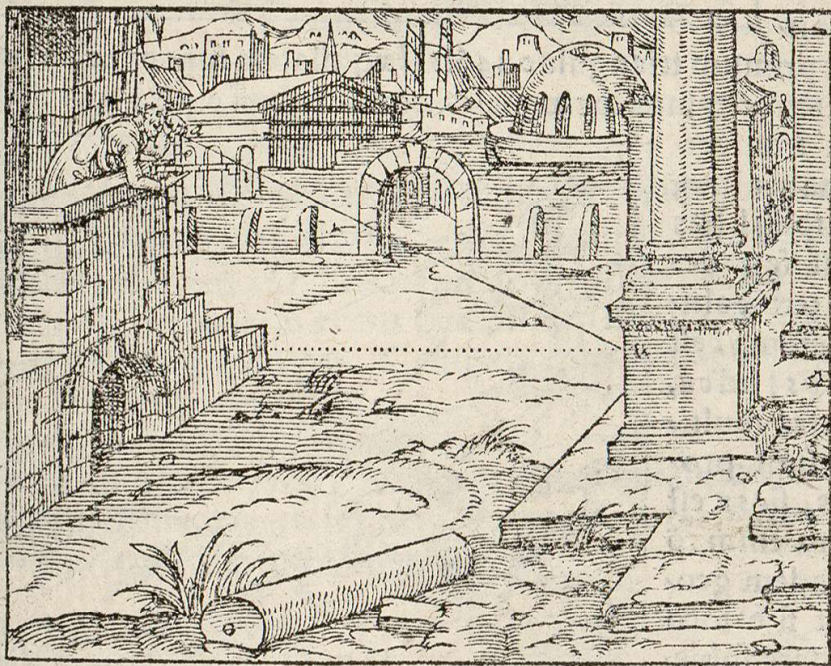
Itaque est geodæsia altitudinis patet differentia duarum altitudinum.

Nam cum utramque sumpseris per aliquem antecedentium modorum, tolle minorem est majore. Hinc igitur inæqualium turrium altera, alterius altitudinem licet metiri. Primo ex minore sumatur longitudo per primum modum, quia altitudo minoris (in qua es) facilis est vel perpendiculo vel modo aliquo superiorum, tum metire altitudinem, quæ supra minorem est, & adde minori, habebis totius altitudinem per primum aut secundum modum. figura sic est, & de-

est, & demonstratur per 9 & 7. ut enim ae ad ei , sic ao ad ou . Contra e maiore licet metiri minorem. Si visus primum a vertice maioris deinde a basi, vel medio loco per pinnam transversarii, sit in verticem minoris altitudinis, erit ut sunt dictae partes indicium ad partes primi indicis, sic altitudo intra stationes ad suum excessum supra quaesitam altitudinem. Sunt enim partes indicium 12 & 6, summaque 18 ad 12: sic altitudo 190 pedum ad excessum $12\frac{2}{3}$ pedum. Reliquum igitur $63\frac{1}{3}$ erit altitudo quaesita as . Licet vero & a vertice turris metiri distantiam turrium inter se: primus enim modus est metiendae longitudi-



nis, neque quicquam hic differt, nisi quod radius extra datam altitudinem suspenditur. figura sic est, & demonstratio est per 9 & 7: ut enim est ae segmentum

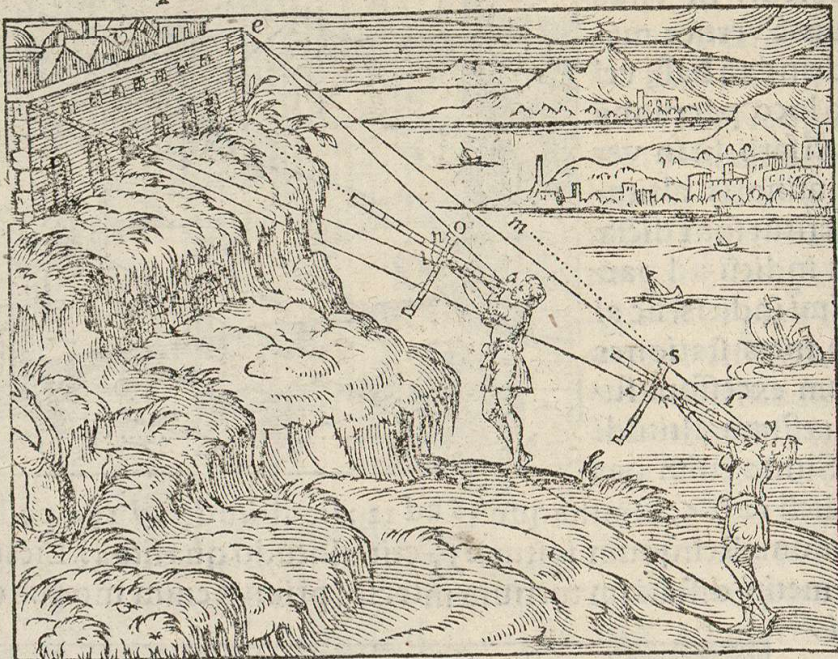


tum indicis ad ei segmentum transversarii, sic est data altitudo ao ad longitudinem ou . Ergo altitudinis geodesia sic est, ubi data est longitudo vel pars altitudinis, ut in primo & secundo modo, vel ubi duplex est distantia, ut in tertio.

13. Si vi-

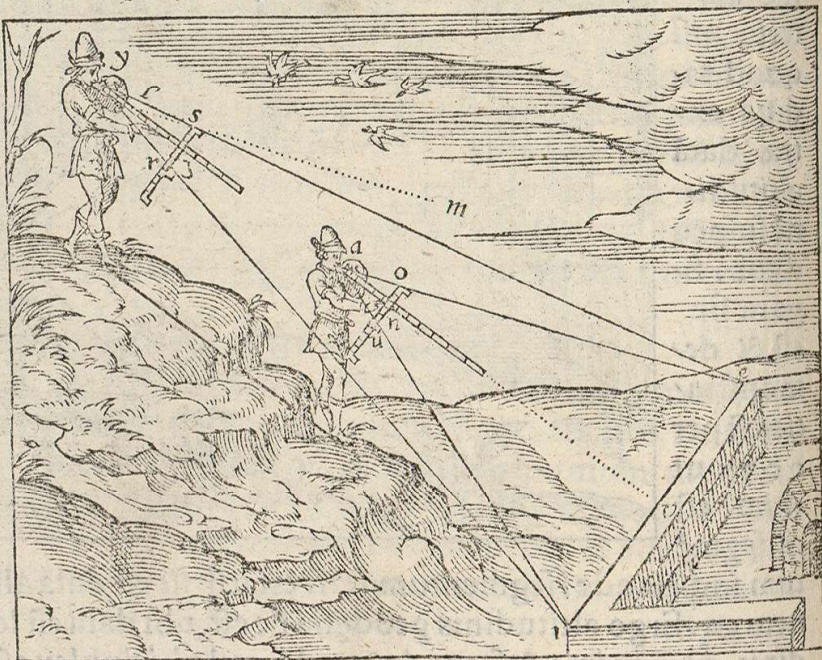
13. Si visus sit ab initio indicis recti per pinnas transversarii inter terminos latitudinis, erit ut in indice differentia segmenti ad differentiam distantiae, sic intervallum pinnarum ad latitudinem.

Superest geodæsia latitudinis, id est transverse lineæ rectæ. figura & demonstratio sic est. Prima collimatio sit a ei per o & u pinnas transversarii o u : secunda sit y ei per s & r pinnas transversarii s r : tum parallela per punctum s , ducatur l m con-



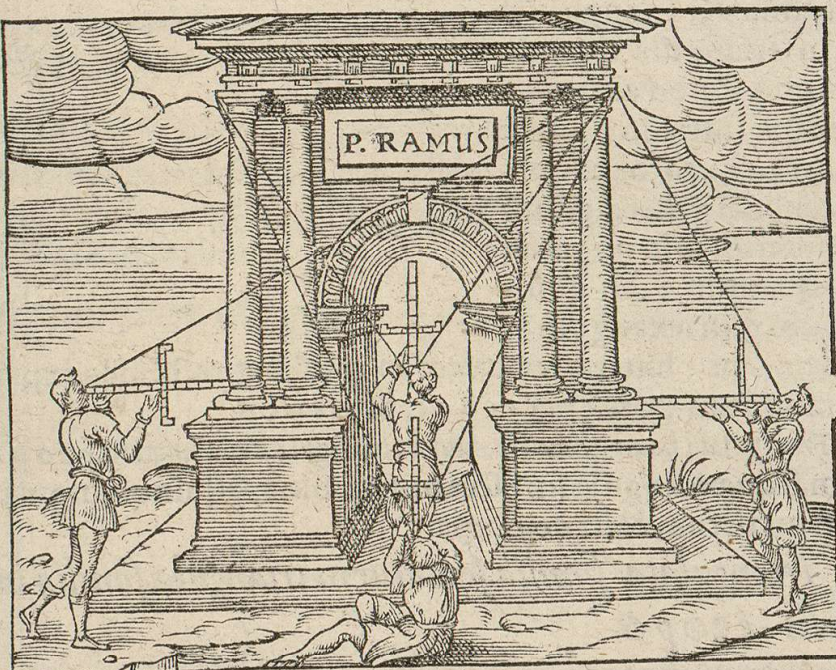
tra a o e . Hic primum triangula o u a & s i l æquilatera sunt per 2 & 7 , quia anguli u a o & j l s exterior & interior æquales æquatur basi o u & s j per thesin. quia hic

segmentum transversarii idem manet. Itaque u a æquatur ipsi j l . His positis redit fere demonstratio tertiæ altitudinis: ut enim y l est ad y a , sic est s j ad e u , & quia partes multiplicatibus sunt proportionales, sic r est ad e i . Cætera enim conveniunt. Eadem geodæsia fuerit si è loco supero metiare subiectam latitudinem, ut in postremo exëplo. Atqui è distantia duorum locorum, id est è latitudine, ut arborum, montium, urbium, magna geographis & chorographis adjumenta comparantur. Quamobrem geodæsia re-



ctarum

clarū linearum
ejusmodi est in
longitudine, al
titudine, lati
tudine, unde pi
ctor archite
ctus, cosmogra
phus loci cujus
libet insignis fe
nestras, statuas,
pyramides, fig
na, denique lō
gitudinem & al
titudinem di
mensione sim
plici aut dupli
ci, latitudinem



tantum duplici; id est locorum omnium naturam symmetriamq; perspiciet. Ut
in subiecto exemplo liceat experiri.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. X.

de triangulato & parallelogrammo.

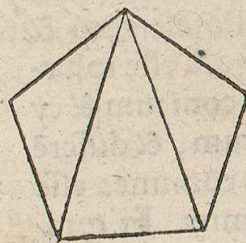
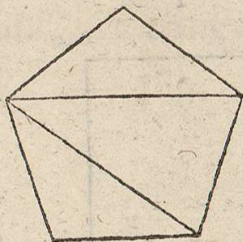
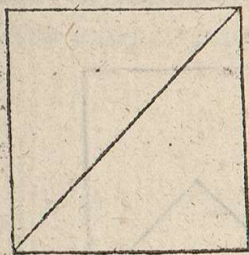
Atque hæc de geodæsia linearum rectarum ē triangulis rectangulis, sequi
tur de triangulato.

1. *Triangulatum est rectilineum compositum ē triangulis.*

Antea (ut dichotomia servaretur) ē linea factum est lineatum ad significan
dum genus superficiei & corporis, ita modo fit eadem de causa ē triangulo tri
angulatum ad exponendum genus quadrilateri & multilateri, & quidem iusti
us etiam, quam antea in lineato. Triangula enim triangulatum componunt,
non autem lineæ lineatum. Itaque

1. *Triangulati latera sunt binario plura triangulis.*

Ut quadranguli latera sunt 4, triangula ipsum quadrilaterum componentia
2: Quinquanguli latera 5, triangula 3. Sexanguli latera, 6 triangula 4, & sic de
inceps, ut hic. & quidem minimum illud est.



k

Potest

Potest enim vel triangulum
secari in triangula quamli-
bet multa. Quod autem an-
gulis rectis interiores atque
exteriores æquantur in quo-
libet rectilinei genere, patuit
4 e 6: interiores in quadran-
gulo æquantur 4, in quin-
quangulo 6, in sexangulo 8,

& sic deinceps: Exteriores autem in quolibet rectilineo æquantur 4 rectis: ut
hic demonstrari potest per 1 c 8 e 5, & per 9 e 6.

Et

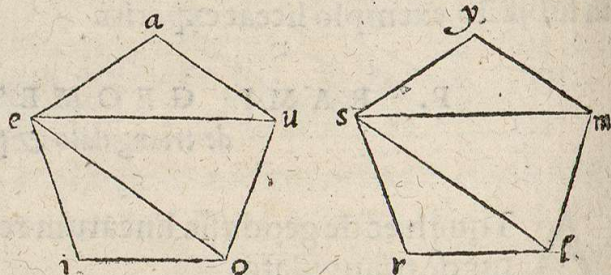
2. Triangulata homogenea secantur in triangula æqua numero. è 20 p 6.

Nam si quadrangula sint, secantur in bina, si quinquangula in terna, si sexan-
gula in quaterna, & sic deinceps.

2. Triangulata similia secantur in triangula similia inter se & homo-
loga totis. è 20 p 6.

Ut in his quinquangulis. Primum particularia triangula sunt similia inter se,

Nam aeu & ysm æqualium angulo-
rum crura sunt proportionalia ex
thesi. Itaque triangula ipsa æquian-
gula sunt per 9 e 7. Ideoque similia
per 9 e 7. Atque ita de reliquis: me-
dia vero detractis æqualibus angu-
lis, reliquos æquales angulos habe-
bunt, ideoque æquiangula erunt
& similia per idem. Secundo trian-



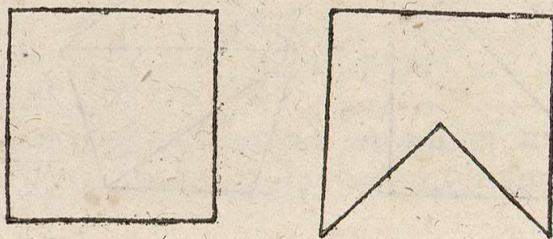
gula aeu & ysm , eio & srl , cou & slm , nempe similia inter se, sunt per 1 e 6 in du-
plicata ratione homologorum laterum eu, sm, eo, sl , quæ ratio est eadem pro-
pter communia latera. Itaque terna triangula sunt in eadem ratione, ideoque
proportionalia, & per tertiam compositionem, ut unum antecedentium ad u-
num consequentium, sic totum quinquangulum ad totum.

3. Triangulum est quadrangulum aut multangulum.

Partitionis hujus partes in Euclide sunt, sine tamen partitionis ulla specie, &
ab angulis species hic item nominantur, ut ante, quamvis à lateribus esset ve-
rius, ut quadrilaterum aut multilaterum, sed usus in verbis sequendus est.

4. Quadrangulum quod comprehenditur à quatuor lineis rectis. 22 d 1.

Ut hic. Potest vero &
quadrangulum esse sphæ-
ricum & conicum & cy-
lindraceum, & differē-
tias illas cōmunes esse
prædiximus. Et qua-
drangulum potest esse



planum,

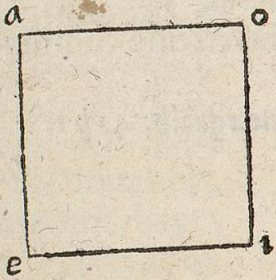
planum, quod non sit quadrilaterum, ut hic: sed tamen quadrangulum pro quadrilatero intelligatur e sua definitione.

5. *Quadrangulum est parallelogrammum aut trapezium.*

Partitio autem suis item partibus in elementis est sine partitionis forma: sed differentia partium commodius ita distinguetur, quia parallelogrammum in univsum communia multa sunt.

6. *Parallelogrammum est quadrangulum lateribus oppositis parallelum.*

ut in exē-
plo ae latus
est parallelū
lateri io & ei
latus est pa-
rallelum op-
posito lateri
 ao . Hæc defi-
nitio ab Eu-



clide in definitionum catalogo præterita est, & ex ea facta est 33 & 34 p 1. Attamen sic ad 36 p 1 ad 4 & 10 p 6 parallelogrammi definitio assumitur ab Euclide.

Itaque

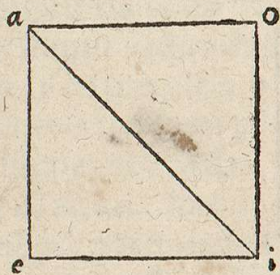
1. Si rectæ eadem parte conterminent æquales & parallelas, parallelogrammum constituent.

Quia ipsæ æquales erunt & parallele, per 5 c 12 e 5.

Et

2. Parallelogrammum oppositis & lateribus & angulis & sectis diametro segmentis æquatur.

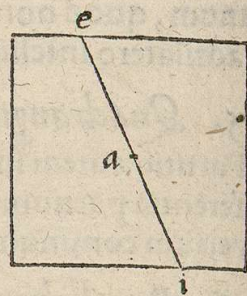
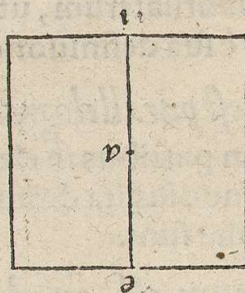
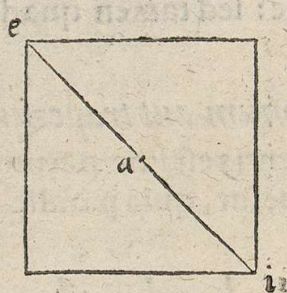
Ut in $aeio$ oppo-
sita latera æquan-
tur per 5 c 12 e 5,
quia duæ rectæ cō-
terminant æquales
parallelas. De an-
gulis diagonus ai
ostēdit: facit enim



triangula aei & ioa æquilatera, ideoque æquiangula, cumque particulares anguli ad a & i sint æquales, totus totus æquatur. Hæc vero pars est 34 p 1. Seg-
menta vero semper æqualia sunt, sive triangula sint, sive quadrangula quæ-

k 2 libet,

libet, ut in
subjectis fi-
guris. Dia-
meter enim
bifecat pa-
rallelogra-
mum per
angulos,
aut per la-
tera bifecta, aut per altera laterum segmenta æqualia.



3. Diameter parallelogrammi bifecatur radiis æqualibus. *rotundo*

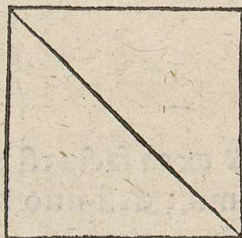
Ut in tribus supra figuris a e i id etiam cum circulo commune est, ut patuit

17 e 4.

trianguli

4. Parallelogrammum est duplum basi & altitudine æqualis. 41 p 1.

Sequitur
cōparatio
primum in
ratione æ
qualitatis
parallelo-
grammi cū
triangulo:

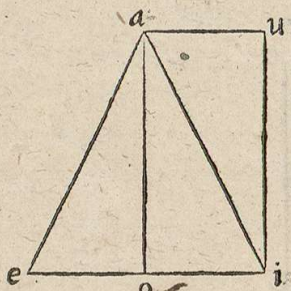


Ut vides in

diagrammate. Nam parallelogrammum bifecatur diametro in duo triangula per antecedentem. Itaque duplum est dimidii.

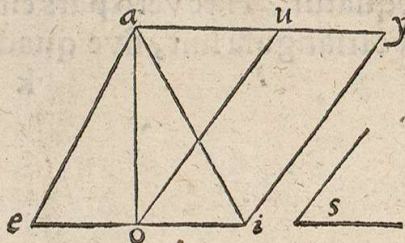
5. Aequatur triangulo æquealto, basique duplo. e 42 p 1.

Ut e i triangulo
æquatur paralle-
logrammum a o i
u, quia dimidium
parallelogrammi
æquatur triangu-
lo. Itaq; dimidiis
æqualibus tota e-
runt æqualia. un-



delicet dato triangulo in dato angulo rectilineo parallelogrammum æquale

constitue-
re: ut hic
dato trian-
gulo a e i in
dato angu-
lo s, licebit



æquare

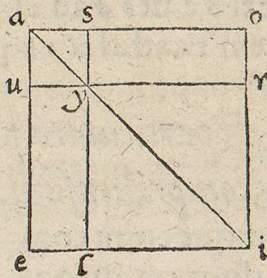
æquare parallelogrammum $ouyi$.

7. *Parallelogrammum constat e binis & diagonalibus & complementis, & gnomonibus.*

Hæ siquidem tres partes in geometricis rebus frequenter usurpantur, & inde definiendæ fuerunt.

8. *Diagonale est particulare parallelogrammum communis anguli & diagonii cum toto parallelogrammo.*

Primo definitur diagonale: ut in toto parallelogrammo a eio , diagonalia sunt $auys$, ut y lir , quia sunt partes totius communis & anguli ada & i & diagonii ai cum toto: non quod tota diagonus sit communis, sed quod particulares diagonii sunt partes totius diagonii.



Itaque diagonalia duo sunt. Hæc definitio diagonalis confusa est ab Euclide 24 & 26 p 6, ubi etiam τὰ πρὸς διάμετρον παραλληλόγραμμα, quæ circa diametrum parallelogramma describit, quæ nos diagonalia uno nomine nominamus.

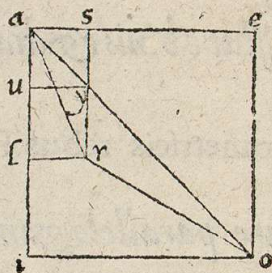
9. *Diagonale est toti simile similiterque situm e. 24 p 6.*

Diagonalis nulla ratio vel proportio proponitur, similitudo tantum proponitur, ut in eadem figura diagonale $auys$ simile est toti. Primo est æquiangulū. Nam angulus ada communis est, eique æqualis qui ady , ideoque etiam æqualis opposito adi per 3 c 5 e. Tum anguli auy & asy æquantur per 12 e 5 angulis oppositis interioribus ade & o . Itaque æquiangulum. Est item proportionale cruribus æqualium angulorū. Nam trianguia auy & aei sunt similia per 9 e 7, quia uy parallela basi. Itaque ut au ad uy , sic ae ad ei , tum ut uy ad ya , sic ei ad ia . Item per 12 e 5, quia sy est parallela basi io , ut ay ad ys , sic ai ad io . Ergo æquiordinate ut uy ad ys , sic ei ad io : item ut sy ad ya , sic oi ad ia : & ut ya ad as , sic ia ad ao . Itaque æquiordinate, ut ys ad sa , sic io ad oa . Denique ut sa ad ay , sic oa ad ai , & ut ay ad au , sic ai ad ae . Itaque æquiordinate ut sa ad au , sic oa ad ae . Quare diagonale su est proportionale cruribus æqualium angulorum toti parallelogrammo oe . Demonstratio eadem fuerit, de diagonali rl . Similis autem situs patet per 2 c 14 e 4. Atque hinc etiam patet diagonale quadrati quadratum, oblongi oblongum, rhombi rhombum, rhomboidis rhomboides esse, quia toti simile similiterque situm. Diagonalia vero cum similia sint toti & similiter sita, erunt item similia inter se & similiter sita, per 3 c 14 e 4. Itaque

Si particulare parallelogrammum est toti coangulum, & simile similiterque situm, est diagonale. 26 p 6.

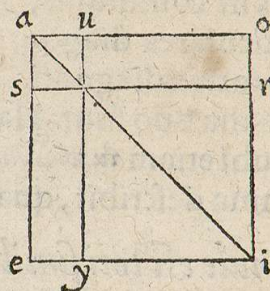
Assumi hoc potuit, sed etiam ut ab Euclide cogi potest, alioqui totum æqua,

retur parti, ut toti parallelogrammo $aeio$ particula $reaus$ sit coangulum, & communis anguli ad a simile toti similiterque sitū: dico esse diagonale. Secusesto diversa diagonis aro sit parallelar rl contra ae . Itaque als erit diagonale per 6 e. Jam igitur per 8 e ute a ad ai , sicut a ad al : item ex thesi ute a ad ai , sicut a ad au : Itaque eadem sa ad al & au proportionalis est, & al æquatur ipsi au , totum parti.



10. Complementum est particulare parallelogrammum a conterminis diagonalium lateribus comprehensum.

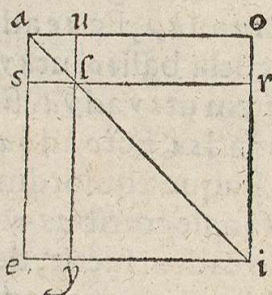
Ut in figura ur & sy , utrumque enim comprehensum est continuatis duorum diagonalium lateribus, & ideo complementa dicuntur, quia cum diagonalibus totum parallelogrammum complent. Neque vero diagonalia duo describi possunt, quin una complementa describantur. Euclides nusquam complementum definit, sed 43 p 1 appellat τὰ τῶν πρὸς τῇ διαμέτρῳ παραλλήλων ῥαμμάτων παραπληρώματα.



Complementa parallelogrammorum circa diametrum, tanquam complementa diagonalibus reliqua sint ad complendum totum parallelogrammum.

11. Complementa sunt equalia, 43 p 1.

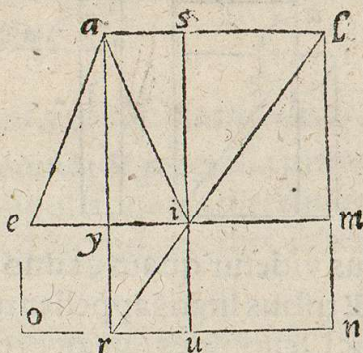
Complementorum nulla proportio, nulla similitudo proponitur, sed ratio tantum, ut in figura ur & sy complementa sunt equalia. Nam triangula aei & aoi æquantur per 3 c 5 e: item asl & aul , item lyi & lri . Itaque si triangula utrinque æqualia detraxeris ab æqualibus, reliques æqualia complementa.



1. Si complementum alterum æquatur dato triangulo in dato angulo rectilineo, reliquum ad datam rectam comparatum eidem pariter æquabitur. 44 p 1.

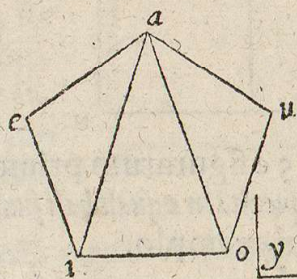
ut si postules parallelogrammum ad datam rectam, & in dato angulo rectilineo æ-

neō æquale dato triangulo, propositio facisfaciet. Sit triangulum aei , & datus angulus o data recta iu , & parallelogrammum $ayis$ æquale triangulo in dato angulo per sc & e , tum latus ay æqualiter ipsi data iu continuetur in r , & connectatur ru & ab r diagonus concurrat cum as infinita, idque in l per ci & e , lateraque yi & ru continuentur æqualiter ipsi sl in m & n , & connectatur ln . Hoc complementum mu æquatur complemento y & aquantur datum triangulum per præcedentem, & in dato angulo rectilineo.

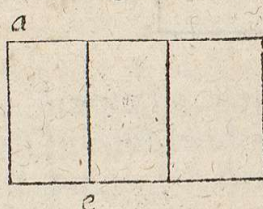


2. Si parallelogramma continenter æquantur triangulis dati triangulati in dato angulo rectilineo, totum parallelogrammum toti triangulato pariter æquabitur. 45 p 1.

Est confectarium superioris de ratione parallelogrammi cum triangulato, neque demonstrationem præterea ullam requirit, sed manum promptam in describendo. Rectam vero tibi sumes infinitam, ad quam continues particularia parallelogramma, ut si detur triangulatum $aeio$ u solvetur in tria triangula aei , aio , ao u,



& angulus sit y , primum in dato angulo ad rectam infinitam facies per antecedentem parallelogrammum ae in dato angulo æquale primo triangulo. Deinde secundum triangulum ita describes super infinitā, ut crus alterum incidat in latus complementi æqualis, reliquum in antecedentia rejiciatur, & sic deinceps. Hic habes complementa tria continuata, & parallelogrammum continuantia, sed præstat in fabricando deleare antecedentia, & altera inferiorum diagonalium latera, ne quid interea confusio linearum officiat.



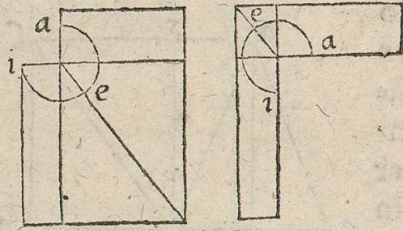
Parallelogrammum æquatur suis diagonalibus & complementis.

12. Gnomon est alterum diagonale cum duobus complementis.

2 d 2.

Gnomon duplex est in duobus exemplis, & sic Euclides definit. Omnis parallelogrammi spatii circa diametrum ipsius parallelogrammum quodlibet cum duobus complementis gnomon vocetur. Itaque gnomon componitur ex utroque ge-

que genere
diagonalium
& comple-
mentorum.
Gnomonis
autem usus
in elemen-

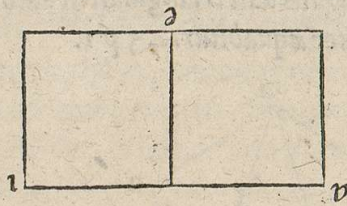


tis nullus alius videtur quam ut uno nomine tres partes parallelogrammi significentur, & tribus literis appellentur, ut hic $a e i$. Alioqui gnomō est perpendicularum, & sic Oenopides (ut ait Proclus 12 p 1) perpendicularum dicebat pro gnomone more antiquo.

13. *Parallelogramma æquealta sunt ut bases. 1 p 6.*

ut pa-
tet per
12 e 4.

Quia
sunt du-
pla tri-



angulorum per 2 c 5 e figurarum primarum: Ut $a e$ & $e i$.

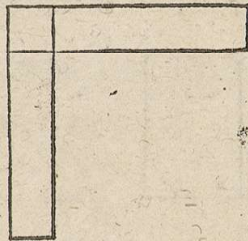
Parallelogramma æquealta in æquali basi sunt æqualia. 35. 36 p 1.

Ut patet in eodem exemplo.

Itaque

14. *Si parallelogramma æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, sunt æqualia: & contra, 15 p 6.*

Consec-
tarium est ex
8 e 7. Ut hic
vides, & ta-
men & illud
(ut dictum
est) & hoc
consec-
tariū



potius est 13 e 4, quod hic etiam manifestius est.

Itaque

1. Si quatuor recte sunt proportionales, parallelogrammum mediarum æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum. e 16 p 6.

Erunt enim parallelogramma æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli.

Et

2. Si tres recte sint proportionales, parallelogrammum medię æquatur æquiangulo paral-
lelogrammo extremarum.

Consec-
tarium est e proximo.

P. R A M I

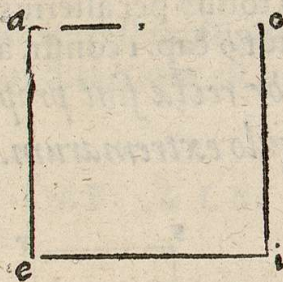
P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X I.
de rectangulo.

Parallelogrammum est rectangulum aut obliquangulum.

Adhuc de parallelogrammis communia & generalia præcesserunt: specialia sequuntur in rectangulis & obliquangulis, quæ differentia (ut prædixi) est communis triangulis & triangulatis, sed hic nulla verbis saltem aptior ad genera proposita distinguendum.

2. Rectangulum est parallelogrammum quod habet omnes angulos rectos.

Ut in a e i o. Atque hinc intelligis ex uno angulo recto omnes rectos esse. Angulus enim ad a rectus opposito ad i æquatur per 2 c 6 e 10: ideoque ambo recti per c 8 e 3. Reliqui anguli ad e & o per 4 e 6 æquales duobus rectis, & æquales inter se per 2 c 6 e 10. Itaque singuli recti. Neque omnino in parallelogrammo rectus angulus esse potest, quin omnes recti sint.



Itaque

1. Rectangulum comprehenditur à duobus rectis angulum rectum comprehendentibus. 1 d 2.

Hæc Euclidis definitio comprehensionis verbo geometricam multiplicationem quandam significat: ut enim è duobus numeris inter se multiplicatis fit numerus, sic è duobus lateribus in se ductis fit rectangulum, nec tamen rectangulum quodlibet est rationale, ut antea patuit 9 e 4, & postea patebit 5 e.

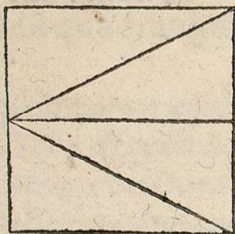
Et

2. Rectangula quatuor complent locum.

Neque omnino interest, æqualia, inæqualia, æquilatera, inæquilatera, homogenea, heterogenea sint quatuor. Quoquomodo enim versentur, anguli relictierunt: ideoque complebunt locū. Neque hic Aristotelis τετραγωνον accipere possumus, nisi rectangulum generaliter intelligat.

3. Si diameter bisecat latus rectanguli, recte secat: & contra.

Ut hic patet per 1 e 7 duobus diagonibus bisegmentorum: cōversa patet per 2 e 7, & 10 e 6.

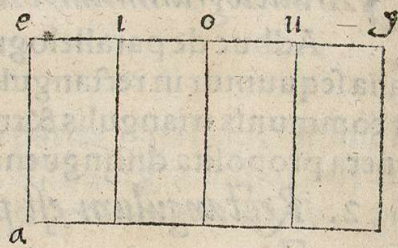


Itaque
Si in

Si inscripta recte bisecat latus rectanguli est diameter. Quia bisecat parallelogrammū.

4. *Rectangulum aequatur rectangulis ex ipsius uno latere & reliquis segmentis.* 1 p 2.

Ut hic rectangula quatuor particularia toti æquantur, quæ fiunt ex a & uno ipsius latere, & segmentis reliquis ei, io, ou, ay , cujus demonstratio est congruentia est, quia totum partibus congruit. Sed eadem ratio in numeris clarior est inductio ne partium, ut quater octona, sunt 32, frango 8 in 5 & 3, quater quina sunt 20, & quater terna 12, totum est 32, denique tota arithmetica multiplicatio ex totis numeris idem facit ac multiplicatio totius per alterius partes, imo partium per partes. Hæc propositio appellatur 9 cap. 1 constr. à Ptolemæo.



5. *Si quatuor rectæ sint proportionales, rectangulum mediarum æquatur rectangulo extremarum.* 16 p 6.

Est $e i c i a e$

10, sed frequē

ter speciale cō

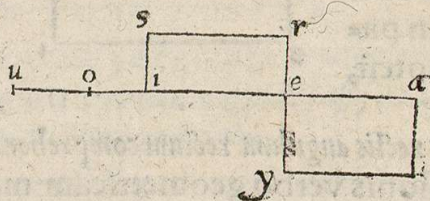
sectariū hoc

appellatur

nomine re-

ctanguli. Ut

hic sunt quatuor proportionales $a e, ei, io, ou$, & ab extremis $a y$ rectangulum, est mediis sit e.



6. *Figuratus rectanguli rationalis appellatur planus.* 16 d 7.

Figura rationalis definita est 9 e 4, qualis est rectilineis adhuc nulla fuit, prima est parallelogrammum rectangulum neque quodlibet, sed illud solum, cujus basis altitudini est rationalis, ratioque basis & altitudinis explicabilis est numero, ubi & figuratus definitus est. Rectangulum autem ex irrationalibus lateribus, qualia 8 e 1 dicta sunt, est irrationale. Rationale itaque rectangulum est rationalibus lateribus accipitur, & ejus figuratus nomine generis appellatur planus, quia est toto planorum genere hæc sola species est rationalis. Si igitur re-

ctanguli basis

est 6, altitudo

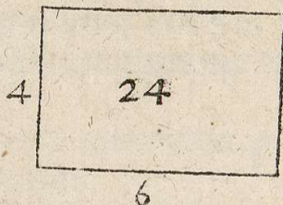
4, area est 24, &

si constet are-

am esse 24, & ba-

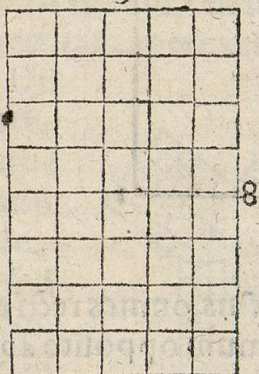
sim 6 esse, con-

stabit altitudinem esse 4: exemplum sic est. Atque hæc multiplicatio ut patuit ad 9 e 4 geometrica est, ut si multiplicies 5 per 8, facis 40 planum, & latera pla-



ni sunt

ni sunt 5 & 8, tanquam fecisses parallelogrammum rectangulum pedum quadratorum 40, cujus basis esset 5 pedum, altitudo 8, hoc modo: hæc inquam multiplicatio est geometrica, nec ex lineis lineæ, ut illic ex unitatibus unitates, sed intervallo uno superior magnitudo creatur, superficies nempe. Hinc etiam patet geodasia rectanguli trianguli. Nam cum crura recti anguli inter se multiplicaveris, facis totum parallelogrammum rectangulum, cujus dimidium est triangulum per 30610.



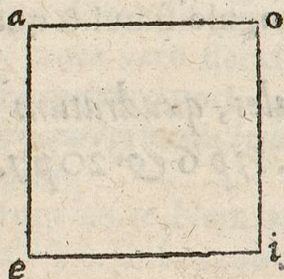
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XII.
de quadrato.

Rectangulum est quadratum vel oblongum.

Hæc partitio fit verbis propriis, at res & differentia subiecta est communis ex angulis & lateribus.

2. Quadratum est rectangulum æquilaterum. 30 di.

Ut hic vides ætio. Quadratum itaque cum sit æquilaterum, & rectis æqualibus equiangulum, è quadrangulis erit ordinatum. Latine vero distinctius quadratum dicitur quàm græce



τετραγωνον id est quadrangulum, quod generale & quadrilateris omnibus commune.

Itaque
Et

1. Latera quadratorum æqualium sunt æqualia.

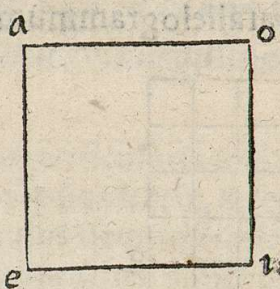
2. Potentia rectæ est quadratum.

ἀρὰς potentia verbum est Euclidis libro decimo usitatum. Dicitur autem linea recta posse quadratum, quia in se ipsam ducta facit quadratum. Potentia porro ista ut Aristoteles ait 5 & 9 phil. dicitur κατὰ μεταφοράν. Et

3. Si due conterminæ perpendiculares æquales claudantur parallelis, constituent quadratum. 46 p 1.

1 2 ut in

Ut in $a e i o$ perpendiculara
res $a o$ & $e i$ æquales clau-
dantur parallelis $a o$, con-
tra $e i$ & $o i$ contra $i e$ con-
stituent quadratum $a e i o$. Parallelogrammum e-
nim est ex thesi, quia op-
posita latera parallela, &
rectangulum, quia cum
angulus perpendicularium $a e i$ sit rectus, omnes recti erunt per 2 e 11. Deinde u-
num latus $e i$ æquatur omnibus, primum opposito $a o$ per 6 e 10, & ipsi $e a$ per
thesin, ideoque opposito $o i$ per 6 e 10.



3. *Planus quadrati est planus æquilaterus.*

Est 18 d 7 paulo secus exposita. Quadratus numerus est, qui est æqualiter æ-
qualis, vel qui comprehenditur à duobus æqualibus numeris. Est vero qua-
dratum ex omnibus planis imprimis rationale, non tamen semper, sed tantū
rationale est cujus numerus est quadratus. Itaque quadrata numerorum non
quadratorum non sunt rationalia.

Itaque

Fit à numero in se ipsum multiplicato.

Quales quadrati sunt primi novem 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. à semel
uno, bis binis, ter ternis, quater quaternis, quinquies quinis, sexies senis, se-
pties septenis, octies octenis, novies novenis. Atque hæc summa est quadrati
numeri genesis & inventio per multiplicationem è dato latere. sed eadem in-
ventio subtilius multisque elementis ab Euclide proponitur, à quo si cui hinc
utilitas ulla speretur, licebit repetere. sequitur varia comparatio quadrati cum
rectangulo, cum quadrato, cum rectangulo simul & quadrato. Ratio cum re-
ctangulo primum est.

4. *Si tres rectæ sunt proportionales, quadratum mediæ æquatur re-
ctangulo extremarum: & contra. 17 p 6 & 20 p 7.*

Conse-

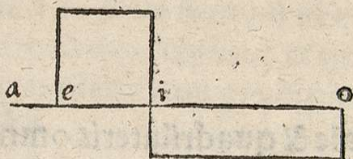
ctariolū

est è 2 c

14 e 10:

Ut in $a e$,

$e i$, 10. Cō

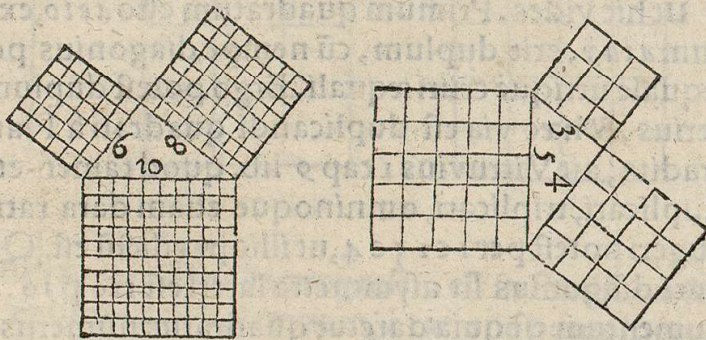


sectarium item hoc quadrati nomine infinite citatur, ut superius illud de re-
ctangulo.

5. *Si basis trianguli subtendit rectum, æque potest cruribus: & contra.*
47 & 48 p 1.

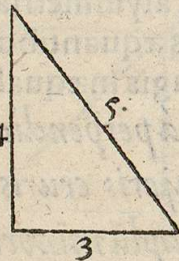
Comparatio quadrati deinceps est cum quadrato, primum ratio est æqua-
litatis

litatis ē 5 & 8, consecrarium quidem, sed tamen consecrarium mirifice celebra-
tum à Pythagoreis, tanquam mater huius nondum nata & inventa esset. Et cō-
secrarium infinite quadrati nomine citatum præ generali: ut permirum sit fi-
liæ & parentem & honorem tantopere celebrari, matris autem parentem & ho-
norem silentio sepeliri. De
Pythagorea exultatione di-
ctum est in proœmio mathe-
matico. Atqui consecrariū
hoc aliquando rationale
numeroq; explicabile, sed
in triangulo vario tantum.
Nam trianguli rectanguli
æquicruri latera sunt irra-
tionalia: varii autem aliquan-
do rationalia, & quidem modo duplici, altero Pythagoræ, altero Platonis, ut
Proclus author est ad 47 p 1. Pythagorea ratio sic est ex impari numero.



1. Si quadratus imparis pro crure primo dati minuatur unitate, dimidius reliqui erit crus al-
terum, auctus unitate erit basis.

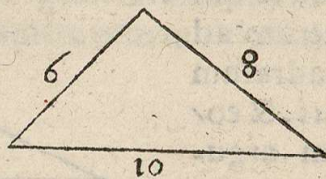
Ut in exemplo
laterū 3. 4. 5. Qua-
dratus basis 5 est
25 equalis quadra-
tis 16 & 9 ē cruri-
bus 4 & 3. Pytha-
goræi vero in hac
invētiōe sibi præ-



cipue placuerunt, eaque de caussa 5 invictus numerus ab iis dicebatur, tanquā
basis illa victrix esset, crura vero debellata, ut Alexander ait primo philoso-
phiæ. Platonica sicest ē numero pari.

2. Si dimidius paris pro crure primo dati quadretur, quadratus minutus unitate erit crus al-
terum, auctus unitate erit basis.

Ut in exemplo laterum 6. 8. 10. Nam basis 10 quadratus 100 æquatur quadra-
tis 36 & 64 ē cruribus 6 & 8. Ex hac ratione rationa-
lium potentiarum (ut Vitruvius ait lib. 9 cap 2) nor-
mam exactissimam fabricari Pythagoras docuit tri-
bus regulis in trianguli speciem compositis, quæ sunt
ut 3. 4. 5. Hinc architectura in scalarum partibus a-
rithmeticam proportionem didicit. Ea namque ratio
quemadmodum in multis rebus & mēsuris est utilis etiam in ædificiis, scalarū
ædificationibus, ubi tēperatas habeant graduum librationes, est expedita. Si
enim altitudo contignationis ab summa coaxatione ad imum libramentum
divisa fuerit in partes tres, erit earum quinque in scalis scalporum iusta longitu-
dinis inclinatio. Nam quam magnæ fuerint inter contignationem & imum li-
bramentum

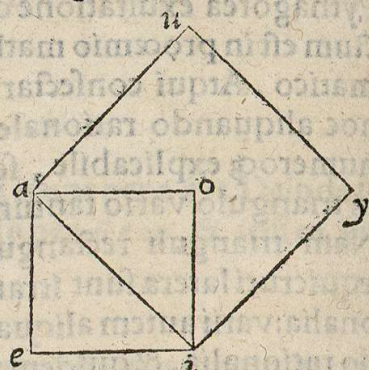


1 3 bramentum

bramentum altitudinis partes tres, quatuor à perpendiculari recedant, & ibi collocentur interiores calces scalporum. Ita enim erunt reperiata graduum & ipsarum scalarum collocationes.

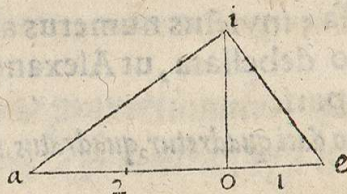
3. *Diagonius potest duplum lateris, eique est asymmetra.*

Ut hic vides. Primum quadratum esto $a e i o$, ex cuius diagonio $a i$ fiat quadratum $a i u y$, erit duplum, cum nempe diagonius potest æquale utrique cruri æquali. Ergo potest duplum alterius, & hæc via est duplicandi quadrati à Platone tradita, ait Vitruvius 1 cap 9 lib. quod tamen etiam duplicari, triplicari, omninoque etiam data ratione augeri potest per 1 c 15 e 4, ut illic prædictum est. Quod autem diagonius sit asymmetra lateri est 116 p 10. Argumentum est quia daretur quadratus numerus duplus quadrati numeri. Quod Proclo 2 cap 2 / Theonique & Campano ad 116 p 10 impossibile per se clarum visum est. At illud clarius est in libello de lineis individuis Aristoteli attributo. Quia par esset impar. Nam si diagonius sit 4 latus 3, quadratum diagonii 16 duplum erit ad quadratum lateris, & ita quadratum lateris erit 8, & idem erit 9 nempe ex 3, sicque par esset impar. Hanc asymmetriam Aristoteles frequenter appellavit, ut illam de tribus angulis duos æquantibus. Huc addi possit illud ad 42 p 10. Segmenta rectæ varie sectæ magis inæqualia majus posse.

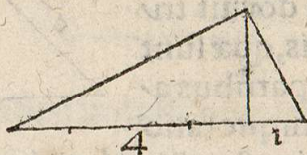


6. *Si basis trianguli rectanguli secatur à perpendiculari ex angulo recto dupla ratione, potest sesquialterum majoris cruris, triplum minoris: si quadrupla, sesquiquartum majoris, quintuplū minoris, ad 13. 15. 16 p 13.*

ut in $a e i$ basis $a e$ segmentum $a o$ sit duplū ad segmentū $o e$, nempe 2 ad 1. Id enim esto secari dupla ratione, ut deinceps quadrupla, tota erit sesquialtera ad $a o$, ideoque per 3 c 4 e 8, & 1 c 15 e 4, quadratum ex $a e$ sesqui-



alterum ad quadratum ex $a i$, & eodem argumento triplum ad quadratum ex $e i$. Reliqua de quadrupla sectione patent in subiecta figura simili argumento.



7. *Si recta est secta quodlibet fariam, potest multiplex segmenti cognoscimine quadrato numeri sectionis.*

Sic bisecta poterit quadruplū dimidiū cognomine quaternario, quadrato bi-

nariū secundum

quem fit bise-

ctio, sic trisecta

poterit nuncu-

plum trientis,

quadrisecta se-

decuplum qua-

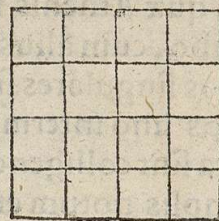
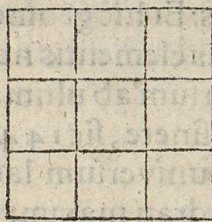
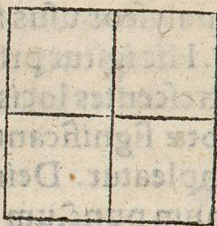
drantis: Ut hic

vides. Hoc The-

onī postulatur in demonstratiōe 18 p 13. Qualis progressio est in similibus &

planis & solidis in Eratosthenis epistola ad Ptolemæum, ē ratione homologo-

rum laterum æquemultiplicata dimensionibus.



8. Si recta est secta in duo segmenta, quadratum totius æquatur qua-

dratis segmentorum duplici rectangulo utriusque. 4 p 2.

Tertia ratio qua-

drati deinceps est

cum duobus rectā-

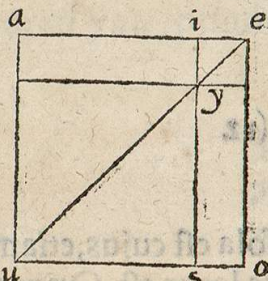
gulis & duobus

quadratis prim o

æqualitatis. Con-

sectarium est ē 3 c

11 e 10, quia paral



lelogrammum æquatur diagonalibus & complementis. Si recta a e secta sit in i
facit quadratum a e u o majus quam segmentorum a i & i e quadrata u y & y e du-
plici rectangulo a y & y o.

Itaque

Latus primi diagonalis est latus alterius complementi, & duplicatum est latus simul utriusque:
reliquum autem latus simul utriusque est latus reliqui diagonalis.

Hæc ratio est quadrati cum rectangulo & quadrato. Quadrati autem nume-
ro propositi latus sæpe quæritur. Itaque per proximum elementum, & ejus con-
sectariū analysi quadrati lateris instructa est. Quærat igitur latus jam pro-
positi quadrati, & genesis ante spectetur, qualem hic ē numerorum multiplica-
tione in numeris ipsis vides.

10	2	
10	2	
2	4	
2	0	
1	0	0
1	4	4

Hæc

Hæc ratio est quadrati cum rectangulo & quadrato, unde habetur analysis quadrati lateris explicabilis numero. Eadem siquidem via est Thebis Athenas, quæ Athenis Thebas: Et hic geometricæ analyseos usus superest, ut postea in cubo, cum alius in totis elementis nullus sit. Hic igitur primo notabis quadratos singulares sinistrorsum ab ultima nota crescentes locis imparibus, & deinceps uno intermisso desinere, sic 144; hæ notæ significant quot singularia latera sint colligenda, ut univèrsum latus compleatur. Deinde quod primis exemplis notum est, quadrati maximi in primum punctum desinentis, latus pro quo adnota, & ipsum quadratum à numero in idem punctum desinente subducito, latus erit 1, nec quicquam restabit, sic 144 (1: hæc primi lateris singularis est inventio: Secundo duplica latus jam repertum, fient 2 & subijce sequenti plano 4. ex duobus planis factò, quia latus est amborum planorum in unum compositorum, & per hoc latus divide totum planum, evenit 2 pro secundo quo, reliquum nempe ejusdem plani latus: quod quia latus est etiam quadrati sequentis, subijcito sequenti puncto tanquam divisoris notam: facta multiplicatione dividendium notarum & factorum subtractione nihil restabit. Sic erit exemplum totum.

$$\begin{array}{r} \times 44 \\ \times 22 (12 \\ \times 44 \end{array}$$

Quare hac numeratione divisio plani sola est cussa, etiam latus negligitur & tantum quæritur, quia quadrati sequentis latus est. Quærat latus 15129. Primo notato impares locos, sic 15129. Deinde quadrati maximi in primum punctum desinentis latus adnotato & lateris quadratum subducito, nihil restat. sic

$$\begin{array}{r} 15129 \\ \times \end{array} (1$$

Secundo repertum latus 1, duplicatum subijcito plano sequenti 5, & per illud dividito ipsum planum, eveniet 2, reliquum latus adnotandum in quo secundo loco post jam repertum latus, & subijciendum sequenti puncto peracta factorum subtractione, manebunt 7. sic

$$\begin{array}{r} 7 \\ 15129 (12 \\ \times 2 \\ \times 44 \end{array}$$

Hæc secunda singularis lateris est inventio. Tertio reperta latera duplicentur velut unum, & unius præcedentis quadrati. Quamvis enim in universi quadrati la-

drati latere retexendo quadrati singularis duobus plures incidant : attamen duo tantum considerantur, & præcedentium omnium latera pro unius quadrati latere numerantur. Ergo reperta latera velut unum duplicentur, fient 24, & subjiciantur plano sequenti 72, planus divisus dabit 3, reliquum plani latus adnotandum tertio loco post reperta latera, & subjiciendum sequenti puncto, facta subductione nihil restabit.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 15129 \text{ (123)} \\ 243 \\ \hline 729 \end{array}$$

Aliquando post quadratum jam repertum locis proximis, nec planus nec quadratus est ullus. Itaque latus ejus singulare erit 0 : ut in quadrato 366025, latus univrsum est 605, ex tribus lateribus singularibus, quorum medium est 0. Aliquando etiam planus intermedius partem sequentis quadrati continet. Itaque si latus reliquum majus sit latere quadrati sequentis æquandum est, ut quærat latus quadrati 784, primi quadrati latus erit 2, & supererunt 3 sic.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 784 \text{ (2)} \\ \hline 4 \end{array}$$

Tum latus idem duplicatum subjiciatur plano sequenti 38, planus divisus daret 9 pro reliquo latere : at hoc latus majus esset latere sequentis quadrati : minuatur igitur 1, & pro latere 9 sumatur 8 latus, & adnotetur, sequentique quadrato subjiciatur, facta subductione nihil manet.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 784 \\ \hline 48 \text{ (28)} \\ 384 \end{array}$$

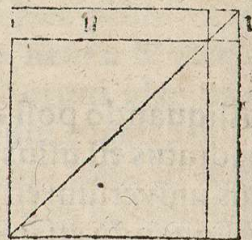
Atque hinc patet inventio medii proportionalis inter duos datos numeros, si quis tamen est. Nam si factus à duobus est quadratus, latus quadrati est medium inter datos, ut patet per auream regulam, si propositus numerus non est quadratus. Arithmeticum latus & numero explicabile nullum reperietur, & hic numerus figuratus est umbra figuræ geometricæ, nec assequitur, neque tale quadratum est rationale : Quadrati tamen in eo maximi numerabile latus inveniri potest : ut in 148, numerus quadratus 144 continetur, & latus ejus est

m 12, super

12, supersunt vero 4. Latus igitur talis numeri non quadrati exactum nullum est, nec ullum unquam tam vero propinquum reperietur, quin vero propius posset inveniri. Itaque est inexplicabile numero. Duo hujusce inventionis modi sunt, alter per gnomonis additionem, alter per dati numeri non quadrati reductionem ad partes majoris alicujus nominis.

Si latus inventum duplicetur, & duplicato unitas addatur, totus erit gnomon proximæ majoris quadrati.

Nam latus est complementum alterum, & duplicatum est simul utrumque, unitas autem est ultimum diagonale: Ut hic vides circumponi gnomonem quadrati o priori, eamque differentiam esse quadrati majoris à minore, ubi Aristotelis gnomon additus quadrato auget, non mutat speciem: quod perpetuo verum est, si majoris quadrati gnomon addatur proximo minori quadrato tanquam diagonali. Itaque ut gnomon habeatur pro reliquo nominatore duplicatur inventum latus pro duplicato complemento, & unitas additur pro diagonali. Sic latus numeri 148 est $12\frac{4}{3}$, cujus ratio pendet ex eadem propositione, unde & latus integrum invenitur. Cum enim latus uniuscujusque quadrati proximo minoris tantum distet unitate à latere proximo majoris quadrati, eadem unitas & bis in quadrati precedentis latus & semel in seipsam ducta gnomonem majoris lateris quadrato adjicit: Nā quadratum facit 169. Quo intelligitur quantum numerator 4 abest à nominatore 25, tantum gradatum 148 abesse à proximo majore quadrato. Nā si addas 21, quo abest 4 à 25 facies quadratum 169, cujus latus est 13. Secundus modus est per reductionem ad datas partes magni nominis, ut centesimas, millesimas, aut minutiores alias, & quidem quadratas, ut earum latus certum jam constet. Quanto autem minores fuerunt, tanto propius vero latus invenietur. Sit idem exemplum 148 reductum ad centesimas quadratas $\frac{1480000}{10000}$ nominatoris latus est 100: numeratoris autem 1216, & supersunt 1344, sic $\frac{1216}{100}$ id est $12\frac{16}{100}$, vel $\frac{4}{3}$ quod primo etiam modo patebat. Sed in latere numeratoris præter 1216 supersunt 1344, quo tantulo modus hic est accuratior priore: reliqua tamen ista negliguntur, quia ne unam quidem centesimam invento lateri possunt addere, neque enim $\frac{1344}{10000}$ faciunt unam centesimam. Atque etiam in minoribus partibus secundus modus præter reliqua monstrat latus aliquanto majus latere per primum modum reperto, ut in 7 latus est per primum modum $2\frac{3}{5}$: At per secundum modum latus 7 reductum ad quadratas millesimas, id est $\frac{7000000}{1000000}$ id est $\frac{2645}{1000}$, & supersunt 3975. At $\frac{645}{1000}$ sunt majores $\frac{3}{5}$. Nam $\frac{3}{5}$ reductæ ad $\frac{1000}{1000}$ sunt $\frac{600}{1000}$. Itaque secundus modus in hoc exemplo superat primum $\frac{45}{1000}$, neglectis etiam reliquis 3975. Ergo hæc analysis est quadrati lateris è prima ratione quadrati duplici & rectangulo & quadrato æqualis.



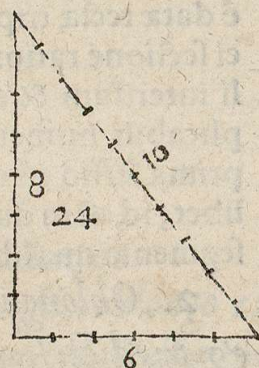
Triangula

Trianguli Geodesia.

Trianguli cujuscunque geodesia generalis una est apud Heronem laterum additione, subductione, multiplicatione, & quadrati lateris inventione hoc modo.

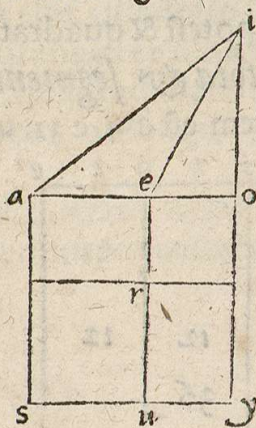
9. Si de dimidio collectorum laterum dati trianguli latera sigillatim subducantur, latus continue facti è dimidio & reliquis erit area trianguli.

Ut latera trianguli $a e i$ collecta sunt 24, dimidium 12, unde subductis lateribus 6. 8. 10, reliqua sunt 6. 4. 2: jam fac continue primo 72 è 12 & 6, secundo 288 è 72 & 4: tertio 576 è 288 & 2. Latus continue facti 576 est 24 area trianguli. Geodesia ista generalis facillima & expeditissima est, si latera integro numero numeretur, quamvis si causam requiras anigmati potius, quàm theoremati germana sit. Itaque demonstratio ejus in Herone nulla est. Jordanus & Jordano posteriores demonstrare conati sunt, sed obscure & per stereometriam, quam etiam continuatio multiplicationis è dimidio & reliquis in ipso theoremate videtur indicare. Demonstrationem itaque hanc rejecimus in scholas ad finem ultimi libri, si quis requirat. Specialis autem geodesia trianguli rectanguli jam dicta est, sed obliquanguli postea dicetur. Sed generalis longe præstantior: Nam reductione obliquanguli multæ fraudes accidunt, ut lepido voto Cardanus tantum Cagri optasse videatur quantum pseudographia ista deperiret.



10. Si basis trianguli subtendit obtusum, plus potest cruribus duplici rectangulo alterius, & ex eo continuationis ad verticis perpendicularem. 12 p 2.

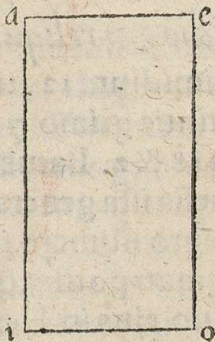
Comparatio quadrati cum duobus item rectangulis & totidem quadratis est, sed inæqualitatis. Ut in triangulo $a e i$ basis $a i$ quadratū majus est, quam quadrata crurum $a e$ & $e i$ duplici rectangulo $a r$, quod fit ex altero crure $a e$ & continuatione $e o$. Nam per γ e quadratum ex $a i$ æquatur quadratis ex $a o$ & $o i$ id est tribus quadratis, ex $i o$, $o e$, $e a$, & duplici dicto rectangulo. At quadrata crurum $a e$ & $e i$ æquantur quadratis tribus illis ex $a e$ nempe suo & ex $e i$ duobus, primo $i o$, secundo ex $o e$ per γ e. Itaque excessus restat duplici rectanguli.



de oblongo.

Oblongum est rectangulum inaequilaterum. 31 d 1.

Ut hīc a e i o. Hāc rectanguli species secunda in elementis ad solam definitionē proprie nominatur ab Euclide. Ratio oblongorum copiosa est ē data recta tripli- ci sectione rationa- li interdum & ex- plicabili numero, prima sectio est ut- libet, id est in duo

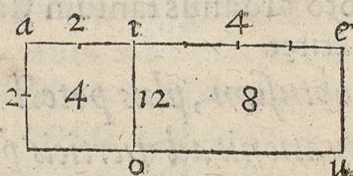


segmenta qualibet aequalia vel inaequalia: unde ratio quadruplex oritur.

2. Oblongum ē tota & segmento aequatur rectangulo segmentorum, & praedicti segmenti quadrato. 3 p 2.

Consectariū est e 4 ē 11. Rectangulū enim segmentorū & quadratū sunt ex altero latere & reliqui segmentis. Ut recta a e secta sit in a i 2 & i e 4, rectangulū 12 ex a e 6 & a i 2 aequatur re-

ctangulo i u 8 ē segmentis a i & i e, item quadra- to a o 4 ē praedi- cto segmento a i: rectangulum autem hic ideo

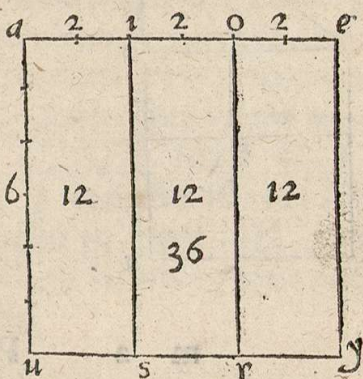


proponitur, quia potest & quadratum esse, si linea nempe sit bisecta. Secundo.

3. Oblonga ē tota & segmentis aequantur ē tota quadrato. 2 p 2.

Consectariū item est ē 4 e 11. ut recta a e 6 secta sit in a i 2, i o 2, o e 2, oblon-

ga 12 a s, 12 i r, 12 o y, ē tota recta a e, illisque segmen- tis aequā- tur qua- drato a y ē tota:

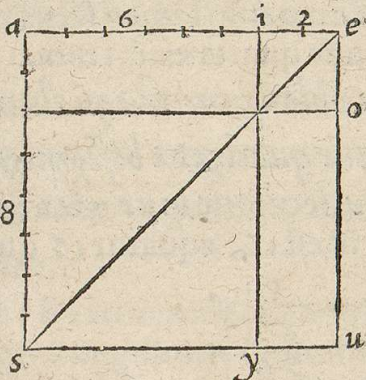


Hic segmenta duobus plura sunt, & tamen ā primo reliqua pro uno sumi possunt, cum

sunt, cum rectangulum particulare item sit cum illis æquale. Hæc propositio
adhibetur ad 6 e 18. Tertio.

4. Oblonga duo è tota & segmento cum tertio quadrato reliqui seg-
menti æquantur quadratis totius & prædicti segmenti. 7 p 2.

Ut recta ae 8
secta sit in ai 6
& ie 2, oblonga
 ao & iu è tota &
segmento 2 sunt
32: quadratum 8
è 6 reliquo seg-
mento est 36, to-
tumque 68, to-
tus autem ae 8

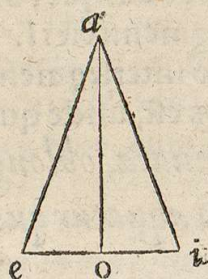


quadratum est 64, & prædicti segmenti 2 est 4, summaque eadem 68.

5. Basis trianguli acutanguli minus potest cruribus duplici oblongo ex
altero crure & ejus segmento à dicto angulo ad verticis perpendiculararem.

13 p 2.

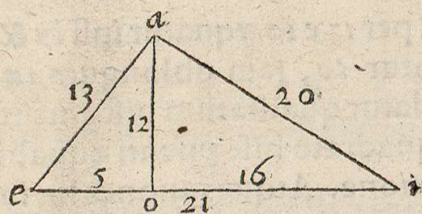
Ut in triangulo aei su-
matur angulus ad i acu-
tus. Hic per 4 e oblonga
duo ex ei & oi cum qua-
drato eo æquantur, qua-
dratis ex ei & oi , commu-
ne addatur quadratum
ex ao . Hic quadratum ex



ei cum quadratis ex io & oa , id est per 5 e 12 cum quadrato ex ia æquatur duo-
bus oblongis ex ei & oi cum duobus quadratis ex eo & oa , id est per 5 e 12 cum
quadrato ex ea . Itaque duo oblonga cum quadrato basis æquantur quadratis
crurum, vinciturque basis à cruribus duobus oblongis. Atque hinc habetur
perpendicularis in triangulo. Itaque

Si quadratum basis acuti anguli tollatur è quadratis crurum, reliqui dimidio per crus diviso,
quotus erit segmentum dividens à dicto angulo ad verticis perpendiculararem.

Ut in triangulo acu-
tangulo aei sunt latera
13. 20. 21, & ae sit basis a-
cuti, quadratum ejus er-
it 169, quadrata cru-
rum ai & ei addita 841,
& inde sublato quadra-



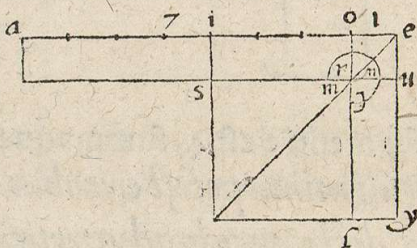
to 169 relinquuntur 672, dimidium 336, quo diviso per 21 quotus erit 16, seg-
m 3 mentum

mentum dividētis cruris ei ab angulo aie ad verticis perpendicularem ao : reliquum itaque segmentum erit 5: Jam de 169 quadrato basis 13, tollatur 25 quadratum ē minoris segmento 5, relinquentur 144 pro quadrato perpendicularis per 5 ē 12. Hic inventa perpendicularis & latus sēctum latera sunt rectanguli, cujus dimidium erit area trianguli, ut hic rectangulum ē 21 & 12 erit 252, dimidium 126 erit area trianguli. Hoc Theon paulo tamen secus in 6 lib. magnæ cōstructionis: sequitur secunda sēctio, unde quarta existit ratio.

6. Si recta est bisecta, secusque oblongum inaequalium segmentorum cum quadrato intersegmenti aequatur quadrato bisegmenti. 5 p 2.

Ut recta ae 8 sit bisecta in ai 4, & ie 4, secusque in ao 7 & oe , oblongum ex 7 & 1, cum 9 quadrato intersegmenti 10 3 id est 16. æquatur 16 quadrato bisegmenti ie 4. Quod etiā

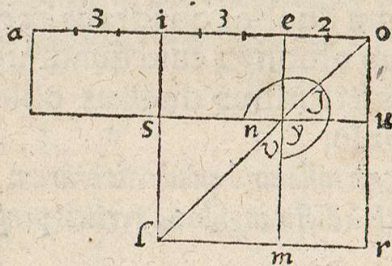
geometrice patet completo diagrammate. Nam as parallelogrammum ipsi iu parallelogrammo per 13 ē



10 æquatur, & ideo per 11 ē 10 ipsi oy . Nam complementis æqualibus commune est ou . Itaque si commune so addatur utrique, oblongum ar æquabitur gnomoni nu , quadratum autem intersegmenti est sl . Quare oblongum segmentorum inæqualium ar , cum quadrato intersegmenti sl , æquatur quadrato intersegmenti iy . Tertia sēctio deinceps est, unde quinta est ratio.

7. Si recta est bisecta & continuata, oblongum continuata & continuationis cum quadrato bisegmenti æquatur quadrato composita ex bisegmento & continuatione. 6 p 2.

Ut recta ae 6 bisecta in ai 3 & ie 3 & continuata in eo 2, oblongum 16 ex 8 continuata & continuatione 2 cum 9 quadrato bisegmenti id est 25, æquatur quadrato 25 ex 3 bisegmento & continuatione 2 id est ē 5: geometrica item conclusio hic fuerit, ut prius. Nam as per 13 ē 10 æquatur ipsi iy & per 11 ē 10 ipsi yr complemento: æqualibus addatur so , Jam oblongum au æquabitur gnomoni nu . Denique æqualibus addatur quadratum bisegmenti. Oblongum continuata & continuationis cum quadrato bisegmenti æquabitur quadrato composita ē bisegmento & continuatione. Atque rationes hæ fuerunt oblongi cum rectangulo. Hinc existit mesographus Heronis mechanici seu mesolabus dictus ab

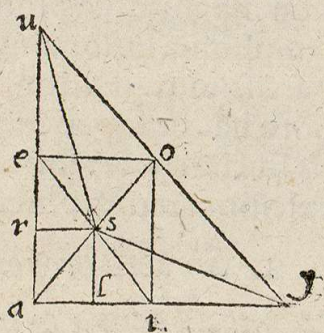


inventionē

inventionem duarum continue mediarum proportionalium inter duas datas: unde existit problema deliacum quod Apollinem ipsum exercuit. Mesographus autem Heronis est infinita regula, quæ sistitur cochleato unco per cavum mobili, est vero ut Pappus ait initio. libri tertii mesographus iste architectis aptissimus, multoque promptior Platonis mesographo: mesographi mechanica est apud Eutocium secundi de sphaera, sed paulo facilius à nobis ita proponetur.

8. Si duas datas rectas comprehendentes rectangulum, & infinite continuatas mesographus tangens oppositum angulum angulo datarum interfecet æquidistanter à centro, intersegmenta erunt media continue proportionalia datis.

Ut datas rectas ae & ai comprehendentes rectangulum ao & continuatas mesographus uy tangens angulum o oppositum angulo datarum interfecet æquidistanter à centro: Centrum quidem concursus diagonorum ao & ei ostendet in s : ad æquidistantiam autem à centro volvendus est mesographus, & adhibendus circinus, & hoc mechanicum nullo principio geometriæ certo adhuc inventum est, ut protinus actione prima æquidistantia deprehendatur. Sint igitur æquidistantiæ pñcia u & y . Dico intersegmenta esse media: utque ae est ad iy , sic iy esse ad eu , sive ue ad ai . Primum esto à centro s perpendicularis sr in latus ae bisecabit latus ae per 3 e 11. Itaque per 7 e oblongum ex au & ue , cum quadrato re æquatur quadrato ru , assumptoque communi rs oblongum cum duobus quadratis er & rs , id est per 5 e 12 cum quadrato se , æquatur quadratis ru & rs , id est per 5 e 12 quadrato su . Simillimum est de oblongo ex ay & yi , ducta sl perpendiculari ut prius. Hoc enim oblongum cum quadratis li & sl id est per 5 e 12 cum quadrato is æquatur quadratis yl & sl , id est per 5 e 12 ys . Itaque oblonga æqualibus æqualia æquantur inter se, sublatisque utrinque æqualibus æqualium radiorum per 3 e 6 e 10 quadratis se & si relinquentur æqualia. Quare per 14 e 10 laterum æqualium rectangulorum sunt reciproca, utque ua ad ay , sic yi ad ue . Jam vero ut ua ad ay , sic per c 9 e 7 oi , id est per 6 e 10 ea ad iy , & sic igitur ex conclusio yi ad ue , & sic per c 9 e 7 ue ad oi id est per 6 e 10 ad ai . Itaque ut ua ad yi , sic yi ad ue , & sic ue ad ai . Quare intersegmenta eu & iy sunt continue proportionalia inter datas.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XIII.

de recta proportionaliter secta & de reliquis quadrangulis.

Adhuc sectio triplex fuit, unde æqualitatis rationes quinque fuerunt rationales

nales: sequitur de sectione tertia alia sectio in segmenta duo toti proportionalia. Sectio ipsa primum definienda.

I. *Recta secatur secundum mediam & extremam rationem, quando fuerit ut tota ad majus segmentum, sic majus segmentum ad minus. 3 d 6.*

Hæc definitio geometrici generis tota est, per tropum tamen quendam sermonis ratio media & extrema dicitur pro medio & extremo proportionis termino. Secatur enim hæc linea sic, ut ipsa cum duobus segmentis faciat tres proportionis terminos, ipsaque tota sit primus terminus, majus segmentum medius, minus sit tertius, id breviter & proprie dicatur secari proportionaliter. Proportioni autem sectionis hujus à Campano 10 p 14 mirabilis potentia tribuitur in adscriptionibus ordinatorum solidorum: Cui (ait) cum plurima philosophantium admiratione digna conveniant, hoc principium vel præcipuum ex superiorum principiorum invariabili procedit natura, ut tam diversa solida tum magnitudine tum basium numero, tum etiam figura irrationali quadam symphonia rationabiliter conciliet. Hæc Campanus, alioquin laudum orator parcissimus. Eadem sectionis proportio divina appellatur à Luca Paciolo in libro hac de re per scripto, & cujus singulares usus comperientur vel in elementis Euclideis de fabrica quinquanguli, icosacedri, dodecaedri. Atque inde & celestium rerum præcipua mysteria à Ptolemæo repetuntur.

2. *Si recta proportionaliter secta est rationalis data & mensura, segmenta sunt ad eam & inter se irrationalia. 6 p 13.*

Euclides appellat utrumque tale segmentum ἀποτομήν residuum, & certe segmenta hæc aliter explicari non possunt quam per residuum, ut si linea 7 pedum ponatur hoc modo,

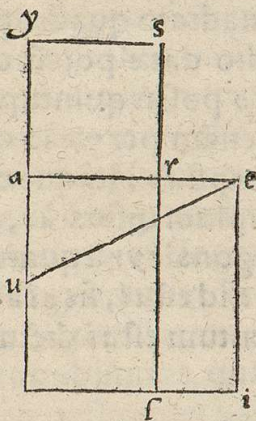


majus segmentum dicetur linea 7 pedum unde minus segmentum detractum sit, neque minus segmentum potest aliter explicari, nisi pars reliqua lineæ 7 pedum, unde majus segmentum sit detractum. Triangulum & triangulatis omnia excepto parallelogrammo rectangulo, irrationalia esse sumuntur in geometria, neque tamen proponuntur, & hoc item sumi potuisset. Hæc igitur sectionis proportionalis definitio est: sectio sequitur è ratione oblongi cum quadrato.

3. *Si quadratum fiat e' data recta, recta ab angulo facti ad medium contermini lateris differentia supra dimidium erit majus segmentum datae proportionaliter sectæ. II p 2.*

Esto data ae , quadratum ex ipsa ae io & ab angulo e ad u medium contermini lateris, sit recta eu , & comparetur dimidio ua , differentia supra dimidium erit ay , quam dico majus esse segmentum datae ae proportionaliter sectæ. fiat ex ea qua

ea quadratum ay & sr , & continuetur sr in l . Jam per 7 e 13 oblongum ex oy & ay cum quadrato ex ua æquatur quadrato ex uy , id est per constructionem ex ue , & ideo per 5 e 12 æquatur quadratis ea & au . Tollatur utrinque commune quadratum ex au . Reliquum oblongum yl æquabitur quadrato ai , utrinque tollatur commune al , quadratum yr æquabitur oblongo ri . Itaque tres rectæ ea , ar , re , per 4 e 12 sunt continuè proportionales, & recta ae secta est proportionaliter.

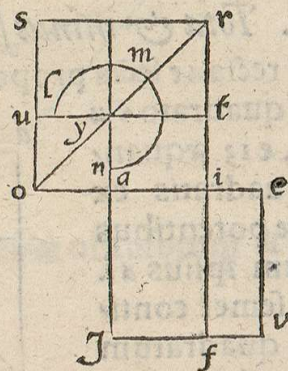


Si recta proportionaliter secta continuetur majore segmento, tota secabitur proportionaliter, & majus segmentum erit data. 5 p 13.

Ut in eodem exemplo recta oy continuata est majore segmento, & oblongum è tota & minore segmento æquatur quadrato majoris. Atque ita licet infinite proportionaliter secando rectam augere, itemque contra minuere: minus segmentum rectæ proportionaliter sectæ est majus segmentum majoris proportionaliter secti & hinc diminutio fiet in infinitum.

4. Majus segmentum continuatum dimidio totius potest quintuplum ejusdem dimidii, & si recta potest quintuplum sui segmenti, reliquum factum duplum prædicti secatur proportionaliter, & majus segmentum est idem reliquum. 1 & 2 p 13.

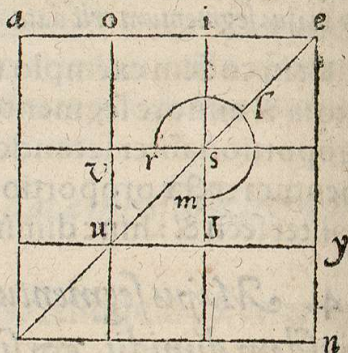
Hæc fabrica est proportionalis sectionis. ratio triplex sequitur: prima est majoris segmenti. Recta igitur ae secetur proportionaliter in i , majusque segmentum sit ia , & secta cōtinuetur in io , ut oa sit dimidium sectæ: dico quadratum ex io quintuplum esse quadrati ex ao : fiat igitur ex ao quadratum ao & uy , item ex io fiat quadratum $iosr$, videmus quadratum ua semel comprehendi in quadrato si . Jam doceamus in gnomone reliquo lmn quater comprehendi, & describatur quadratum $aejv$ & continuetur r in f , hic quadratum ae quadruplum est per 7 e 12 ad illud ua descriptum è dimidio, & æquatur gnomoni. Nam pars iv æquatur ipsi ry , primo per thesim cum ai sit majus segmentum, under y fit quadratum, quia diagonale alterum etiam quadratum: secundo complementa sy & yi per 11 e 10 æquantur, & iis æquatur af . Nam per 12 e 10, perque thesim dupla est complementi yi . Itaque æquatur utriusque.



que. Quare gnomon æquatur quadrato quadruplo dicti quadratuli, majusque segmentum continuatum dimidio datae potest quintuplum. Conversa patet in eodem exemplo. Nam cum io possit quintuplum ipsius ao , gnomon $lmne$ erit quadruplus ipsius ua , cuius etiam per 7 e 12 quadruplum est av . Itaque æquale gnomoni: aj autem æqualis ipsi ae : Itaque dupla etiam ipsius ao id est ipsius ay , & ideo per 13 e 10 ji duplum ipsius at , ideoque æquale complementis iy & ys , reliquum igitur diagonale yr æquatur reliquo rectangulo iv . Quare per 4 e 12 ut v id est ae est ad y t id est ai , sic ai ad ie . Quare per 1 e 4 secatur proportionaliter, & majus segmentum est ai dictum reliquum. sequitur altera proprietas quintupli.

5. *Minus segmentum continuatum dimidio majoris potest quintuplum ejusdem dimidii. e' 3 p 13.*

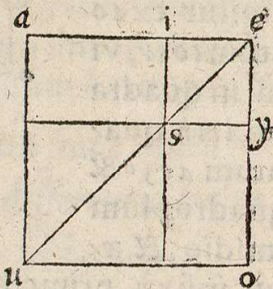
Ut hic recta ae secetur in i proportionaliter, & minus segmentum ie continetur usque ad o dimidio majoris ai . Dico oe posse quintuplum ipsius io . fiat igitur ex linea ae quadratum, & compleatur figura, noteturque dimidii quadratum su & gnomon rlm . Hic primum quadratum oy est quintuplum secundis su . Comprehendit enim semel & gnomon reliquus rlm quater: æquatur enim oblongo in , quia os complementum æquatur ipsi sy per 11 e 10 , & ideo ipsi jn , cum totum complementum as totis sn æquetur, & av ipsi os æquetur per fabricam & 12 e 10 , additoque utrique communi iy , totus gnomon toti oblongo æquatur. At oblongum in æquatur quadrato aj per thesim & 4 e 12 , quod per 7 e 12 quadruplum est quadratis u . Quare minus segmentum ie continuatum io dimidio majoris potest quintuplum ejusdem dimidii.



Sequitur ratio tripli.

6. *Tota & minus segmentum possunt triplum majoris. e' 4 p 13.*

Sit recta ae secta proportionaliter in i , & figura compleatur, oblonga ay & io cum quadrato su per 4 e 13 æquantur quadratis ex ae & ie potentibus triplum ipsius ai . Nam semel continent quadratum su , & oblongum utrumque eidem quadrato su æquatur per thesim & 4 e 12 . Itaque ter continent.



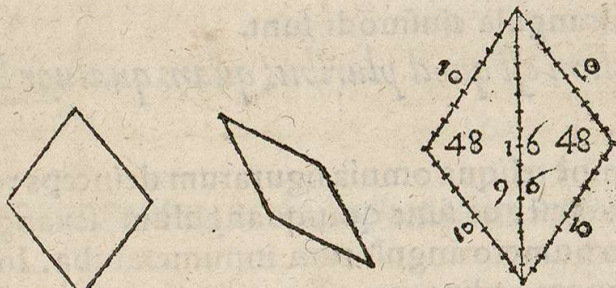
7. *Parallelogrammum obliquangulum est rhombus aut rhomboides*

Hactenus

Haecenus geometria fuit parallelogrammi rectanguli, superest brevissima in Euclidis elementis geometria de parallelogrammo obliquangulo, deque rectilineis reliquis, neque omnino prolixa geometria hic requirebatur, quia ex antecedente tota percipitur, reducendo nempe ad parallelogrammum per 2 e 11 e 10, quod per species specialibus exemplis intelligitur. Euclides autem sine ulla partitionis luce negligentius exposuerat, & a Posidonio ob eam causam emendatus, ut Proclus indicat: Nos igitur ex methodica lege istam lucem aspernari nequaquam debuimus: parallelogrammum obliquangulum jam definitum est ex opposito parallelogrammi rectanguli: ut patet 2 e 11, ubi omnes obliqui sunt anguli, neque enim potest unus rectus esse in parallelogrammo, quin omnes sint recti, nec unus obliquus, quin omnes etiam sint obliqui. Dichotomia vero opposito genere respondet parallelogrammo rectangulo quadrato & oblongo. Nam quadratum & oblongum in rhombum & rhomboides dislocantur.

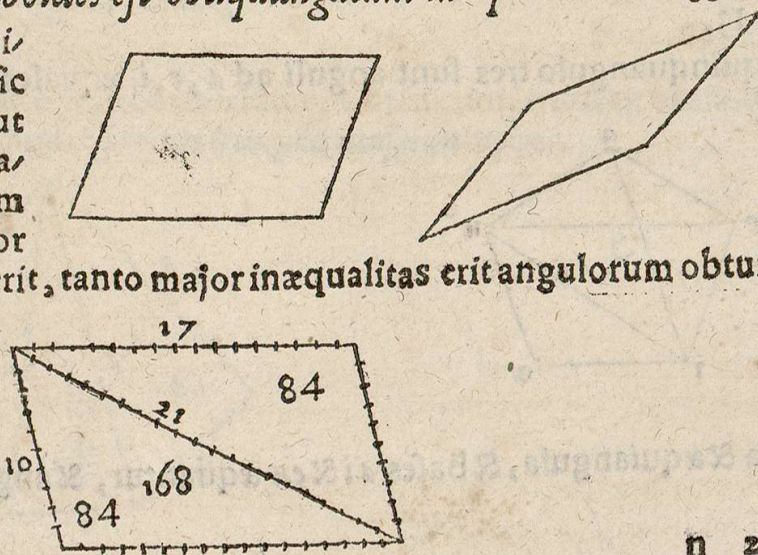
8. *Rhombus est obliquangulum equilaterum.* 32 d. 1.

Unde constat rhombum esse quadratum angulis veluti compressum, quo nomine & piscis & nentium mulierum instrumentum & in vitreis fenestris dissecta plumbo, laminae, quia figuram hanc praese ferant, appellantur. Quo vero compressior rhombus fuerit, tanto magis duo acuti erunt anguli, duo obtusi, ut hic. Exemplum vero metiendi rhombi in triangula secti sic est, geodasia enim triangulorum a triangulis repetitur.



9. *Rhomboides est obliquangulum inequilaterum.* 33 d. 1.

Et rhomboides oblongo sic opponitur, ut rhombus quadrato, sic item quanto major coarctatio fuerit, tanto major inaequalitas erit angulorum obtusorum & acutorum, ut hic. Et rhomboides dicitur tamquam rhombosimile, tametsi simile praeter inae-



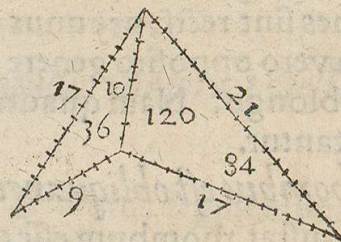
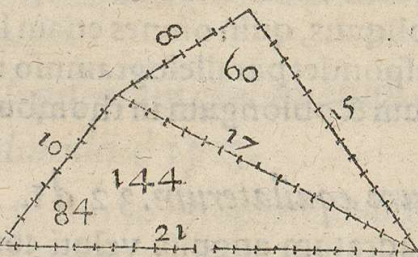
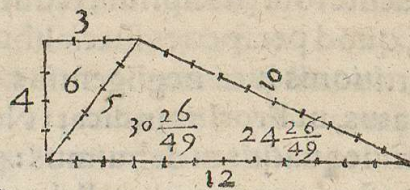
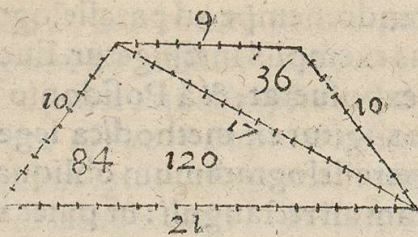
n 2

qualita

qualitatem angulorum nihil habet, mensuræ exemplum sic esto.

10. Trapezium est quadrilaterum, non parallelogrammum. 34 d r.

Superest é qua-
drangulis tra-
pezium. Eucli-
des postulat
hanc fabricam
trapezium tan-
quam mensu-
lam vocari: &
sane nominis
ejus ratio geo-
metrica nulla
est. Exempla fi-
gura & mensu-
ra ita sunt. Er-



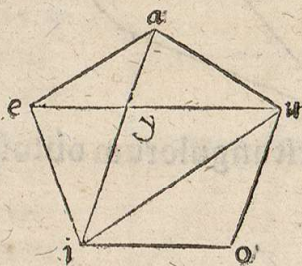
go triangulata quadrangula ejusmodi sunt.

II. Multangulum est quod pluribus quam quatuor lineis rectis comprehenditur. 23 d r.

Hoc generali nomine reliqua omnia figurarum deinceps rectilinearum genera Euclides complexus est, ut sunt quinquangulum, sexangulum, septangulum, & deinceps pro numero angulorum innumerabilia. In quolibet autem multanguli genere unum ordinatum esse prædiximus, ut quinquangulum ordinatum, sexangulum ordinatum, & sic in aliis. De quibus omnibus separatim quod hic percipi possit, nihil animadverti, nisi unum de quinquangulo, quod adjungemus, reliquis in adscriptionem rejectis.

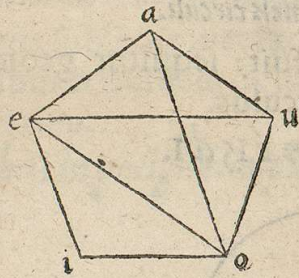
12. Si quinquangulum æquilaterum tribus angulis æquatur, est æqui-
angulum. 7 p 13.

Ut in æi ou quinquangulo tres sunt anguli ad a, e, i, æquales dico & reli-
quos, & reli-
quos ipsis
æquari: cō-
nectantur e u,
a i, i u. Hic
triangula a
e i & e a u
per thesim
perque 2 &

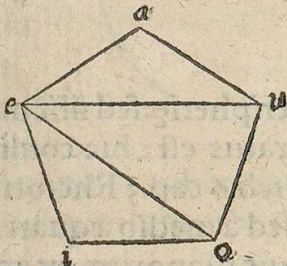


1 e 7 æquilatera & æquiangula, & bases a i & e u æquantur, & anguli e a i, a u e
æquantur

æquantur: item $\angle eua$ & $\angle eia$. Itaque $\angle ay$ & $\angle y$ æquantur per 10 e 6, item reliquum
 y & reliquum y æqua-
 tur cum ab æqua-
 libus æqualia sub-
 lata sint: æquan-
 tur etiam per the-
 sim & 10 e 6 oui &
 oiu : quare terni æ-
 quantur, totusque
 ideo angulus ad u
 æquatur toti angulo ad i , proindeque æqualibus. Dico insuper angulum ad e
 similiter æquari, si connectantur oa & oe : Ut hic.



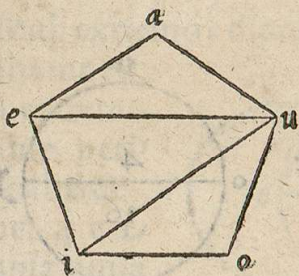
Nam
 terni
 simili-
 ter re-
 deunt
 æqua-
 les.



Quod
 si an-

guli tres non deinceps æquantur: ut $\angle io$, facilius etiam res erit: Ut hic.

Nam eua &
 $eo i$ anguli
 æquantur
 per thesim,
 interioresq;
 eon & eno .



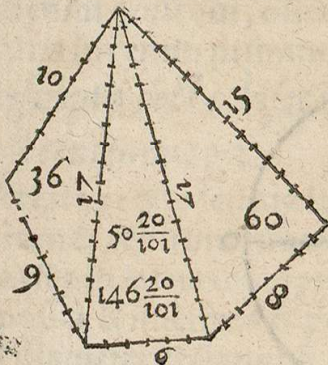
Itaque toti
 ex binis æ-
 quantur. De

reliquo ad e idem erit, si connectatur iu , ut hic: toti enim ex binis æquabuntur.

Triangulata multangula e suis item triangulis mensuram capiunt.

Ut hic,

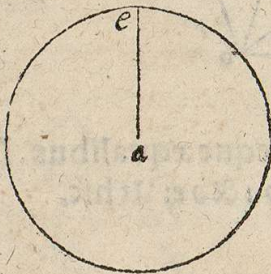
quin-
 quan-
 gulum
 e trian-
 gulis
 tribus.



Adhuc rectilineorum geometria fuit: sequitur geometria obliquilineo-
rum, e quibus precipuus est circulus.

1. *Circulus est planum rotundum. e 15 d 1.*

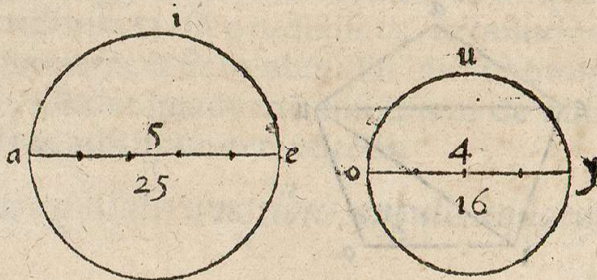
Ut hic vides rectilineū
3 e 6 definitur planum
rectis lineis comprehen-
sum, & ita potuit circu-
lus definiri planum peri-
pheria comprehensum:
sed rotundius est hoc mo-
do & brevius, ut postea
in sphaerico & sphaera. De



scribēdi vero circuli circūsus idē artifex est quī fuit peripheriē: sed illic motus pū-
cti in extremo radio peripheriam lineantis consideratus est: hic consideratur
motus radii totam aream radiantis. Circulus Aristoteli 6 cap. 3 Rhetoric. est pla-
num ā medio æquale, quod eodem quidem redit, sed ā medio æquari commu-
ne est etiam sphaeræ. Circulus vero est ordinatissimus planorum, ut antea pa-
tuit. 7 e 4.

2. *Circuli sunt ut ā diametris quadrata. 2 p 12.*

Circuli enim sunt pla-
na similia & eorum la-
tera homologa diame-
tri, ut prædictum est 15
e 4: ideoque per 1 e 6,
ut ā diametris quadra-
ta: quæ nempe dupli-
cata ratio est homolo-
gorum laterum: Ut hic

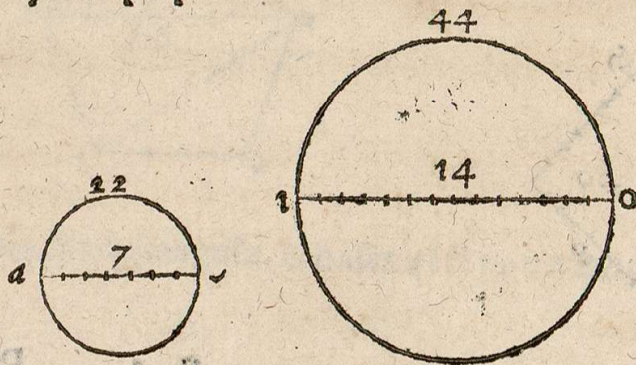


circulus *aei* ad circulum *ouy*, ut 25 ad 16 quadrata ā diametris 5 & 4. De Eu-
clidea demonstratione propositionis hujus erit in scholis

Itaque

Diametri sunt ut peripheriæ.

Est
Pappi
th. 51
11 &
26 th.
18, ut
hic vi-
des in
48, 102



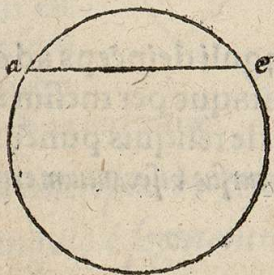
3. *Geome-*

3. Geometria circularis est in lineis aut in segmentis circuli.

Partitio hæc de rebus subiectis utcumque sumitur ad materiam confusio- rem aliqua luce separandum, & quidem de lineis, consideratio secantium hic prior est, & primo inscriptarum.

4. Si recta duobus in peripheria punctis terminetur, cadet intra circum- lum. 2 p 3.

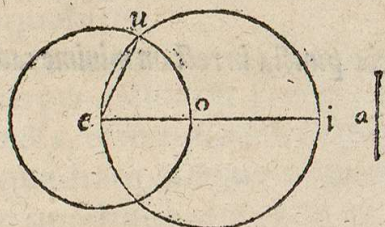
ut hic a e,
quia intra
eandem pun-
cta recta bre-
vior est, quã
peripheria
per 5 e 2.
Hinc sequi-
tur infinita



sectio, de qua e 5 e r. Hæc igitur propositio docet quomodo recta sit inscriben- da circulo, sumptis nempe duobus in peripheria punctis.

5. Si à termino diametri ex eaque radio æquante datam rectam peri- pheria describatur, recta à dicto termino in concursum peripheriarum in- scribetur dato circulo æqualis datæ rectæ. Ip 4.

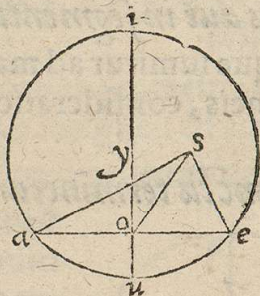
ut sit data a & ab extremo e diametri ei & ejus parte eo æquante datam a pe- ripheria describatur eu, recta eu à dicto extremo e ad u concursum peri- pheriarum inscribetur dato circulo per 4 e æ- qualis datæ, quia æqua- tur ipsi eo per 3 e 5 e 5, cū sit radius peripheriæ ejusdem. Atque hæc propositio docet quomodo recta da- ta sit inscribenda circulo æqualis datæ. Inscriptarum porro coryphea est diame- ter: ostendit enim centrum, ostendit rationem omnium inscriptarū. Itaque dia- metri circularis inventio primum generisque doceatur.



6. Si inscripta recta bisecat inscriptam, est diameter circuli, ejusque medium est centrum. Ip 3.

ut sit inscripta a e & inscripta i o u recte ipsam bisecans in o. Dico bisecantem esse diametrum & centrum esse ejus medium, ut in 7. Causa eadem quæ 3 e 11, quia bisecta est pro latere inscripti rectanguli & subtendit bisectam peripheriã, quibus oppositæ & inscripta & peripheria perinde bisecarentur: ideoque recto bisecans est diameter rectanguli, circularis autem diametri medium centrum esse patet e 2 e 5 e 5 & e 17 e 4. Euclides impossibile quam causam maluit & ita co-

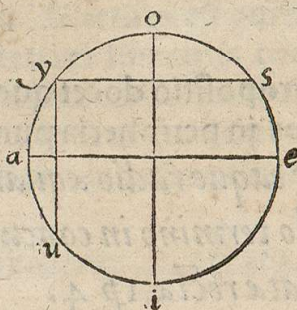
ita cogit. Nam si
y non est centrum,
sed s, pars æquabi-
lur toti. Nam tri-
angulum a o s tri-
angulo e o s æqui-
laterum erit: æquā-
ture enim a o & o e
ex thesi, item s a &



s e radii, & s o communis est. Itaque per i e 7 anguli deinceps ad o æquantur, &
per s e 5 sunt recti. Rectus igitur est s o e: equalis itaque per thesim recto y o e, pars
toti. Quare non est centrum, itemque accidet de reliquis punctis extra y. Itaque

1. Si duæ rectæ duas inscriptas recte bisecent, concursus bisecantium erit centrum circuli.
è 25 p 3.

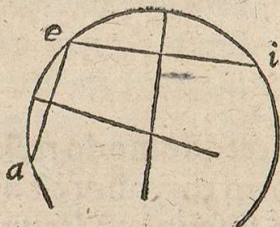
Ut hic a e & i o bisecent
rectas u y & y s. Antea e-
nim patuit i & 2 c s e 4
centrum esse in diame-
tro & in concursu dia-
metrorum. Centrum igi-
tur dupliciter invenie-
tur & è medio diametri,
& è concursu diametro-
rum in medio bisecatarum: concursu hic nil opus est, plurium diametrorum u-
nica satis est diameter.



Et licet

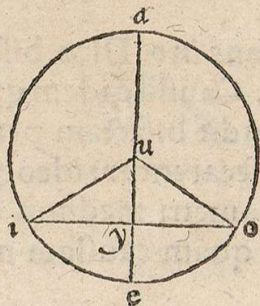
2. Peripheriam ducere per tria puncta in rectam minime cadentia.

Ut
hic
per
a, e,
i.



7. Si diameter bisecat adiametrum, recte secat: & contra. 3 p 3.

Ut dia-
meter
a e bise-
cet adi-
ame-
trum i
o, &

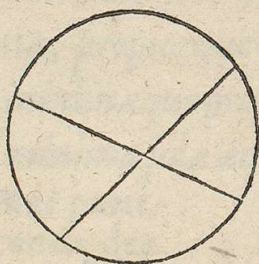


sint

fintradiiui&uo. Cauſſa item eſt quæ 3 e 11.

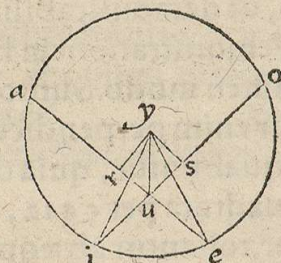
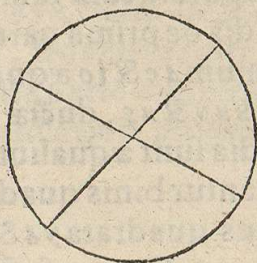
8. Si adiametri interſecantur, ſegmenta ſunt inæqualia. 4 p 3.

Conſectarium
eſt e 17 e 4. Nam
ſi inſcriptæ eſſent
biſectæ, eſſent dia-
metri contra the-
ſim. Sed ratio eſt
in partibus inſcri-
ptarū, proportio
in iſdem partibus ſequitur.



9. Si duæ inſcriptæ interſecantur, rectangulum eſt ſegmentis unius æ-
quatur rectangulo eſt ſegmentis reliquæ. 35 p 3.

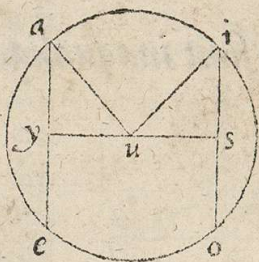
Si interſectæ ſint diametri patet proportio, ut in prima figura. Nam rectan-
gulum eſt ſegmentis unius æqua-
tur rectangulo eſt ſegmentis reli-
quæ, cum ſint ambo quadrata la-
terum æqualium. Si non ſint dia-
metri, ſunto adiametri æ & io: di-
co oblongum ex æu & u e æquari
oblongo ex ou & u i. Sint enim ra-
dii ex y centro ye & yi utriuslibet
quadrato utrumque æquabitur
rectangulum eſt ſegmentis. Nam per 6 e cadat diameter yu in punctum commu-
nis ſectionis u, ſintque perpendiculares ys & yr. Hic per 3 e 11 inſcriptæ ſecan-
tur æqualiter in punctis r & s, & inæqualiter in puncto u. Itaque per 6 e 13 ob-
longum ex ou & u i cum quadrato su æquatur quadrato si, & addito comuni
ys, oblongum idem cum quadratis us & sy, id eſt per 5 e 12 cum quadrato yu
æquatur quadratis is & sy, id eſt per 5 e 12 quadrato iy, id eſt per 3 e 2 e 12 ye,
cui per eandem cauſſam patet oblongum alterum cum quadrato yu æquari.
Tollatur utrinque quadratum yu, oblonga igitur æquabuntur eidem, ideoque
inter ſe. Atque hæc comparatio de partibus inſcriptarum. Sequitur ratio inte-
grarum inſcriptarum, quam diameter una totam facit.



10. Inſcriptæ æquidistant á centro, in quas á centro perpendiculares
ſunt æquales. 4 d 3.

o utpa

Ut patet
in proxi-
ma figura
de lineis ae
& io , in
quas à cen-
tro u perpẽ-
diculares
 uy & us
sunt æquales.



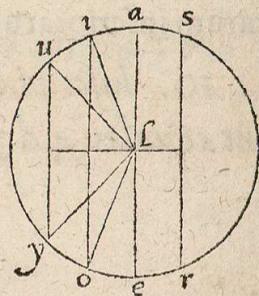
II. Si inscriptæ sunt æquales, æ quidistant à centro: & contra.

14 p 3.

Diametri in eodem circulo per 17 e 4 sunt æquales & à centro æqualiter di-
stant, cum sint per centrum, vel potius nihil omnino distant, reliquæ inscri-
ptæ iudicantur æquales, maiores, minores à diametro vel diametri centro. Eu-
clides superius illud principii loco postulavit, duo sequentia præsentis elemen-
ti, ut demonstrabilia proposuit, cum tamen per se clariora sint & evidentiora.
Demonstrationem Euclidis de prima parte si quis requirat, hæc est, converso
tamen modo. Sunt primum ae & io æquales, dico æquidistare à centro. Ducā-
tur enim perpendiculares uy & us , ductæ bisecabunt datas per 3 e 11 & ya & si
æquabuntur, quia dimidia sunt æqualium. Sunt nunc radii ua & ui eorum
quadrata per 5 e 12, æquantur binis quadratis crurum quæ bina, ideo æquan-
tur, tollantur ab æqualibus quadrata ya & si , relinquentur æqua yu & us , late-
raque ideo æqua per 2 c 2 e 12. Conversa similiter patet. Nam data perpendicu-
lares bisecant & dimidia ut prius æqualia.

12. Inscriptarum inæqualium diameter est maxima, diametroque
propior major remotiore, remotissima minima, minimaque propior mi-
nor remotiore, duæque utrinque à diametro solæ æquantur. e 15 p 3.

Hic partes quinque sunt, prima diameter est maxima, secunda diametro pro-
pior est major, tertia remotissima minima: quarta minima propior minor:
quinta, duæ utrinque æquales, quæ omnes patent ex eodem illo æqualitatis ar-
gumento, id est centro decrescendi principio, & crescendi fine. Nam quo ma-
gis à centro receditur, aut ad cẽtrum acceditur, tanto mi-
nor aut major efficitur inscripta. Euclidis autem conclu-
sio est per triangula de duobus lateribus majoribus re-
liquo, deque maiore angulo. Prima pars sic patet, quia
diameter ae æquatur il & lo , radiis nempe & majoribus
per 7 e 6, quam io , & sic deinceps. Secunda pars de pro-
pior patet per 4 e 7, quia triangulum ilo triangulo uly
æquicrurum majus est angulo: Ergo & basi. Tertia quar-
taque pars cõsectaria primæ & secundæ sunt, quinta pa-



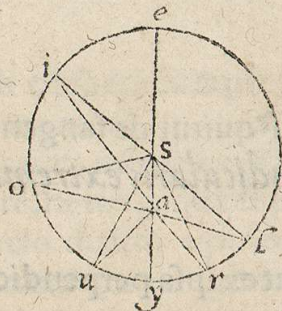
tet per

et per secundam partem. Nam si præterio & sr statuatur æqualis tertia, erit eadem etiam inæqualis, quia diametro propior & remotior.

13. *Rectarum á diametri puncto non centro in peripheriam, quæ per centrum, est maxima, propiorque maxima est major remotiore, reliqua maxima minima, minimaque propior minor remotiore: duæque utrinque á maxima vel minima solæ æquantur.* 7 p 3.

Prima pars de ae & ai patet, ut antea per 7 e 6. secunda de ai & ao , item de ao & au per 4 e 7.

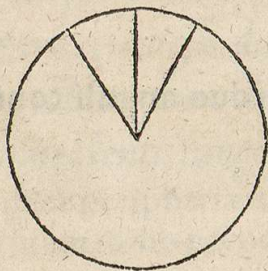
10 Tertia ay est minor quam au , quia sy æqualis ipsi su minor est rectis sa & au per 7 e 6, & subblato communis a , relinquetur ay minor quã au . Quarta pars è tertia sequitur. Quinta sic e-



sto: sr æquans angulum asr angulo asu , bases au & ar æquabuntur per 2 e 7. His si tertia ponatur æqualis, ut al , sequeretur per 1 e 7 angulum totum lsa particularis sa æquari, atque è quinta parte confectarium est. Itaque

20 Si punctum in circulo est terminus trium rectarum in peripheriam æqualium, est centrum circuli. 9 p 3.

Secus á puncto diametri non centro non solum duæ utrinque æquarentur. Nam per quodlibet punctum diameter agi potest.



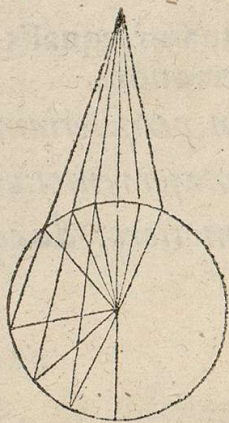
Tale etiam fuit antea in quinquan-

30 gulo: si tres anguli sunt æquales, omnes sunt æquales. ita in circulo: si tres ab eodem puncto rectæ in peripheriam æquantur, omnes æquantur.

14. *Rectarum á dato extra puncto in concavum peripheriæ, quæ per centrum, est maxima, propiorque maxima est major remotiore: in convexum, segmentum maxima est minima: minimaque propior minor remotiore, duæque utrinque á maxima vel minima solæ æquantur.* 8 p 3.

o 2 Demon=

De
mon-
stratio
similli-
ma su-
perio-
ri de
quín-
que
parti-
bus.

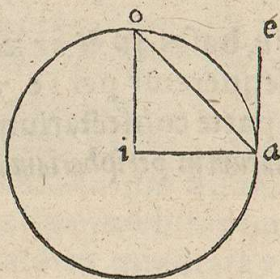


Atque hæc de secantibus, sequitur de tangentibus.

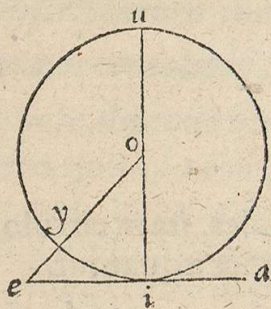
15. Si recta est perpendicularis extremæ diametro, tangit peripheriam:

Contra. é 16 p 3.

Postulandum hoc fuerat ex ipsa perpendiculari definitione, quia si magis hæc propenderet, secaret, nec esset perpẽdicularis. Euclides tamen ita cogit. Secus esto recta ae perpendicularis diametro ai , & recta ab cum cẽtro i cadat intra ad o



& connectatur oi . Hic in triangulo aoi duo anguli contra 9 & 6 recti essent ad a per thesim & o per 10 & 6 . Superest demonstratio conver-



sæ simillima antecedenti. Nam si ae tangens non est perpendicularis diametro io , ducatur à centro o perpendicularis oe , tum angulus oei erit rectus, & oie acutus. Ideoque per 11 & 6 oi id est oy , major erit, quam oye , id est pars, quam totum.

Itaque

1. Si recta est per centrum & contactum, est perpendicularis tangenti. 18 p 3.

Et

2. Si est perpendicularis tangenti, est per centrum & contactum. 19 p 3.

40

Nam recta vel à centro in contactum vel à contactu in centrum est pars diametri.

Et

3. Punctum

3. *Punctum contactus est, quo à centro perpendicularis tangenti incidit.*

4. *Tangens est singularis eadem parte.*

Con,

secta-

rium

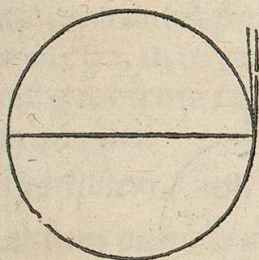
est é

10 e

2, qa

tan-

gens



est ipsa perpendicularis. Id Euclidí est specialius propositum, quod nulla alia recta inter peripheriam & tangentem cadat

5. *Angulus contactus est minor quovis acuto rectilineo. é 16 p 3.*

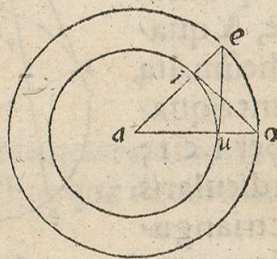
Angulus contactus est angulus rectæ tangentis & peripheriæ, qui vulgo dicitur *angulus contingentiæ*, à Proclo dicitur *νεπαρτοειδής* cornicularis, quia ex recta & peripheria instar cornu efficitur: minor igitur quovis acuto rectilineo. Quia si minor non esset, caderet recta inter peripheriam & perpendicularem. Postulat autem Euclides in opticis minimum angulum, sed opticum & physicum, non geometricum.

6. *Anguli contactus in æqualibus peripheriis sunt æquales.*

Et sic in catoptricis 1 p æqualitas ista sumitur. In peripheriis autem inæqualibus cornicularis minoris est maior quam cornicularis maioris.

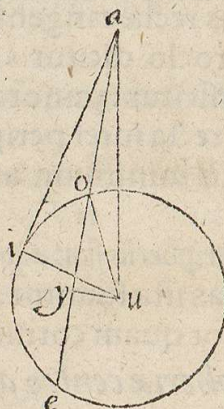
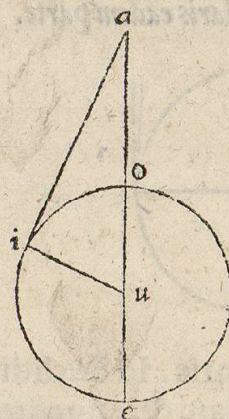
16. *Si à radio ex data peripheria centro ad datum extra punctum peripheria describatur, & à concursu data, radiique radio ipsi perpendicularis in descriptam connectatur cum dicto centro, recta a' dato puncto in concursum data & connectentis tanget datam peripheriam. 17 p 3.*

Ut radio ae à centro a data peripheriæ ad datum punctum e describatur peripheria eo , & sic in descriptam radio perpendicularis io : connexa ad centrum a , ducatur denique eu . Dico ductam eu tangere. Quia perpendicularis erit extremæ diametro. Nā triangula eau & oau per 2 e 7, cum sint æquicrura & crurum communi angulo æqua, æquantur angulis ad basim. At angulus oia rectus est, rectus igitur angulus $eu a$. Itaque recta eu per 10 e 2, est perpendicularis. Atque hæc de secantibus & tangentibus, sequitur de simul utroque genere.

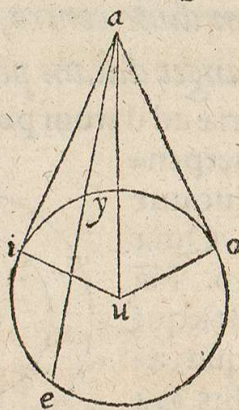


17. *Si é duabus rectis a' dato extra puncto prima secat in concavum, reliqua tangit, oblongum e' secante & exteriori secantis segmento æquatur quadrato tangentis: & si oblongum tale æquatur quadrato reliquæ, reliqua ipsa tangit. 36 & 37 p 3.*

Sí secans transit per centrum, res expeditior est, ut hic a secet, ai tangat, exterius segmentum est ao & centrum u . Jam ui erit perpendicularis tangenti per i c 15 e, tum per 7 e 13, oblongum ex ea & oa cum quadrato ou , id est iu æquatur quadrato au , id est per 5 e 12 quadratis ai & iu . Commune iu tollatur, æquabitur rectangulum quadrato tangenti. Sí secans non transit per centrum: ut in hac figura, centrum u per se reperto, iu per i c 15 e erit perpendicularis tangenti ai , tum ducantur ua & uo , & perpendicularis uy bisecans oe per 7 e. Hic per 7 e 13 oblongum ex ae & ao cum quadrato oy æquatur quadrato ay . Itaque communi addito yu idem oblongum cum quadratis oy & yu , id est per 5 e 12 cum quadrato ou æquatur quadratis ay & uy , id est per 5 e 12 au , id est rursus ai & iu . Denique tollantur utrinque quadrata æqualia uo & ui , relinquetur oblongum æquale quadrato tangenti. Conversa similiter demonstratur in hac figura. Esto rectangulum ex ae & ay æquale quadrato ipsius ai . Dico ai tangere. Ducatur per i c 15 e tangens ao , item sint au , ui , uo .



Hic oblongum ex ea & ay æquatur quadrato ao per 17 e, & quadrato ai per thesim. Itaque ai & ao sunt æquales. Tum uo per i c 15 e est perpendicularis tangenti: Hic triangula auo & $au i$ sunt æquilatera, & per i e 7 æquiangula: angulus autem ad o rectus est, rectus igitur & $e i$ æqualis ad i per c 8 e 3. Quare ai est perpendicularis extremæ diametro, & per 15 e tangit.



1. Tangentes ab eodem puncto sunt æquales.

Quia ipsarum quadrata eidem oblongo æquantur.

2. Oblonga e qualibet ex eodem puncto secante & secantis exteriori segmento æquantur inter se.

Itaque

Et

Quia

Quia æquantur eidem. Campanus ad 36 p 3.

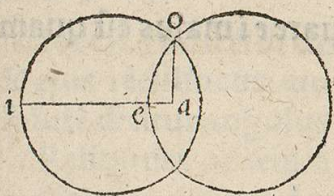
Et

3. Datis duabus rectis licet alteri continuare tertiam, ut oblongum ex continuata & continu-
atione æquetur quadrato reliquo.

Vitellio 127 p 1. Ut in prima figura, si prima è datis site o, secunda ia, tertia
o4. Superest geometria circularis de peripheriis intersectis & contiguis, deq;
rectis & peripheriis.

18. Si peripheria sunt intersectæ vel contiguae sunt eccentrica: illeque
duobus tantum punctis intersectantur, hæc diametros per contactum cons-
tinuant. 5. 6. 10. 11. 12 p 3.

Hæc o/
mnia po-
stulari
poterāt:
demon-
stratio-



nes autem habent ex impossibili non difficiles. Prima pars patet, quia pars æ-
quaretur to-
ti, si centrum

esset idem ut

a. Nam duo

radii commu-
ni radio a o æ-

quantur, ide-
oque inter se

æquantur a e & a i pars totī.

Secunda pars ut prima demonstratur: secus pars

æquare-
tur totī:
Ut hic æ-

quantur
radii mi-
noris pe,

peripheriæ a e & a i: item maioris a e & a o. Quare a i æquaretur ipsi a o pars totī. Si

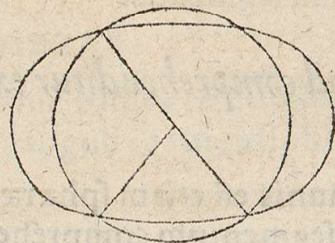
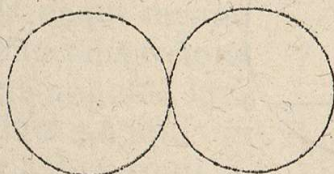
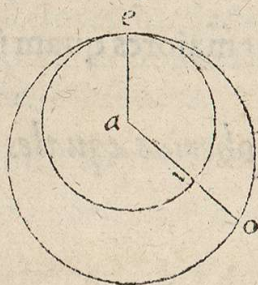
peripheriæ sint foris contiguae, res expeditior est, neque demonstrationem Eu-

clidis iudicio meruit, ut hic.

Tertia pars pa-
tet è prima: secus

intersectæ essent
concentricæ. Nam

per 5 e centro in-
vento, & per 2 c 5
e tribus rectis ad

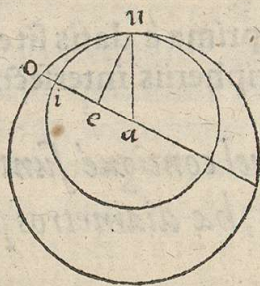


tria se,

tria sectionum puncta ductis à centro, radii tres essent æquales. Ut hic

Quarta pars eodem modo demonstratur, quia secus pars esset major toto:

Ut hic. Estō namque per centra a & e recta $aeio$. Hic tri anguli uea duo latera ue & ea per 7 & 6 sunt maiora quam ua , ideoque quam ao : tollatur ae , reliquum ue ,



maius erit quam eo . At ie æquatur ipsi eu . Quare ie maius est quam eo pars to,

to. Idem erit si

tactus sit extra.

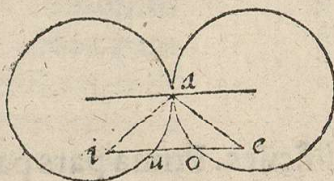
Ut hic. Nā per

7 & 6 , ea & ia

maiore sunt

quam ie . At eo

& iu æquantur ipsi ea & ia . Quare eo & iu sunt maiores quam ipsa ie partes to. De rectis & peripheriis simul una ratio est.



19. Si inscriptæ sunt æquales, secant peripherias æquales: & contra.

28.29 p 3.

Res con,

stat è $\phi\alpha\mu\acute{o}$,

ser, ut in e,

xēplo: cō,

gruant e,

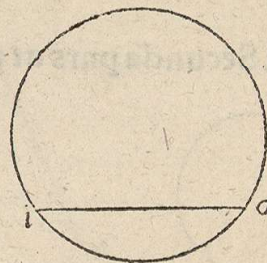
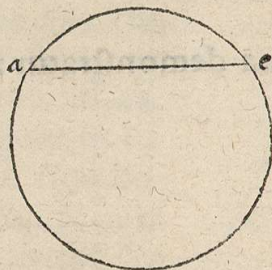
nim circu,

li, tum æ,

quales in

scriptæ &

peripheriæ congruent.



P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X V I. de circuli segmentis.

I. Segmentum circuli est quod comprehenditur extrinsecus a' periphēria, intus a' recta.

Geometria segmentorum communis est etiam sphaeræ, sed modo explicatu difficile est hoc ipsum generale, & segmentum comprehendere intus potest linea obliqua

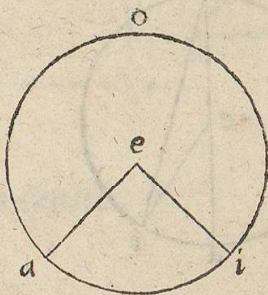
obliqua siue simplici siue multiplici, sed hic usitata sequimur. Itaque dum facilius occurreret, utemur Euclide. Primo igitur definitio generalis præponitur ad subjectas species facilius distinguendum.

2. *Segmentum circuli est sector aut sectio.*

Hæc utraque species nominatur in Euclide & definitur speciatim: segmentum autem & sectio & sector nomina penè eadem sunt, definitionibus tamen distinguuntur.

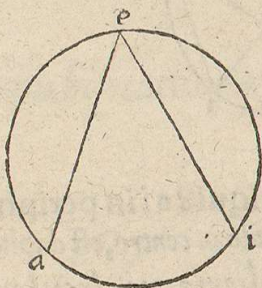
3. *Sector est segmentum intus comprehensum a recta duplici faciente angulum in centro, qui angulus in centro dicitur: ut peripheria dicitur basis sectoris. 9 d3.*

Ut aei sector est. Hic sector definitur, & ejus rectilineus angulus absolute dicitur angulus in centro. Reliquum autem a sectore: Ut hic aoi dicitur Archimedi sector major, qui tamen in duos sectores interjecto radio secari potest, ut postea secatur in geodasia sectionis.



4. *Angulus in peripheria est angulus comprehensus a duabus rectis inscriptis, & in peripheria conterminis. 8 d3.*

Sector in peripheria dici potuit, intus nempe comprehensus a duabus rectis conterminis in peripheria, ut hic aei. At in elementis neque mentio neque usus talis sectoris est, tametsi angulus ipsius absolute angulus in peripheria dicitur, ut sectoris in centro angulus appellatur angulus in centro.

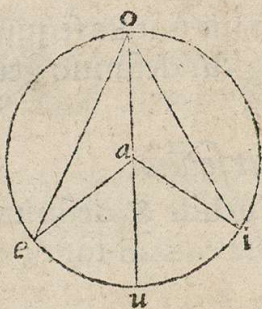


5. *Angulus in centro duplus est anguli in peripheria in eandem peripheriam insistentis. 20 p3.*

Varietas exempli hic triplex est Euclidis: demonstratio tamen una, ut hic angulus *eai* in centro, anguli *eo i* in peripheria duplus probabitur recta *ou* secan-

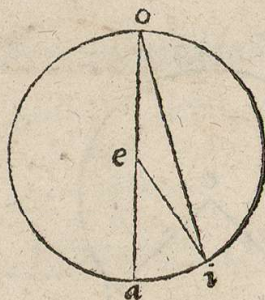
p te duo

te duo triangu-
la utrinque æquicu-
ra, & per 10 e 6 ad
basim æquiangu-
la: quorum figil-
latim dupli sunt
anguli, $ea u$ ipsius
 $eo a$ & $ia u$ ipsius
 oa . Nam cum du-



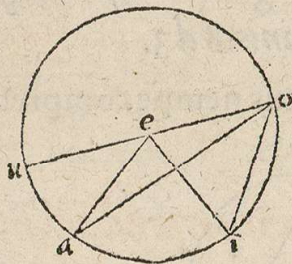
obus interioribus æqualibus æquetur per 2 c 9 e 6, duplus erit alterius. Itaque
totus aei duplus est totius $eo i$. Secundum exemplum sic est ex angulo in cen-

tro aei , & in peri-
pheria aoi . Hic cru-
ra eo & ei per 17 e
4 æquantur, & per
10 e 6 anguli ad o
& i , quibus angu-
lus in centro æqua-
tur per 2 c 9 e 6. I-



taque duplus alte-
rius. Tertium exemplum est ex angulo in centro aei in peripheria aoi , & sit dia-
meter oeu . Hic angulus totus ieu per 2 c 9 e 6 æquatur interioribus angulis $eo i$
& $ei o$ æqualibus

inter se per 10 e 6:
Ideoque duplus
est alterius: Item
particularis aeu
æquatur per 2 c 9
e 6 angulis $eo a$ &
 $ea o$ æqualibus itē
inter se per 10 e 6.



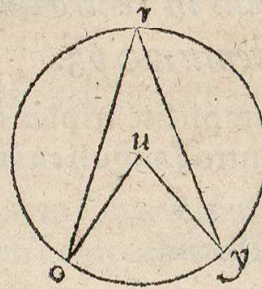
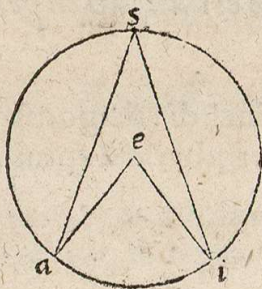
Itaque reliquus aei est duplus reliqui aoi in peripheria.

Itaque

Si angulus in peripheria æquatur angulo in centro, est duplus basi.

6. Anguli in centro peripheria-ve circulorum æqualium sunt ut pe-
ripheria in quas insistant: & contra. e 33 p 6. 26. 27 p 3.

Hic proportio du-
plex est cum periphe-
ria subiecta, angulorū
in centro & angulorū
in peripheria. Sed de
angulis in centro satis
sit explicari. Sinto pri-
mum anguli æquales



in centro

in centro ai & oy , bases ai & oy erunt æquales per 7 e 7, & peripheriæ ai & oy per 19 e 15, item æquales. Itaque si anguli sunt inæquales, peripheriæ item tantò inæquales erunt. Idem erit de angulis in peripheria. Conversa item vera est, unde etiam sequitur.

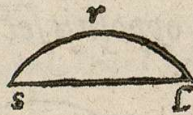
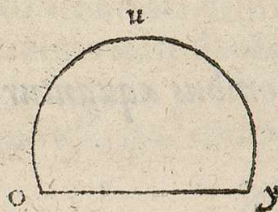
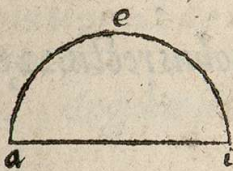
Ut sector ad sectorem, sic angulus ad angulum.

Atque hæc de sectore.

7. Sectio est segmentum circuli intus comprehensum ab una recta, quæ basis sectionis dicitur.

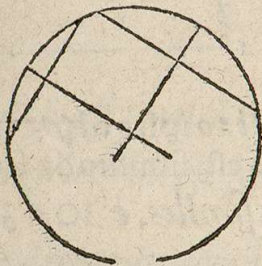
ut

hic, sectiones sunt ae , io , & y .



8 Sectio absolvitur invento centro.

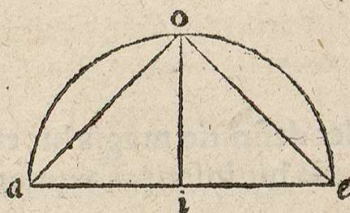
Inventio centri patuit 6 e 5, & sic vides hic absolventi circuli modum per 6 e 15.



9. Peripheria sectionis bisecatur perpendiculari bisecante basim.

30 p 3.

ut hic. Ducito rectas ao & oe , triangula habebis aoi & eio per 2 e 7. Itaque bases oa & oe æquales & per 19 e 15 æquales peripherias subtensis. Hic Euclides duas peripherias in unam $\epsilon\phi\alpha\rho\mu\acute{o}\sigma\epsilon\iota$ comprehendit, & nos comprehendimus.



10. Angulus in sectione est angulus comprehensus a duabus rectis cõterminis basi & in peripheria conterminis. 7 d 3.

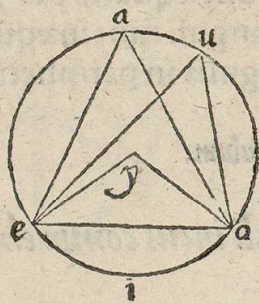
Ut aoe in superiore exemplo.

11. Anguli in eadem sectione sunt æquales, 21 p 3.

p 2

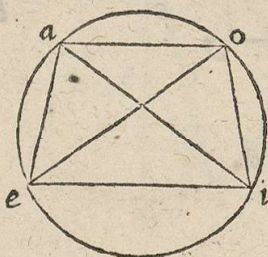
Sectio sit

Sectio sit $ea\ u o$, & in ea anguli ad a & u : hi æquãtur, quia per 5 e sunt dimidii ad angulum in centro $e y o$, vel æquantur per 6 e, quia insistant in eandem peripheriam. Hic constat angulos in sectione re ipsa esse angulos in peripheria basi que tantum diversos.



12. *Anguli in oppositis sectionibus æquantur duobus rectis, 22 p 3.*

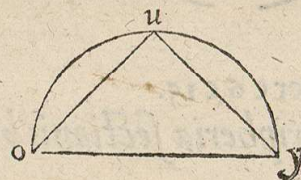
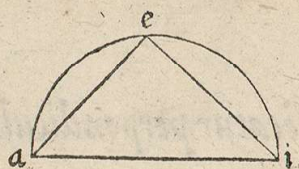
Hic enim anguli oppositi ad a & i æquantur tribus unius trianguli $e o i$ æquantibus duobus rectis per 9 e 6. Nam i primum æquatur sibi, deinde a per partes æ-



quatur duobus reliquis. Nam $e a i$ æquatur ipsi $e o i$ & $i a o$ ipsi $o e i$ per 11 e. Itaque oppositi æquantur duobus rectis. Ratio sectionis ita est, similitudo sequitur.

13. *Si sectiones capiunt angulos æquales, sunt similes, e' 10 d 3.*

Ut hic $a e i$, $o u y$. In definienda similitudine sectionum circuli adhibet Euclides tantum æqualitatem duorum angulorum, ex qua proportio peripheriarum & basium consequitur,

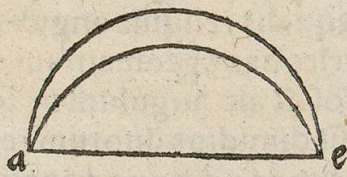
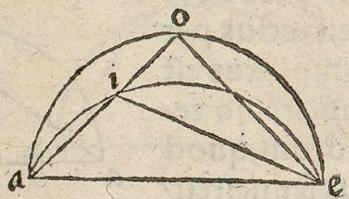


ut Pappus ait 13 th. 5 lib. Nec definitio magis hic est, quam e definitione generali consecrarium. Et triangula hic inscripta æquiangulara cum sint ex thesi, etiam per 9 e 7 similia erunt.

14. *Si sectiones similes sunt in æquali basi, sunt æquales. 23. & 24 p 3.*

In prima figura basis eadem esto. Ac si dicantur inæquales sectiones, major que altera.

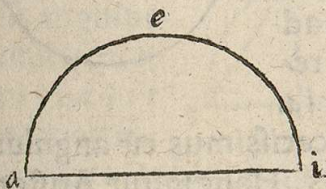
que altera aoe ,
angulus in ea
 aoe minor erit
angulo aie in
minore sectio-
ne per $4c9e6$,



qui tamen per thesim est æqualis: In secunda figura si superponatur sectio secti-
oni congruet, secus contra primam partem, sectiones similes in eadem basi nō
essent æquales. At res *ἐπεξηγήσατο* contenta fuerit. Per superiores autem duas pro-
positiones & per $2c6e15$ licet invenire datæ sectioni similem, vel è dato circu-
lo amputare.

15. *Angulus sectionis est, qui comprehenditur à terminis sectionis.*
7 d 3.

Ut
e a i
&
e i a.



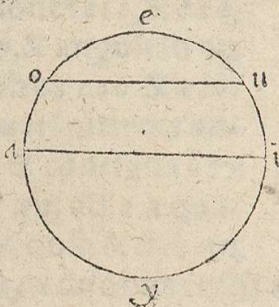
16. *Sectio est semicirculus aut inæqualis semicirculo.*

17. *Semicirculus est sectio dimidia circuli.*

Itaque

Semicirculus comprehenditur à peripheria & diametro. 18 d 1.

Ut aei est
semicirculus:
reliquæ secti-
ones, ut oyu ,
& oeu inæ-
quales, illa
major, hæc
minor.

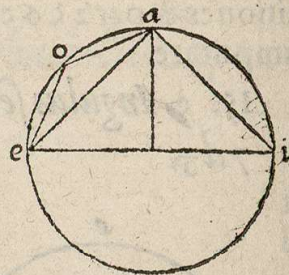
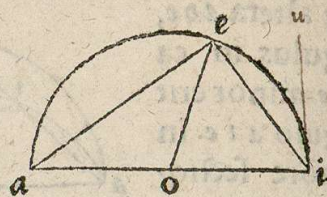


18. *Angulus in semicirculo rectus est, semicirculi minor recto rectili-
neo, major quovis acuto; in maiore sectione est minor recto, majoris ma-
ior, in minore major, minoris minor. e' 31 & 16 p 3.*

Septem partes sunt hujus elementi, prima est quod angulus in semicirculo
sit rectus: Ut in aei : nam si radius ducatur oe dividetur angulus aei in duos an-

p 3 gulos

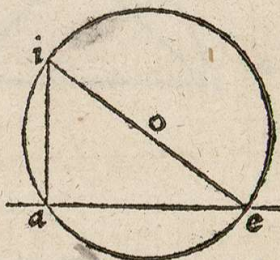
gulos aeo & oei æquales angulis eao & eio per 10 e 6: Itaque cum sit æqualis reliquis angulis, est rectus per 1 c 3 e 8. Aristoteles hanc geometriam complexus est 2 post, & 9 philof. & ait angulum in semicirculo rectum esse, quia sit dimidius duorum rectorum, quod eodem redit. Secunda pars quod angulus semicirculi sit minor recto, patet ex eo quia pars est recti. Nam angulus semicirculi aie est pars recti rectilinei aii . Tertia quod sit major quovis acuto: patet per 4 c 6 e 15. Secus enim tangens non esset eadem parte singularis. Quarta pars sic patet. Angulus ad i in maiore sectione aei est minor recto, quia in eodem triangulo aei , qui ad a rectus. Et si crus neutrum sit per centrum, constitui tamen potest angulus æqualis dato in eadem nempe sectione. Quinta sic. Angulus maioris sectionis eai est major recto, quia continet rectum. Sexta sic. Angulus aoe in minore sectione est major recto per 12 e 15, quia qui in opposita sectione ad i est minor recto. Septima sic. Angulus $ea o$ est minor recto, quia pars recti nempe exterioris si producat ia . Atque hæc de angulis circuli, quorum omnium efficacissimus est angulus in semicirculo, nec frustra ab Aristotele toties appellatus. Hanc igitur Aristotelis geometriam plenius aperiamus. Hinc enim plurima oriuntur.



Itaque
1. Si due rectæ diametro circuli conterminæ conterminentur in peripheria, faciunt angulum rectum.

Et
2. Si recta infinita secetur à peripheria externi centri in punctis dato & contingente, & diameter sit à contingente, recta à dato puncto connectens diametrum erit perpendicularis super infinitam.

Ut hic recta a è à peripheria aei centri o extra datā secetur in dato puncto a , & in puncto contingente ut in e , & sit abe diameter oei , recta ai à dato puncto a connectens diametrum ioe erit perpendicularis super infinitā, quia faciet cum infinita angulum in semicirculo.



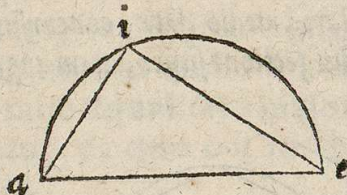
Et
3. Si recta à dato puncto faciens angulum cum infinita, fiat diameter peripheriæ secantis infinitam, recta à dicto puncto connectens segmentum erit perpendicularis super infinitam.

Et
Ut in eodem exemplo recta ioe fiat diameter, à cuius bisectione pro centro peripheria secet infinitam, & cæt.

Et
4. Si duarum rectarum maior fiat diameter circuli, minorque majori contermina & inscripta connectatur, maior plus poterit, quam minor quadrato connectentis. ad 13 p 10.

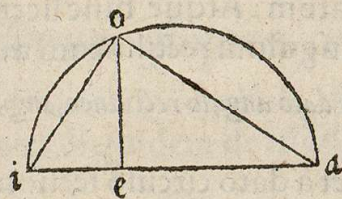
Ut æ

Ut ae diame-
ter plus potest
quam $e i$ qua-
drato ex ai : re-
ctangulū enim
fiet triangulū a
 ei , & per 5 & 12 poterit æquale cruribus.



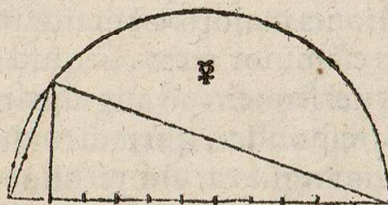
19. Si recta continuata ē duabus rectis fiat diameter circuli, perpendi-
cularis ā puncto continuationis in peripheriam erit proportionalis inter da-
tas. 13 p 6.

Ut sunt datae ae & ei , ē quibus aei continuata sit, & perpendicularis eo sit in
peripheriam aoi . Hæc erit media proportionalis, quia ductis rectis ao & io tri-
angulum fiet re-
ctangulum, cū
 aoi sit angulus
in semicirculo,
& per 1 & 4 & 8 oe
erit proportio-
nalis inter ae & ei . Sic si quadrati decempedalis latus quærat oblongi æqua-
lis ipsi quadrato latera unius pedis & decem pedum continuentur, proporti-
onalis media erit latus quadrati. ¶

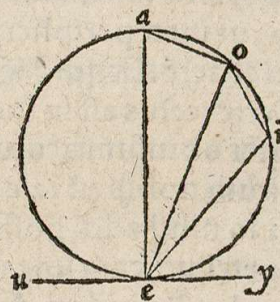


20. Anguli in oppositis sectionibus æquantur alternis angulis secantis
& contiguae. 32 p 3.

Ut sunt sectiones eio , & $ea o$,
tangens sit uey , & anguli in op-
positis sectionibus $ea o$ & eio :
Dico ipsos æquari alternis an-
gulis ex secante & contiguae $oe y$
& $oe u$: primò qui ad a æqua-
tur alterno $oe y$, quia & tres an-

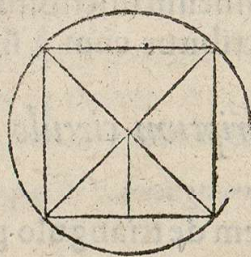
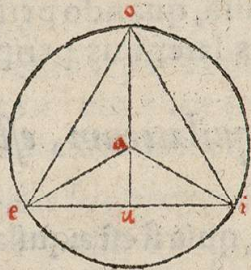


guli $oe y$, $oe a$, $ae u$ duobus rectis æquantur per 1 & 8 & 5, quibus item æquantur
tres anguli in triangulo $ae o$ per 9 & 6: à ternis æqualibus
tolle rectos $ae u$ & $ao e$. Rectus enim est $ao e$ per 18 e, quia
in semicirculo, tollatur & communis $ae o$, reliqui $ea o$ &
 $oe y$ alterni æquabuntur. Secundo anguli ad a & i æquan-
tur duobus rectis per 12 e, quibus æquantur & $oe y$ & $oe u$.
Atqui $ea o$ æquatur alterno $oe y$. Ergo qui ad i æquatur
alterno reliquo $oe u$. Neque verò interest, utrum angulus
ad a sit ad diametrum. Id enim demonstrandi tantum
caussa statuitur, ubilibet enim fuerit, æqualis erit, nem-
pe in eadem sectione.



Itaque
1. Si ad

ta. Idem
erit de
triangu-
lato, ut
hic in
quadra-
to: qua-
tuor e-
nim tri-
angula
fient æ-
qualia:
Deniq;
rectili-
neum
quodli-
bet æqui-
laterum
adscri-

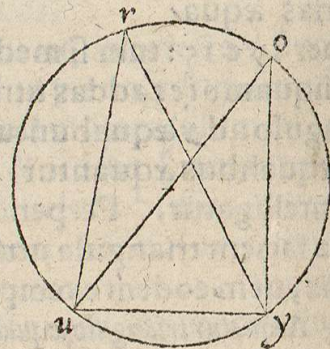


ptum círculo æquabitur triangulo basis æqualis perimetro ipsius adscripti, quia perimenter continet bases triangulorum, in quæ rectilineum resolvitur.

3. *Rectilinea similia circulis inscripta, sunt ut à diametris quadrata.*

Ip12.

Quia per 1 e 6 plana similia habent duplicatam rationem homologorum laterum. At in rectilineis inscriptis diametri sunt homologa latera vel sunt proportionales lateribus homologis. Ut sunt rectangula triangu-
gula similia $a e i$, $o u y$, quia $a e$ & $o u$ sunt diametri, res protinus pater. At in triangulis obliquangulis $s e i$ & $r u y$ similibus diametri sunt proportionales homologis lateribus, nempe $e i$ & $u y$. Nam ex thesi ut se ad $r u$, sic $e i$ ad $u y$: & ideo ex præcedenti ut diametri $e a$ & $u o$. In triangulatis similibus, cum per 2 e 10 resolventur in triangu-
gula similia, idem erit.



Itaque
Si sit ut diameter circuli ad latus rectilinei inscripti, sic diameter secundi circuli ad latus secun-
di rectilinei inscripti, triangulaque inscriptorum singularia similia similiterque sita, rectilinea in-
scripta erunt similia similiterque sita.

Id Euclides sic sumpsit ad 2 p 12, & quidem ut videtur è 18 p 6: & nos ideo as-
sumpsimus. Adscriptio circuli est cum triangulo quolibet: cum triangulato
autem

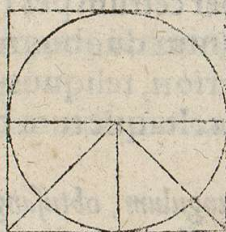
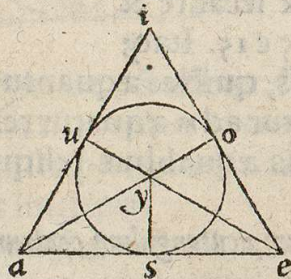
autem duntaxat ordinato, & quidem adscriptio circuli est communis.

4. Si duæ rectæ bisecent duos angulos dati rectilinei, circulus radii ab earum concursu in latus perpendicularis inscribetur dato rectilineo.

4 p 4.

Ut in triangulo aei , rectæ ao & eu bisecent angulos, & ab earum concursu y sunt perpendi-

culares yo , yu , ys , dico centro y radio yo vel yu vel ys describi circum-



lum per c 13 e 15,

quia bisecantes cum perpendicu-
laribus faciunt tri-

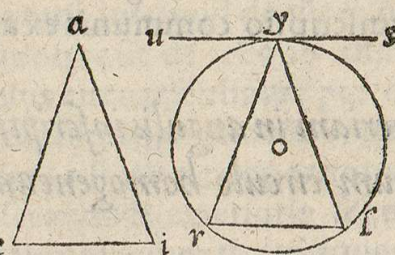
angula æquilatera per 2 e 7, ideoque tres perpendiculares, quæ sunt bases æ-
quilaterorum æquales erunt. Idem argumentum erit de triangulato.

5. Si duæ rectæ rectè bisecent duo latera dati rectilinei, circulus radii ab earum concursu in angulum circumscribetur dato rectilineo. 5 p 4.

Ut in superioribus figuris. Demonstratio est eadem superiori: Tres enim ra-
dii per 2 e 7 æquantur, & concursus per c 13 e 15 est centrum. Atque hæc com-
munis est adscriptio circuli, sequitur adscriptio rectilinei, & primum trianguli.

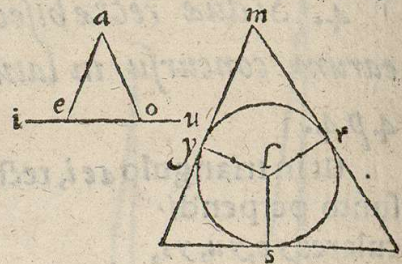
6. Si duæ inscriptæ à contactu rectæ & peripheriæ æquent duos utrin-
que angulos duobus angulis dati trianguli, connexæ inscribent triangulum
dato circulo æquiangulum dato triangulo. 6 p 4.

Detur triangulum aei & o circulus cui inscribendum sit triangulum æquian-
gulum dato. Tan-
gat igitur recta uys
peripheriam yr , &
à contactu y inscri-
ptæ yr & yl æquent
cum tangente angu-
los uys , syl angu-
los aei & aie , & connectatur rl , æquabunt per 17 e 16 angulos alternorum seg-
mentorum angulis url & ylr . Itaque per c 3 e 7 cum bini æquantur, reliquus
æquabitur reliquo. Circumscriptio hic etiam specialis est.



7. Si duo anguli in centro dati circuli æquantur ad commune latus ex-
terioribus angulis dati trianguli, rectæ tangentes peripheriam in cruribus
angulorum circumscribent triangulum dato circulo æquiangulum dato
triangulo. 3 p 4.

Esto triangulum, & in eo exteriores anguli $a e i$ & $a o u$: circulus autem $y s r$, & in centro l æquantur anguli $y l r$ & $s l r$ ad communem latus $l r$ angulis exterioribus $a e i$ & $a o u$. Dico angulos circumscripti trianguli æquari angulis dati trianguli: Nam quadranguli $y l r m$ quatuor interiores æquantur quatuor rectis per 4 e 10, duo, quæ ad y & r sunt recti per fabricam ex secante & cõtigua à contactu per cẽtrum per 1 c 15 e 15. Itaq; reliqui ad l & m æquantur duobus rectis, quibus æquantur $a e i$ & $a o u$: At angulus ad l æquatur exteriori, reliquus igitur ad m æquatur reliquo $a o u$. Idem erit de angulis $a o e$ & $a o u$. Itaque tum binis æqualibus reliqui ad a & i æquabuntur. Itaque

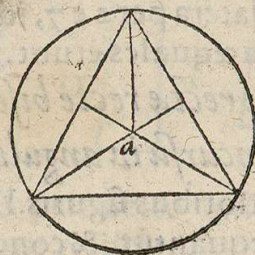
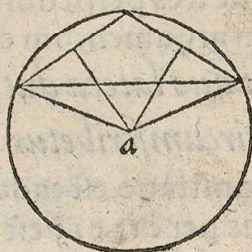
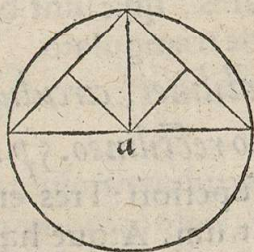


Si triangulum est rectangulum, obtusangulum, acutangulum, centrum circumscripti circuli est in latere, extra latera, intra latera: & contra.

Uc

vi-
des
in
tri-
bus
sub-
je-
ctis

figuris centrum a .



P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X V I I I.

de adscriptione triangulati.

Atque hæc trianguli est adscriptio. Triangulati ordinati adscriptio doceatur, & primum circumscriptio communis ex antecedente tamen inscriptione hoc modo.

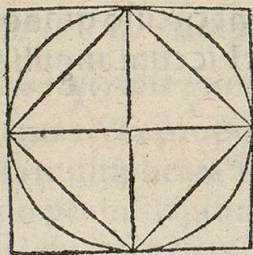
1. Si rectæ tangant peripheriam in angulis inscripti triangulati ordinati, circumscribent triangulatum circulo homogeneous inscripto triangulato.

Exempla per species inscriptorum proponuntur: specialis itaque inscriptio dicatur, & quidem per unicum latus, quod repetitum, quoties opus est, peripheriam compleat. Id enim fecit Euclides in uno quindecangulo, nos in omnibus faciemus.

2. Si diametri rectè interfecentur, subtensa recto erit latus quadrati. e 6 p 4.

ut hic.

ut hic. Cru-
ra enim angu-
li erunt radii,
quorum dia-
metri connec-
tae faciēt qua-
tuor triangu-
la rectangula



æqualia cruribus & per 2 e 7 basibus. Ideoque quadratum inscribent. Itaque

Quadratum inscriptum est dimidium circumscripti.

Quia latus circumscripti (quod hic æquatur diametro circuli) potest per 5 e
12 duplum ad latus inscripti. Et

Est majus dimidio circumscripti circuli.

Quia circumscriptum quadratum, quod duplum est, est majus toto circulo. Reliquis deinceps multangulis imparilateris inscribendis opus est triangulo, cujus uterque angulus ad basim sit multiplex reliqui, in quinquangulo primum duplex, quod sic habetur.

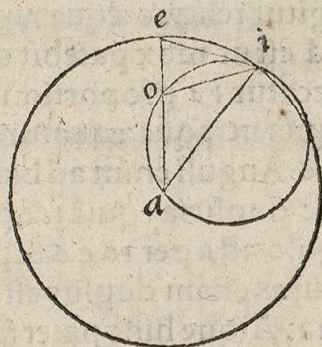
3. Si recta secetur proportionaliter, trianguli crurum sectæ æqualium, basis majori segmento æqualis, uterque angulus ad basim erit duplex reliqui, & basis erit latus quinquanguli in circulum cum triangulo inscripti. 10 & 11 p 4.

Hic primum ad fabricam trianguli sumes pro radio rectam ae per 3 e 14 secam proportionaliter in puncto o , circulumque facies centro a radio ae , & per 5 e 15 inscribes æqualem majori segmento, inscriptamque cum secta connectes.

Hoc triangulum erit optatum. Nam per 10 e 6 anguli ad basim e & i æquantur, ut quod de altero probatum sit, probatum quoque sit de reliquo: tum ducatur recta oi , & circulus circumscribatur per 6 e 17

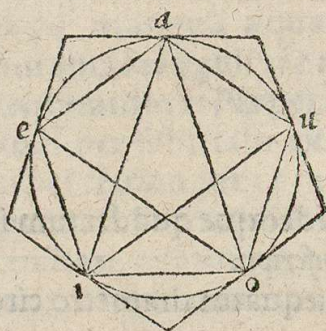
70 triangulo aoi : hunc circulum tanget recta ei per 17 e 15: quia ex thesi recta ae secatur proportionaliter, ideoque oblongum secantis & exterioris segmenti

æquatur quadrato majoris segmenti, cui æquata est ex thesi basis ei : Hic igitur angulus aie duplex est anguli ada , quia æquatur angulis aio & oai æqualibus inter se. Nam per 20 e 16 eio æquatur angulo oai in alterno segmento, & reliquus aio æquatur sibi ipsi. Itaque & angulus aie æquatur duobus eisdem, quia æquatus est angulo aie . At angulus eo exterior duobus eisdem æquatur per 20 e 6. Itaque anguli ioe & oei (quia æquales eidem) æquantur inter se. Quare per 10 e 6 latera oi & ei æquantur: ideoque & ao & oi : anguli que oai & oia sunt æquales per 10 e 6. Quare cum ambobus æquatus sit angulus aie duplex, erit alterius æqualium: At basis ei est latus quinquanguli æquilateri. Nam si



duæ rectæ bisecantes inscripti trianguli utrumque angulum duplum reliqui cōnectantur, & inter se & cum angulis inscribent circulo quinquangulum æquilaterum, cujus unum latus erit ipsa basis. Ut hic cum angulis coa , coi , uio , uia , $ia o$ æquantur

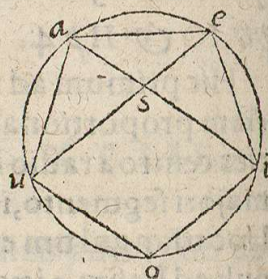
in peripheria, subtensæ peripheriæ per 6 e 16 æquantur, ideoq; per 19 e 15 subtensæ ae , ei , io , ou , ua : & ex iis quinque lateribus unū



est ae . Ergo recta proportionaliter secta ita quinquanguli adscriptionem machinatur, indeque vicissim redditur linea proportionaliter secta.

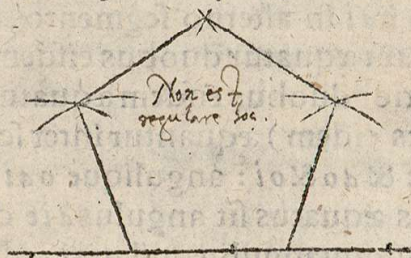
4. Si duæ rectæ subtendunt duos deinceps angulos inscripti quinquanguli, secantur proportionaliter, & majora segmenta sunt latera inscripti. ex 8 p 13.

Ut hic sunt rectæ ai & eu subtendentes angulos aei , & eau , dico eas proportionaliter secari in puncto s , & majora segmenta æquari lateri quinquanguli. Hic enim bina triangula sunt æquiangula: primo aei & uas per thesim & 2 e 7. Itaque anguli aie & aes æquantur: deinde aei & ase , quia angulus ad a communis est, reliquus igitur reliquo æquatur per 3 e 7. Jam per 9 e 7, ut ia & ae , id est ut mox patebit ad is , sic ea ad as . Itaque per 1 e 14 secatur ia proportionaliter: ea autem latus æquatur is , quia utraque æquatur lateri ei , illa per thesim, hæc per 10 e 6. Anguli enim ad basim ise & ies æquantur ejusdē nempe duplicia: quia ise per 3 e 9 e 6 æquatur duobus interioribus æqualibus angulo ad u per 10 e 6 & proximam conclusionem. Itaque duplus est angulus aes , cujus etiam duplus est angulus uei per 6 e 16, insistens nempe in dupla peripheria. Atque hinc patet fabrica quinquanguli ordinati super datam rectam. Itaque



Si data recta secta proportionaliter continuetur utrinque majore segmento, sexque peripheriæ radio datæ concurrent, binæ utrinque à terminis datæ & continuatæ, duæ reliquæ ab earum concursu, rectæ per cōcursus & terminos datæ constituent super datam quinquangulum ordinatū.

Exē-
plū
sic
est.

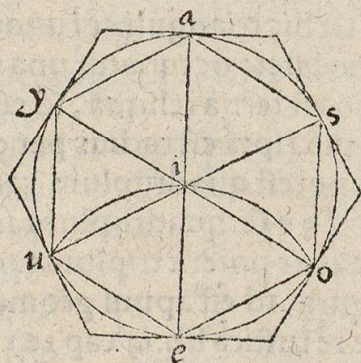


5. Si diameter circuli quinquangulo circumscripti est rationalis, est irrationalis ad latus inscripti quinquanguli. é II p 13.

Sic antea segmenta rectæ proportionaliter sectæ irrationalia fuerunt. Reliqua deinde triangulata multiplicata à laterum ternario, quaternario, quinario pos sunt inscribi circulo per inscriptum triangulum, quadratum, quinquangulum. Itaque per triangulum inscribetur triangulatum angulorum 6.12.24. 48: per quadratum inscribetur triangulatum angulorum 8.16.32.64: per quinquangulum inscribetur triangulatum angulorum 10.20.40.80. & sic deinceps.

6. Radius circuli est latus inscripti sexanguli. é 15 p 4.

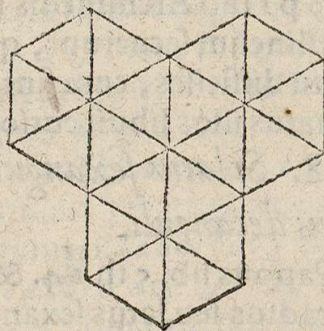
Sexangulum inscribitur per triangulum æquilaterum inscriptum bisectis tribus angulis, sed brevius inscribitur per radium sexies deinde inscriptum: ut in dato circulo sit diameter ae , & centro e radio ie describatur peripheria uio , & à punctis o & u sint diametri oy & us , hæ connexæ & inter se & cum diametro ae inscribent sexangulum æquilaterum dato circulo lateris radio æqualis: ut eu æquatur ipsi ui , quia am bæ æquantur eidem ie per c 17 e 4. Itaque eiu est æquilaterum triangulum, & similiter eio æquilaterum, angulique in centro sunt $\frac{2}{3}$ recti, ideoque æquales, & per i c 8 e 5 angulus sio est $\frac{1}{3}$ duorum rectiorum, & per 2 c 8 e 5 anguli ad verticem item æquales. Quare sex sunt æquales, & ob id per 6 e 16 & 19 e 15 bases omnes æquales, & inter se, & ut jam patuit, radio dati circuli. Inscriptum est igitur sexangulum è radio circuli æquilaterum, & per i e 17 æquiangulum.



Itaque

1. Sexangula tria ordinata complent locum.

Ut hic. Sex enim triangula sunt æquilatera resolutis sexangulis in sex triangula, vel quia quilibet angulus ordinati sexanguli valet rectum & $\frac{1}{3}$ recti. Itaque triplex angulus sexanguli valet $\frac{1}{3}$ recti id est quatuor rectos. Præterea vero nulla è planis figura complet locum. Quinquangulum non complet: Triplex enim ejus angulus faceret tantum rectos $3\frac{3}{5}$: quadruplex faceret $4\frac{4}{5}$, quod amplius & majus est. Septanguli angulus duplex faceret tantum rectos $2\frac{6}{7}$: triplex $3\frac{2}{7}$ id est $4\frac{2}{7}$ quod plus est, & sic deinceps inducenti constabit tribus tantum planis ordinatis compleri planum locum.

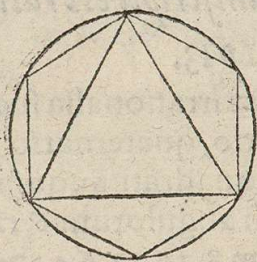


Et

2. Si rectæ ab uno inscripti sexanguli angulo in tertium utrinque angulum connectantur, inscribent triangulum æquilaterum dato circulo.

Ut hic,

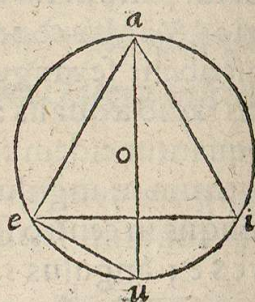
ut hic, quia
latera erunt
subtensa pe-
ripheriis æ-
qualibus. Ita-
que per 19
e 15 equalia,
& vicissim
per tale tri-
angulum bisectis angulis sexangulum inscribitur.



7. *Latus inscripti trianguli æquilateri potest triplum circularis radii.*

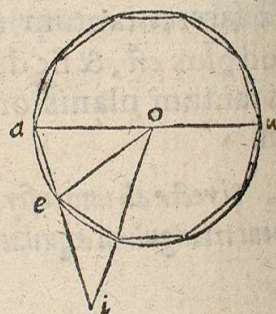
12 p. 13.

ut hic trianguli $a e i$ uno latere $a e$ duæ tertiæ semiperipheriæ occupantur: Nā uno latere occupatur una tertia totius peripheriæ $e u$, ideo est tertia reliqua, id est sexta totius peripheriæ. Itaque $e u$ inscripta est radius per 6 e. Jam diameter $a o u$ per 7 e 12 potest quadruplum radii, id est ipsius $e u$ & per 18 e 16 & 5 e 12 quadruplum idem possunt $a e$ & $e u$: tollee $e u$ latus $a e$ poterit triplum radii. Atque hæc de sexangula figura, id est apud geometriam. Apis enim (ut ait Varro de re rustica lib. 13 cap 16) sexangulam cellam sibi architectatur, quot habet ipsa pedes, quod geometræ *ἑξάγωνον* fieri in orbi rotundo ostendunt, ut plurimum loci includatur, quod idem Pappus & geometrice & copiose demonstrat in præmio quinti libri. Reliquis multangulis & eorum multiplis opus esset triangulo utriusque ad basim anguli ad reliquum tripli in septangulo, quadrupli in nonangulo, & sic deinceps: in cuius inventione veteres geometræ elaborarunt. Quidam (inquit Proclus ad 9 p 1) ab Archimedis helicibus incitati in datam rationem datum angulum rectilineum secuerunt, quorum considerationes iis qui instituuntur contemplatu difficiles, cum sint in præsentia omittimus. Hæc ille. Geometricos autem conatus illos libuit curiosorum gratia in scholis proponere.



8. *Si latus sexanguli secetur proportionaliter, majus segmentum erit latus decanguli.*

Pappus lib. 5 th. ⁴⁵24. & Camp. ad 3 p 14. Secetur enim $a o$ radius seu latus sexanguli per 3 e 14 proportionaliter, & sit $a e$ æqualis majori segmēto. Dico $a e$ latus esse decanguli: Nam si continuetur deinde toto radio in i tota $a e i$ per e 3 e 14 secabitur proportionaliter, & majus segmentum $e i$ erit ipse radius. Nam si recta $i e a$ secta est proportionaliter, est ut $i a$ ad $i e$, id est $o a$ nempe ad radium, sic $a o$ ad $a e$. Itaque per 11 e 7 triangula $i a o$ & $o a e$ sunt æ-



quian

quiangula, & angulus aoe æquatur angulo oia . At angulus noe est quadruplus anguli aoe : æquatur enim duobus interioribus ada & e per 2 c 9 e 6 æqualibus inter se per 3 c 5 e 5 & per 10 e 6, & ideo duplus est ipsius aoe dupli per eandem causam ipsius aio æqualis ipsi aoe . Itaque noe est quadruplus ipsius aoe : Itaque ae est quadrupla peripheria ea . Ergo tota nea est quintupla ipsius ea , totaque peripheria decupla. Ideoque subtenfa est latus decanguli. Itaque

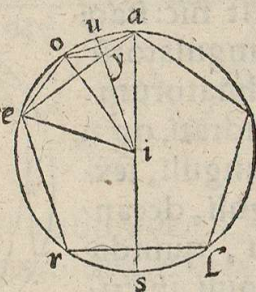
Si decangulum & sexangulum inscribantur eidem circulo, recta è latere utriusque continuata secabitur proportionaliter, & majus segmentum erit latus sexanguli: & si majus segmentum recta proportionaliter secta est latus sexanguli, reliquum erit latus decanguli. 9 p 13.

Comparatio sequitur decanguli & sexanguli cum quinquangulo.

9. Si decangulum, sexangulum, quinquangulum inscribantur eidem circulo, latus quinquanguli potest latera reliquorum: & si recte potest latera sexanguli & decanguli, est latus quinquanguli. 10 p 13.

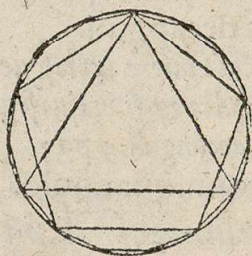
Est latus inscripti quinquanguli ae , sexanguli ei , decanguli ao . Dico latus

ae posse reliqua. Sunt enim perpendiculares duæ, prima io , secunda iu bisecantes latera quinquanguli & decanguli, & concursus secundæ perpendicularis cum latere quinquanguli sit y . Demonstrationis syllogismus est hic. Oblonga è latere quinquanguli & ejus segmentis æquantur quadratis reliquorum laterum: sed quadratum ex eodem toto latere æquatur oblongis è toto, & segmentis per 3 e 13: æquatur igitur & quadratis reliquorum laterum. Demonstraretur syllogismi propositio. Hæc enim pars sola dubia est. Duo igitur triangula aei & yei sunt æquiangula communi angulo ade item æqualibus $ea i$ & $ei y$ dimidii nempe ejusdem eis , quia ille est per 10 e 6, alter duorum æqualium, quibus eis exterior æquatur 2 c 9 e 6: & hic in dimidiam peripheriam insistit. Nam semiperipheria als æquatur semiperipheria ars , item al ipsi ar . Reliqua igitur rls , reliqua rs , & tota rl dupla est ipsi urs : Ideoque er dupla est ipsius eo : & rs dupla ipsius ou . Nam bisegmenta patent per 7 e 15 & 9 e 16. Itaque peripheria ers dupla est peripheria $eo u$, & ideo angulus $ei u$ est anguli eis per 6 e 16 dimidius: bini igitur anguli duorum triangulorum æquantur. Itaque reliquus per c 3 e 7 reliquo. Quare per 9 e 7, ut latus ae ad ei , sic ei ad ey . Itaque per 4 e 12 oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ. Jam connectantur oy , duo rursus triangula aoe & $ao y$ æquiangula sunt communi angulo ad a , itemque $ao y$ & oea ideo æqualibus, quia ambo æquantur angulo ad a , ille per 10 e 6, hic per 2 e 7, quia perpendicularis bisecans latus decanguli facit duo triangula æquicrura & æqua recto angulo crurum: ideoque æquiangula. Itaque ut ea ad ao , sic ea ad ay . Quare per 4 e 12 oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ, propositioque syllogismi vera est, quod demonstrasse oportuit. Conversam huic manifestam usurpat Euclides 16 p 13.



10. Si triangulum & quinquangulum inscribantur eidem circulo ad idem punctum, recta inscripta inter utriusque basim dicto puncto oppositam erit latus inscripti quindecanguli. 16 p 4.

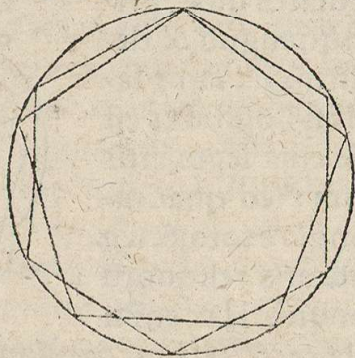
Latus enim tri-
anguli
subten-
det $\frac{1}{3}$ to-
tius pe-
riphe-
ria: duo



latera quinquanguli subtendent $\frac{2}{3}$, e quibus si tollas $\frac{1}{3}$ relinquetur $\frac{1}{3}$. Itaque

Si quinquangulum & sexangulum inscribantur eidem circulo ad idem punctum, peripheria inter utriusque latera erit pars tricesima totius peripheriae.

Ut hic: itaq;
triangulorū
ordinatorum
quadrati, quin-
quanguli, sex-
anguli, decan-
guli, quindec-
anguli inscri-
ptio prompta
erit latere uni-



co, quod repetitum quoties opus est, peripheriam totam subtendat.

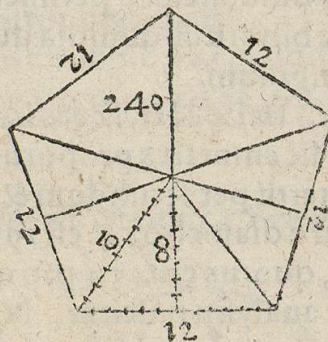
P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X I X.
de geodesia multanguli ordinati & circuli.

EX adscriptione circuli & rectilinei geodesia ducitur multangulorū ordinatorū, atque imprimis ipsius circuli. Concurfus enim bisecantiū duos angulos est centrum circumscripti circuli, ab eoque ad angulum radius, tumq; si quadratum ē dimidio lateris tollatur ē quadrato de radio, latus reliqui erit perpendicularis per 5 & 12. Itaque speciale theorema hic ita instituitur.

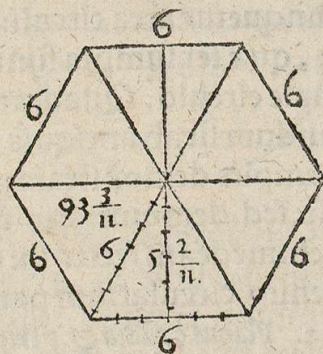
1. Planus ē perpendiculari a centro in latus & dimidio perimetri, est area multanguli ordinati.

Ut hic quadratum ē 10 radio est 100, quadratum ē 6 dimidio lateris 12 est 36, quo illinc

quo illinc deducto reliquum 64 est quadratum perpendicularis, cuius latus 8 est ipsa perpendicularis, ex qua & 24 dimidio perimetri planus est 240 area quinquanguli. Demonstratio hic etiam est certæ illius antecedentis causæ. Nam de quinque triangulis in quinquangulo planus est perpendiculari & dimidio basis est unum, ut ante patuit, quintuplex igitur facit totum: Atqui illa multiplicatio est perpendicularis per semiperimetrum. In sexangulo ordinato etiam radius per 4 e 18 notus est è latere sexanguli: Ut hic quadratum è radio 6 & 36, quadratum è 3 dimidio lateris est 9, quo illinc subducto reliquum est 27 quadratum perpendiculara-

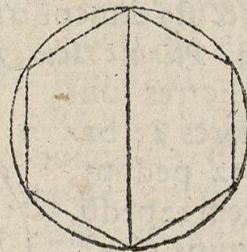


ris: latus est $5\frac{2}{11}$ perpendicularis ipsa ex qua & 18 semiperimetro planus est $93\frac{3}{11}$ area sexanguli. Denique in omnibus multangulis ordinatis theorema satisfacet. Atque hæc geodæsia est multanguli ex adscriptione, unde etiam est dimensio circuli, $\pi\tau\alpha\gamma\omega\nu\sigma\mu\omicron\varsigma$ quadratura circuli vulgo dicitur: argumentum geometris omnium fere ætatum propositum, in quo sese exercerent. Bryso, Antipho, Euclides, Archimedes, Apollonius, Porus, atque è recentioribus Boetius, Campanus, Cusanus, Regiomontanus, Orontius hic elaboravere. Quidam etiam $\pi\tau\alpha\gamma\omega\nu\sigma\mu\omicron\varsigma$ impossibilem credidere. Quæstionis nodus est in ratio, ne diametri & peripheriæ.



2. Peripheria est tripla diametri & fere sesquiseptima.

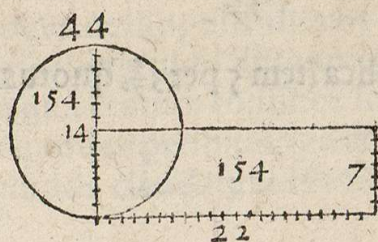
Hæc ratio ut apud Heronē est Euclidī & antiquis geometris nota fuit. Quod enim tripla sit, sex radii, id est tres diametri indicant, quibus peripheria per 6 e 18 est circumscripta, & ideo quia continens major, sed excessus non planè est sesquiseptima. Deest enim unitas unius septimæ, & excessus idem longe major est quam sesquioctava. Itaque quia differentia vicinior erat sesquiseptimæ, assumpta est sesquiseptima: vero quippe propinquum pro ipso vero. Demonstratio Archimedis valde operosa est: si quis tamen curiosius requirat, materiam exercendi ingenii prorsus Archimedeam è scholis accipito.



Itaque

1. Planus è radio & peripheriæ dimidio est area circuli.

Hic enim 7 radius è dimidio diametri 14 multiplicans 22 dimidium peripheriæ 44 facit 154 oblongum: in diametro autem duo latera



1 2

oppo=

opposita, item in perimetro duo reliqua opposita rectanguli continentur. Itaque binorum dimidia duntaxat assumuntur, a quibus comprehenditur rectangulum. Et

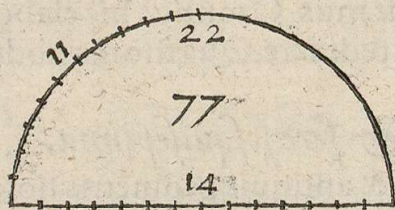
2. Ut 14 ad 11, sic quadratum diametri ad circumulum.

Hic enim tres proportionis termini dantur potestate: quartus multiplicatione tertii per secundum & facti divisione per primum invenitur, ut hic quadratum e diametro 14 est 196. quo per 11 multiplicato factus 2152 dividatur per 14, quotus erit 154 pro quaesito circulo, quod e dimensis quadrato & circulo per analysin nascitur. Nam ratio 196 ad 154 est ratio 14 ad 11, ut reductis terminis apparet. Hic vero secundus $\pi\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ Euclidis est apud Heronem, sed paulo fecus propositus hoc modo. Si de quadrato diametri tollantur $\frac{3}{14}$, relinquetur area circuli: ut si 196 quadratum dividatur per 14, quotus erit item 14, quae ter sumpta sunt 42, & sublata de 196, relinquant 154 quadratum aequale circulo. Quadratura igitur Euclidis ista Archimede antiquior est, & iuxta secundum sit ab antiquis geometris istam geodasiam repetere, & tot Euclideanis exemplis demonstrare geodasiam geometrarum ingenii nequaquam aliena esse: sed demonstratio rationis inventa ab Archimede laudem rationis etiam archimedeam fecit. Ex eadem illa peripheria & diametri ratione nascitur dimensio circularium partium semicirculi, sectoris, sectionis, maioris minoris. Et

3. Planus e radio & peripheria quadrante est area semicirculi.

Ut hic vi-

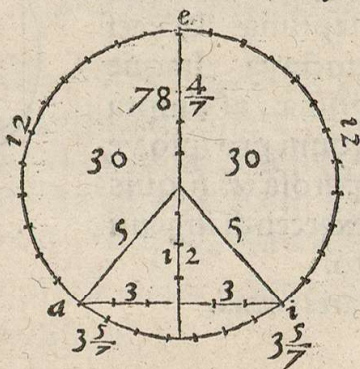
des: factus enim a 7 radio multiplicato 11 quadrante facit 77. Po-



test & ista dimensio fieri sumpto dimidio dimensi jam circuli.

4. Planus e radio & basis dimidio est area sectoris.

Hic tres sunt sectores a e basis 12 pedum, ei item 12 pedum, reliquus ia $7\frac{3}{7}$, diameter 10, multiplica 5 per 6 factus erit 30 pro primo sectore, qua-



tus erit & secundus: multiplica item 5 per $3\frac{5}{7}$, quotus erit $18\frac{4}{7}$, e quibus additis redditur circulus $78\frac{4}{7}$. Et

5. Si trian-

55. Si triangulum ē duobus radiis & basi majoris sectionis addatur duobus in ea sectoribus, totum erit area sectionis majoris: sin detrahatur suo sectori reliquum erit area minoris.

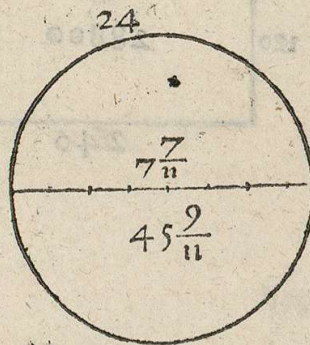
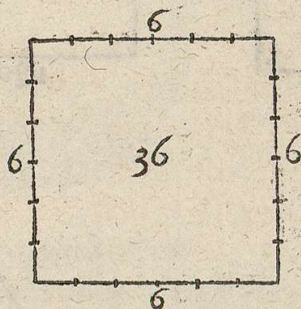
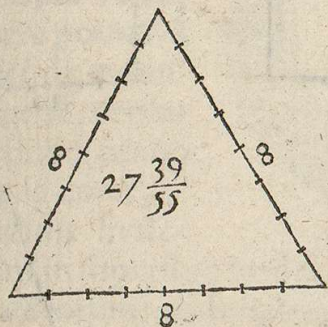
Adde ad sectores $a e$, & $e i$ triangulum, ut in eodem exemplo $a o i$ pedum 12, totus erit 72 area majoris sectionis, tollatur idem de $18\frac{4}{7}$ tertio sectore, $6\frac{4}{7}$ reliquum erit area minoris sectionis.

Et

6. Circulus ē planis isoperimetris inaequalibus est maximus.

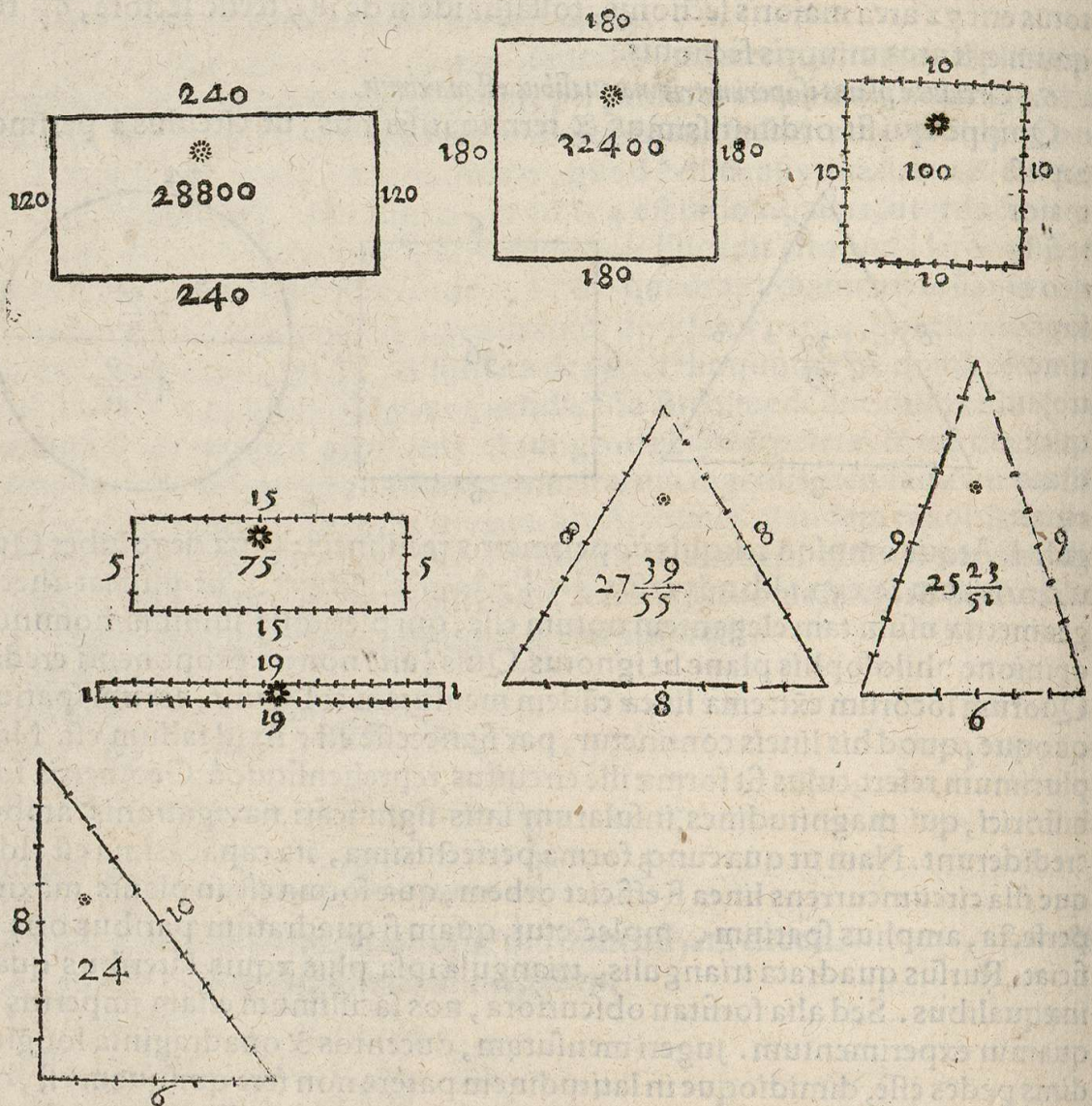
Quippe qui sit ordinatissimus & terminatissimus, ut circulus a perimetri

24 est
major
rectili,
neo is-
soperi-
me-
tro, ut
qua-
drato
& trian-



gulo i. Atque omnino reliquis isoperimetris rectilineis. Qua de re lubet Quintilianum locum 10 cap. 1 lib adversus Verborum sapientiam adungere, ut pudeat rhetori geometriae usum tam elegantem notum esse, qui plerisque summis hominum opinione philosophis plane sit ignotus. Quis (ait) non ita proponenti credat? Quorum locorum extremae lineae eadem mensuram colligunt, eorum spatium quoque, quod his lineis continetur, par sit necesse est. At id falsum est. Nam plurimum refert, cuius sit formae ille circuitus, reprehensique a Geometris sunt historici, qui magnitudines insularum satis significari navigationis ambitu crediderunt. Nam ut quaecunque forma perfectissima, ita capacissima est: Ideoque illa circumcurrens linea si efficiet orbem, quae forma est in planis maxime perfecta, amplius spatium complectetur, quam si quadratum paribus oris efficiat. Rursus quadrata triangulis, triangula ipsa plus aequis lateribus quam inaequalibus. Sed alia forsitan obscuriora, nos facillimum etiam imperitis sequamur experimentum. Jugeri mensuram, ducentos & quadraginta longitudinis pedes esse, dimidioque in latitudinem patere non fere quisquam est, qui ignoret: & qui sit circuitus, & quantum campi claudat colligere expeditum. At centeni & octogeni in quamque partem pedes, idem spatium extremitatis, sed multo amplius clausae quatuor lineis area faciunt. Id si computare quem piget, brevioribus numeris idem discat: Nam deni in quadram pedes, quadraginta per oram, intra centum erunt. At si quindenarii per latera, quini in fronte sint: ex illo quod amplectuntur, quartam deducunt eodem circumductum. Si vero porrecti utrinque undeviceni singulis distent non plures intus quadratos habebunt, quam per quot longitudo ducetur: quae circumibit autem linea, ejusdem spatii erit cuius ea quae centum continet. Ita quidquid formae quadrati detraxeris, amplitudini quoque peribit. Ergo etiam id fieri potest, ut major circuitu minor loci amplitudo claudatur. Hoc in planis.

vallibusque etiam imperito patet plus soli esse quam cali: Exempla rem subi-
ciunt oculis. vide supra n. 4.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XX.

de superficie gibba.

G*ibbum est superficies quae inequaliter intra suos terminos inter-*
iacet.

Superficies plana adhuc amplissime proposita est, ex cuius contrario gibba
possit intelligi: atque ut antea planum pro superficie plana, sic modo gibbum
pro superficie gibba dicatur: nec tamen gibbum quodlibet modo definitur, sed
quod sectum plano basi parallelo faciat communi sectione peripheriam. Id si
lubet regulare nominetur.

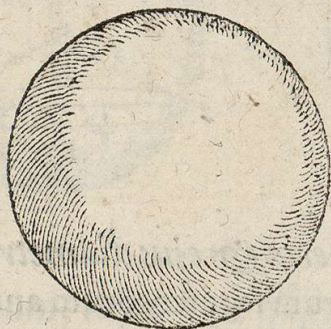
2. Gibb.

2. *Gibbum est sphericum aut varium.*

Partitio respondet partitioni lineæ in peripheriam & helicem.

3. *Sphericum est gibbum æquidistans à centro comprehensi spatii.*

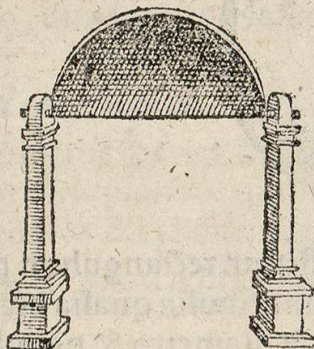
Sic antea peripheria definita est, nominatur autem sphericū à sphæra inopia verbi, cum sphæra potius à sua superficie nominari debuerit, ut planum corpus à plana superficie dicetur, quæ nominis hystorologia erit in superficie conica & cylindræa.



Fit conversione semiperipheria manente diametro, è 14 d 11.

Itaque

Ut hic si spatium inter peripheriam & diametrum inane cogites. Atque ut recto motu lineæ rectæ efficitur planum, sic motu peripheriæ effici-



tur sphericum: Atque ut locis omnibus recta in plano, sic peripheria in sphærico duci potest.

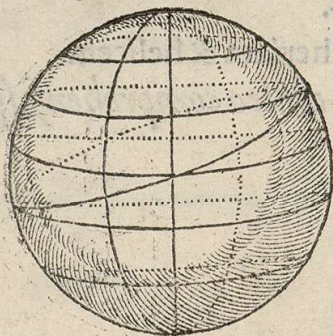
4. *Maxima in sphærico peripheria est quæ sphericum bisecat.*

Quæ de rectis in circulo præcipiuntur, eadem fere huc referuntur, & quidem circulorum sphærae inscriptorum nomine, qui cum sphæra in plano considerantur, lineis etiam adumbrantur, & tamen qui circuli in sphæra considerantur, peripheriæ revera sunt in sphærico. Sic igitur Euclides 17 p 13 postulat maximum sphærae circulum esse, qui transit per centrum, id est qui sphæram bisecat. Maxima itaque peripheria sphærici respondet diametro circuli. Itaque

Peripheria propior maxime est major remotiore, & utrinque æquidistantes à maxima duæ sunt æquales.

Simillima

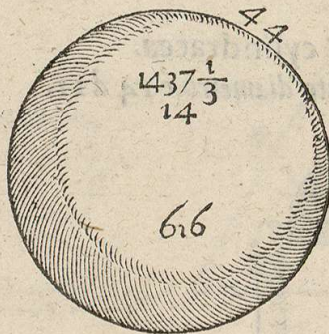
Similli-
ma enim
hic repe-
ti possunt
iis quæ
12. 13. 14
e 15 pro-
ponun-
tur, ut
hic.



5. *Planus est maxima periphæria & ejus diametro est sphericum.*

Geodæsia spherici & spheriæ segmentorum analogia quadam respon-

det geodæsiæ circula-
ri. Sic igitur planus
spherici est diametro
14 & periphæria 44
est sphericum 616.
Sic antea circuli area
est dimensa per rectan-
gulum & tu n dimidio
diametri, tum peri-
pheriæ. Hic vero per



totam & diametrum & periphæriam efficitur rectangulum prioris quadruplū
pro mensura spherici, quia per 1 e 6 plana similia qualia hic cogitantur est dimi-
dio & diametri & periphæriæ, est que tota & diametro & periphæria, sunt in du-
plicata ratione homologorum laterum.

Itaque

1. *Planus est maximo circulo & 4 est sphericum.*

Confectarium patet ex elemento proximo. Archimedes de sphaera demon-
strat, sed præpostere est conis sphericum æquari quatuor maximis circulis. Et

2. *Ut 7 ad 22, sic quadratum diametri ad sphericum.*

Nam 7 & 22 duo sunt termini minimi in ratione diametri ad periphæriam: in
circulo autem ut 14 ad 11, sic quadratum diametri ad circulum. Analogia respo-
det, quia hic multiplicas per duplum, & dividis per dimidium: Illic contra
multiplicas per dimidium, dividis per duplum. Itaque illic circulus simplex
efficitur, hic quadruplus. Hæc igitur analogia est circuli & spherici, ex qua eti-
am est hemisphericum, sectio major, minor.

Et

3. *Planus est maxima periphæria & radio est hemisphericum.*

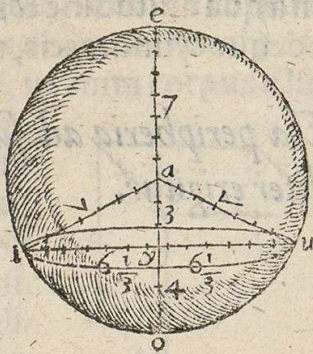
Ut hic erit 308.

6. *Si quota pars est radii perpendicularis à centro ad basim sectionis
majoris, tanta augeatur hemisphericum, totum erit spherici major sectio:
sin tanta minuatur, reliquum erit minor.*

Ut in

ut in exemplo pars radii tertii, id est $\frac{3}{7}$ est à centro, quanta pars hemispha-

ci 308 est 132.
Additis igitur
132 ad 308 cō-
ponetur 440
pro sphaerici
majore sectio-
ne: Detractis
autem relin-
quentur 176
pro sphaerici
minore sectione.



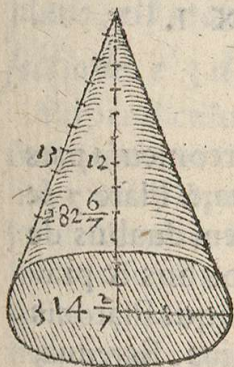
7. *Varium est gibbum, cujus basis est peripheria, latus recta à termi-
no verticis in terminum basis.*

Hæc affectio duplex est communis superficierum variarum regularium: ut patet 18. 20. 21. 23 d 11. Infinitæ vero sunt species ut helicis, sic varii, sed ab Euclī de ex omni numero, duæ species selectæ sunt, quas generali affectione complectimur.

8. *Varium est conicum aut cylindraceum.*

Hæc nimirum geometris species duæ placuerunt: atque ut antea planum & sphaericum pro superficie plana & sphaerica, ita modo conicum & cylindraceum pro superficie conica & cylindracea intelligantur.

9. *Conicum est quod à subjecta peripheria æqualiter fastigiatur ad verticem.*



Itaque

Fit conversione lateris circa subjectam peripheriam.

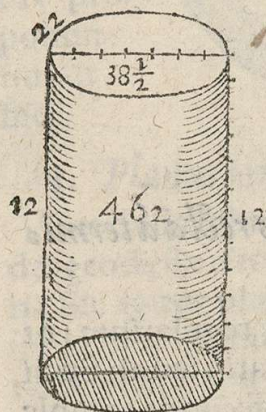
Quod ab Apollonio propositum primo conicorum repetitur à Proclo ad 4 d 1.

10. *Planus è latere & dimidio ^{peripheries} basis est conicum.*

Ut in exemplo superiore latus est 13, semiperipheria $15\frac{5}{7}$, unde planus est $204\frac{2}{7}$
s superficies

superficies conica : cui si addideris subiectum circulum , tota superficies constabit. Quæ vero de primarum figurarum æqua altitudine & reciprocatone dicta sunt, conicis etiam possint attribui, indeque cylindraceis, tametsi ab Euclidæ hæc præterita sint in superficie.

II. *Cylindraceum est quod à subiecta peripheria ad sublimem æqualem & parallelam peripheriam æqualiter erigitur.*



Fit conversione lateris circa duas peripherias æquales & parallelas.

Hoc enim modo fabricatur Serenus.

12. *Planus est sua basi & altitudine est cylindraceum.*

Ut hic peripheria 22, ut colligitur est 7 diametro, altitudo 12. Planus igitur cylindracei est 462, quibus si addideris duas utrinque bases, bis nempe $38\frac{1}{2}$ vel 77, tota superficies erit 539. Quamobrem hæc paucula sunt de superficie gibba.

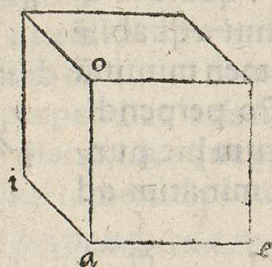
P. RAMI GEOMETRIÆ LIB. XXI.
de lineis & superficiebus in solido.

Hactenus geometria fuit de linea & superficie : superest stereometria pars artis altera de corpore : stereometria est in elementis exigua, & Plato 7 de repub. conqueritur hanc scientiam nondum inventam, & quidem duabus de causis, quia difficilis, quia contempta : ideoque publicis honoribus & præmiis excellentia ingenia excitanda ad tantæ rei indagationem. Itaque Platonis velut autoritate permoti Archimedes., Theodosius, Apollonius, Serenus, Pappus in vacuas possessionis hujus partes ingressi mirabiles structuras fecerunt : Archimedes in libris de sphaera & cylindro, de conoidibus, sphaeroidibus, quadratura parabola, Theodosius in libris de sphaera, Apollonius in libris de conicis, Serenus in libris de sectione cylindri, Pappus in variis plerisque, unde Euclidis inopia possit expleri.

I. *Corpus est lineatum latum & altum. I d II.*

Longitudo

Longitudo enim sola est linea, longitudo & latitudo est superficiei, longitudo, latitudo, altitudo simul est corporis, & hæc magnitudinis trina perfectio est corporis, qua intelligimus in corpore non solum lineas longitudinis & superficies latitudinis, sic enim corpus è lineis & è superficiebus constaret, sed soliditatem in longum, latum, altum concipimus. Pars enim corporis qualibet etiam corpus est. Itaque etiam solidum pro corpore ipso intelligimus: ut in corpore *aeio*



longitudo est *ae*, latitudo est *ai*, altitudo est *ao*.

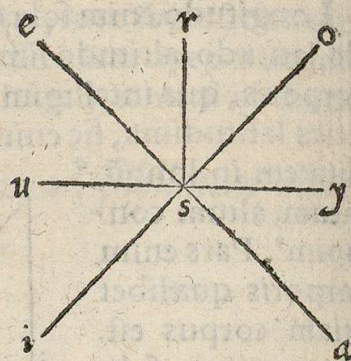
2. *Terminus solidi est superficies, 2 d II.*

Terminus lineæ est punctum, neque punctum tamen est linea aut lineæ pars ulla, terminus superficiei est linea, neque tamen linea est superficies, aut superficiei pars ulla, sic modo terminus corporis est superficies: neque superficies tamen est corpus aut corporis pars ulla: aliud est magnitudo, aliud terminus magnitudinis: ut patuit § *e i*: ut vero lineæ planæ jam dictæ sunt quæ spectantur in plano, sic solidæ & lineæ & superficies appellantur, quæ considerantur in solido, earumque perpendicularum & parallelismus è simplicibus lineis repetuntur.

3. *Si recta est rectis in subiecto plano intersectis perpendicularis in communi sectione, est perpendicularis subiecto plano: & si est perpendicularis plano, est rectis in subiecto plano intersectis perpendicularis in communi sectione. e' 3 d & 4 p II.*

Perpendicularum lineis in superficie consideratis attributum est antea. Itaque inde repetitur consecrarium de perpendicularo lineæ cum superficie ipsa. Duæ lineæ sunt perpendiculares, quarum altera in alteram incidens æqualiter interjacet, & eadem definitione intelligimus sublimem lineam infinitis lineis in plano intersectis incidentem in communi puncto perpendicularem esse ipsi plano, quia æqualiter in omnes partes interjaceat, & singulis intersectis lineis concipimus singula plana cum sublimi communia, ut sublimis & qualibet intersectarum sint in eodem plano perpendiculares, sublimisque linea plano subiecto ideo sit perpendicularis, quia in eodem puncto est perpendicularis omnibus rectis quacumque parte sumptæ fuerint: ut si cogites rectas *ae*, *io*, *uy*, in subiecto plano intersectas in communi sectione: & sublimem *sr* singulis esse perpendicularem in communi puncto *s*, exemplum habebis consecrarii. Itaque

perpendicularum lineæ ad planum subiectum est ϵ lineis in uno plano, & consecutarium modo est ϵ principe illa definitione reciprocum, neque linearum numerus hic certus definitur. Nam si de duabus est verum, est omnino verum de infinitis: quatuor enim anguli recti subiectarum cum sublimi æquabilè statum demonstrabunt. Intelligatur tamen minimū de duabus subiectis in communi puncto perpendicularum. Communis autem sectio linearum hic punctum dicitur, ut dicitur ab Euclide nominatim ad 4 & 5 p II.

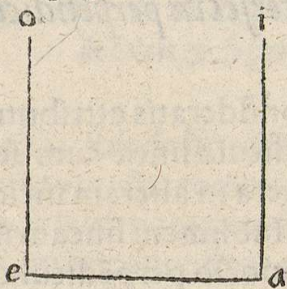


4. Si tres rectæ intersectæ sunt eidem rectæ perpendiculares in communi sectione, sunt in eodem plano. 5 p II.

Ex perpēdiculo enim & communi sectione intelligitur æqualis in omnes partes status, proptereaque planities eadem: ut in superiore exemplo as, ys, os sint eidem sublimi r perpendiculares, erunt in eodem subiecto $aiueoy$. Atque hæc de perpendicularo sublimi, unde contraria obliquitas intelligitur vel inclinatio, nis in angulo acuto, vel declinationis in obtuso, quæ est 5 & 6 d II: item similium inclinationum ex æqualibus angulis quæ est 7 d II: parallelismus consequitur, qui tamen si permiscetur cum solido perpendicularo, consideratur tamen semper in uno plano.

5. Si duæ rectæ sunt perpendiculares subiecto plano, sunt parallelæ: & si parallelarum altera est perpendicularis subiecto plano, reliqua est eidem perpendicularis. 6. 8 p II.

Causa est ϵ prima lege parallelismi. Nam si duæ rectæ sunt eidem subiecto plano perpendicularæ, connexæ rectæ interiores angulos æquabunt duob. rectis, proptereaque parallelæ erunt per 12 e 5: & si in parallelis connexis alter interior angulus rectus sit, reliquus etiam rectus erit, quia communi perpendicularo dividuntur: ut in exemplo. Si anguli ad a & e sunt recti, ai & eo sunt parallelæ, & contra si parallelæ sint ai & eo , & angulus ad a sit rectus, etiam ad e rectus erit.



6. Si rectæ in diversis planis sunt ad eandem rectam parallelæ, sunt inter se parallelæ. 9 p II.

ut hic

ut hic sint rectae ae & uy in
diversis planis ad io paralle-

lae, erunt inter se parallelae.

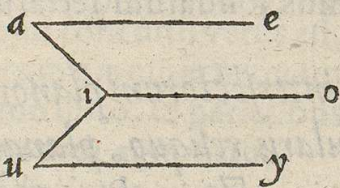
Nam à puncto i perpen-

diculares per 9 & 5 sunt io

& iu . Itaque per 3 & o i cum

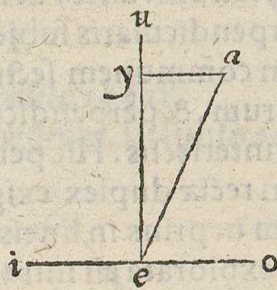
fit perpendicularis duabus

intersectis ia & iu , est perpendicularis subjecto plano. Ergo per 6 eyu & ea sunt
perpendicularis eidem plano, ideoque per idem sunt parallelae. Hæc Euclidis est
demonstratio: postulari tamen id potuit.



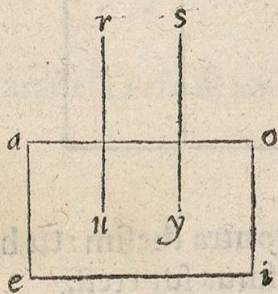
7. Si duæ rectæ sint perpendiculares, prima à sublimi puncto in rectam
subjectam, secunda à communi sectione in subjecto plano, tertia à dicto
puncto perpendicularis secundæ erit perpendicularis subjecto plano. *è*
II p II.

Confectarium est *è* 3 e. Ut si à puncto sublimi a sit per 10 & 5 perpendicularis
 ae in e punctum subjectæ rectæ io , &
ab e communi sectione per 9 & 5 sit al-
tera perpendicularis eu , denique ay
sublimis recta sit per 10 & 5 perpendi-
cularis in eu ad punctum y , ay perpen-
dicularis erit subjecto plano. Nam
quod ae perpendicularis est ipsi io ipsa
 ae , neq; dextrorsum neq; levorsum ac-
clinat per 10 & 2 . & quod iterum ay per-
pendicularis ipsi eu , neque prorsum neque retrorsum pendet. Itaque in qua-
tuor partes interfacet æqualiter. Denique si recta io paribus angulis congruat
ipsis r tertium elementum redierit.



8. Si recta à dato subjecti plani puncto sit parallela rectæ ad idem
planum perpendiculari, erit etiam perpendicularis subjecto plano. *ex* 12
p II.

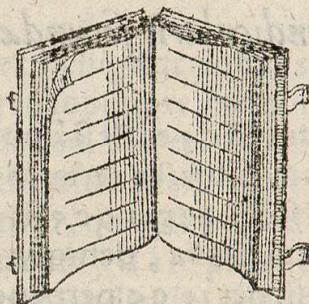
Ut esto planum $aeio$, & datum punctum in e sit u , unde sublimis perpendi-
cularis sit erigen-
da, fiat à puncto y
perpendicularis y
in subjectum pla-
num per 7 e, & ei
parallela statuatur
 ur per 3 & 12 e 5 .
Jam ur , cum sit pa-
rallela perpendicu-



laris in subjectum planum, erit eidem per 6 e perpendicularis. Sic igitur est perpendicularum & parallelismus solidarum rectarum: sequitur de planis solidis utrumque.

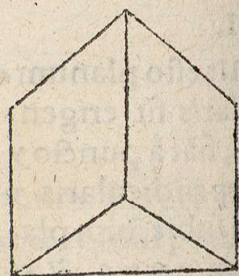
9. Si recta in altero intersectorum planorum perpendicularis communi sectioni est perpendicularis reliquo, plana sunt perpendicularia: & si plana sunt perpendicularia, recta in altero perpendicularis communi sectioni est perpendicularis reliquo. é 4. d. & 38 p II.

Perpendicularum planorum é proxima perpendiculari ratione ducitur, planorumque inter se æqualis utrinque status est é rectæ in planum perpendicularo, quia hinc intelligitur planum ipsum æqualiter in omnes partes lineis rectis nepe significatas interiacere, quod in libro duabus utrinque paginis aperto percipitur é versibus paginarum sectioni & subjecto plano perpendicularibus: Ut hic vides. Hic igitur duo sunt, ut prius communis sectio & planum: antea ut recta sublimis esset perpendicularis subjecto plano, cadebat in communem sectionem duarum rectarum, & perpendicularis erat rectis in ea intersectis. Hic perpendicularum ejusdem rectæ duplex exigitur, primum in cōmunem sectionem, quæ est non punctum ut prius in lineis, sed linea recta, terminus est linea, & planicies ipsa prius explorata est intra duas rectas. Secundum est in subjectum planum.



10. Si recta est perpendicularis plano, omnia per eam plana, sunt eidem perpendicularia: & si duo plana intersecta sunt alicui plano perpendicularia, communis sectio est eidem perpendicularis. é 18 & 19 p II.

Hæc elementa separatim ab Euclide proponuntur & citantur: Prius tamen est confectarium 9 c, & posterius ex eo patet, quod communis ipsa sectio sit recta in quolibet intersectorum sublimium planorum perpendicularis & communi sectioni, & subjecto plano. Nam si communis sectio non esset subjecto plano perpendicularis, neque intersecta plana essent subjecto plano perpendicularia, sed aliquod esset obliquum contra thesim: Ut hic vides. Atqui hoc perpendicularum est planorum, parallelismus superest.

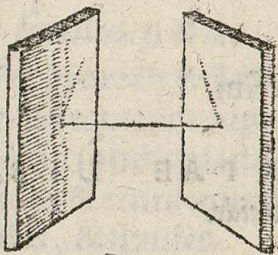


II. *Plana sunt parallela quae nusquam annuunt. 8 d II.*

Parallelismus planorum est non concursu verus est, sicut rectarum in eodem plano ad 11 e 5, quamvis linearum omnium nequaquam sit, quales in conico asymptotas proposuimus primo libro. In parietibus & tabulis adium aequidistantibus parallelismus planorum agnoscitur. Et

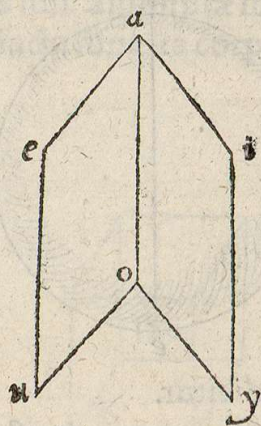
12. *Quae communi perpendicularo dividuntur. 14 p II.*

Consecrarium est e 3 & 6 e. Nam si media recta est perpendicularis utrique plano, est etiam rectis utrinque intersectis perpendicularis in communi sectione, & recti utrinque interiores anguli parallelismum comvincent. Est item e definitione ipsa parallelismi ad 11 e 2. Et



13. *Si binae rectae in ipsis conterminae, sunt parallelae. 15 p II.*

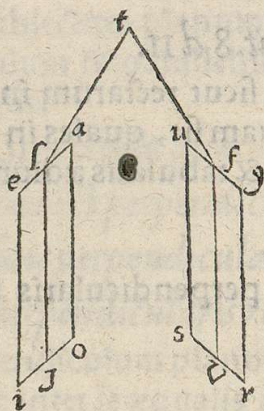
Tales sunt oppositi parietes in fastigio adium. Ut sunt o e i & u o y plana quae habeant binas rectas e a & i a, item u o & y s conterminas in a & o & parallelas nempe e a contra u o & i a contra y o : Dico plana ipsa parallela. nam rectae u e & o a, item y i & o a connectant aequales parallelas, erunt per 6 c 12 e 5 aequales & parallelae, & sic parallelismus & aequidistantiam indicabunt. Idem vero fuerit si conterminas cogites infinite extendi, plana quoque extensa erunt infinite parallela.



14. *Si duo plana parallela secantur plano, communes sectiones sunt parallelae. 16 p II.*

Ue hic vides plana parallela a e i o & u y s r secata per planum l j v f, communes sectiones

sec-
tio-
nes l j
& f v e
rūt pa-
rallele,
secus i
pfa, i=
deoq
& pla-
na in
quib.



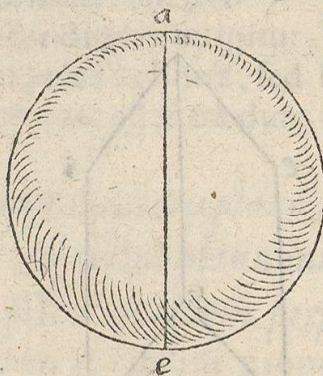
sunt, concurrent, ut in puncto ^t contra thesim.

P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X X I I.
de pyramide.

Stereometria rectarum & planorum ita est: sequitur solidorum ipsorum
stereometria.

1. *Axis solidi est diameter circa quam convertitur.* 15. 19. 22 d II.

Axis vulgo putatur esse proprius sphaerae: Ut hic *ae*: verum etiam attribuitur
cono & cylindro, &
solido plano, & ordi-
natis tetraedro, hexa-
edro, octaedro, icosa-
edro, dodecaedro, &
conversionis motus
nominatim exprimi-
tur, ut hic motus geo-
metricus intelli-
gitur: & sic axis in co-
noidibus & sphaeroidibus dicitur.



2. *Solidum rectum est cujus axis est perpendicularis centro basis.*

Sic conus, sic cylindrus rectus Apollonio & Sereno definiuntur, & hos solos
Euclides consideravit: imo solidum nullum nisi rectum geodasia suscipit. Ita-
que generaliter de omni solido id intelligi potest: & aptius est ad Euclidis ste-
reometriam.

3. *Si solida comprehenduntur a superficiebus homogeneis aequalibus
multitudine & magnitudine, sunt aequalia.* 10 d II.

Aequalitas linearum & superficieum nullo praecipuo axioma instructa
est, sed praesumpta est ex logico & communi sensu, & in plerisque *εφαγωγαις* il-
lic satis

hic satis esse potuit. Hic vero ἐφαρµοσις corporum fit per superficies. Euclides tantum de planis loquitur, stereometria tamen de quibuslibet solidis vera est. Duo cubi sunt æquales, quorum senæ superficies planæ sunt æquales: duæ sphaeræ sunt æquales, quarum superficies sunt æquales: duo conicylindrique sunt æquales, quorum superficies superficiebus, bases basibus sunt æquales: neque tamen hinc dixeris isoperimetra solida quælibet esse æqualia: fallere enim posset in heterogeneis, neque id modo postulatur, sed ex æquali superficie & multitudine & magnitudine æqualitas solidorum dijudicatur.

4. Si solida comprehenduntur à superficiebus multitudine æqualibus & similibus sunt similia. 9 d II.

Confectarium est è generali definitione similium figurarum ad 14 e 4. figuræ enim similes illic definitæ sunt æquiangulæ & proportionales cruribus æqualium angulorum: At in solidis planis similibus anguli æquantur ex similitudine planorum similium, & crura æqualia sunt ipsæ planæ superficies, & ideo proportionales, æquales, & similes.

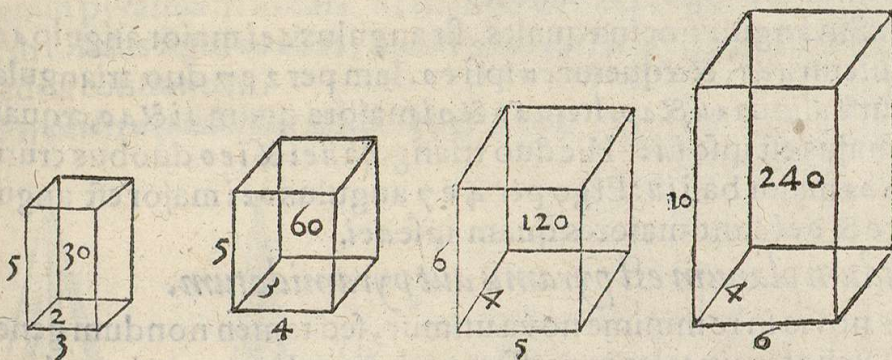
5. Solida similia habent triplicatam rationem homologorum laterum, & duo media proportionalia. 33 p II. 8 p 12.

Confectarium est 15 e 4. ut exemplum repetitum indicabit.

6. Solidum est planum vel gibbum.

Differentiæ planorum à terminis suis assumptæ sunt, à lineis enim rectis & obliquis rectilinea & obliquilinea facta sunt, ita corporum differentiæ sunt à suis

item
terminis,
inde
planum
vel
gibbum
nominantur.



7. Planum, quod comprehenditur à superficiebus planis.

Ut planum ὀρθόγραμμον rectilineum dicitur, ita solidum si compositio patere-
tur, ἐπιπεδοέδρον tanquam dicas planifacium diceretur, quod facies habeat pla-
nas: sic enim tetraedrum, hexaedrum, & ceteræ species compositis nominibus
nominantur. Planum corpus distinguitur à numero planorum, quæ ἐδραι sunt,
unde tetraedrum, pentaedrum, hexaedrum, basis etiam pro hedra dicitur. Pla-
ni rectilinei differentiæ fuerunt à numero laterum vel angulorum, unde trilate-
rum, quadrilaterum, multilaterum, vel triangulum, quadrangulum, multan-
gulum.

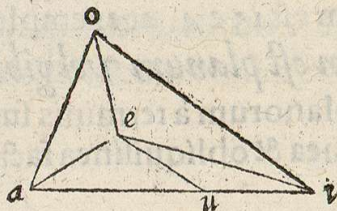
gulum. Sic corporis plani differentia sunt à numero terminorum, quos hedras diximus appellari, sed aliter quam in planis series perpetua est in pyramide à quaternario: in pyramidato autem à quinario. Numerus angulorum numero terminorum non perpetuo respondet pyramis tetraedra, pentaedra, polyedra, est quidem quadrangula, quinquangula, multangula, sed prisma pentaedrum est sexangulum, hexaedrum, octangulum, & sic deinceps.

8. *Anguli plani comprehendentes angulum solidum sunt minores quatuor rectis. 21 p II.*

Nam si quatuor rectis æquarentur, complerent locum planum per 4 c 10 e6, neque omnino angulum facerent, multoque minus si majores.

9. *Si tres anguli plani minores quatuor rectis comprehendant angulum solidum, duo quilibet sunt majores reliquo: & si duo quilibet sint majores reliquo, comprehendunt angulum solidum. 20 & 23 p II.*

Analogia est ad 7 e 6, & causa etiam in promptu est. Nam si duo plani anguli essent æquales reliquo, nullum spatium medium cum reliquo cõcluderët, quin si cogites congruere cruribus planum congruentia sua facerent è duob. unum: multo vero minus si minores. Cõversa hinc etiam patet. Euclides ita demonstrat. Primo si anguli tres sunt æquales, duo: protinus intelliguntur majores esse reliquo. Sin anguli sint inæquales, sit angulus $a e i$ major angulo $a e o$, & æqualis amputetur $a e u$, & æquetur $e u$ ipsi $e o$. Iam per 2 e 7 duo triangula $a e u$ & $a e o$ æquantur basibus $a u$ & $a o$. Item $a o$ & $o i$ majora quam $a i$ & $a o$, æquatur ipsi $a u$. Ergo $o i$ majus est ipso $i u$: Hic duo triangula $u e i$ & $i e o$ duobus cruribus æqua, & basis $o i$ major basi $i u$: Ergo per 4 e 7 angulus $o e i$ major est angulo $i e u$. Ergo duo $a e o$ & $o e i$ sunt majores quam ipse $a e i$.



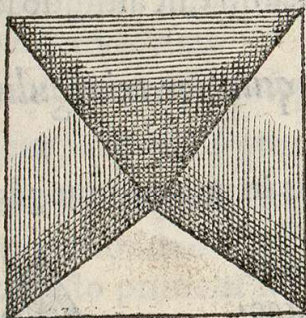
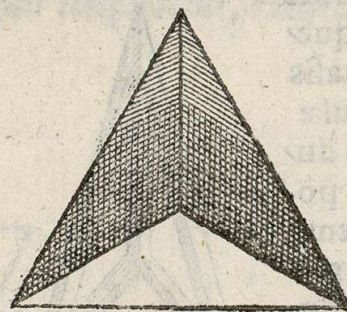
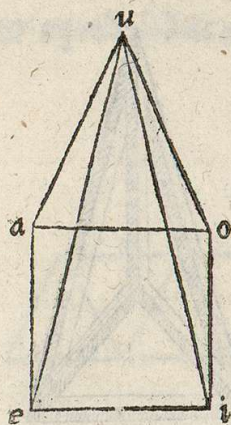
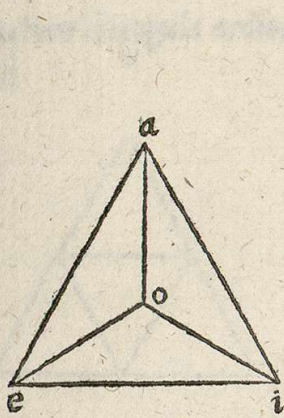
10. *Solidum planum est pyramis aut pyramidatum.*

Vocabulis novis in re minime nova utimur, sed tamen nondum generaliter nominata. Dichotomia tales præcesserunt de linea lineato, triangulo triangulato: & veritas rerum in hæc genera apte concluditur.

II. *Pyramis est solidum planum à basi rectilinea æqualiter fastigiatum.*

Uthic

ut hic
intelli
gis a
trian
gula
basi a
ei in
verti
cem o
erigi
trian
gula a
oe, ao
i, eo i:
in py
rami
de aei
ou vi
des a
basi
qua



drangula aei o in verticem u triangula similiter erigi.

Itaque

1. Pyramidis hedrae sunt una plures angulis in basi.

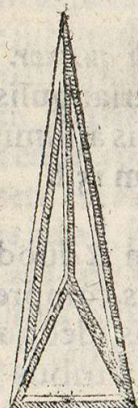
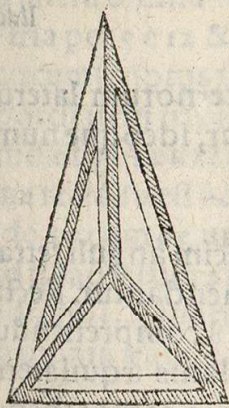
Et

2. Pyramis est prima figura solidarum.

Est enim pyramis in solidis, ut triangulum in planis. Resolvi enim pyramis potest in solidas figuras alias, sed in nullam simpliciores potest, & pauciori bus hedris constantem.

Itaque

3. Pyramides aequalte sunt ut bases. 5 e & 6 p 12.



Et

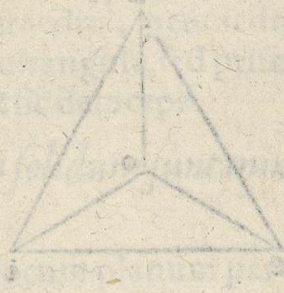
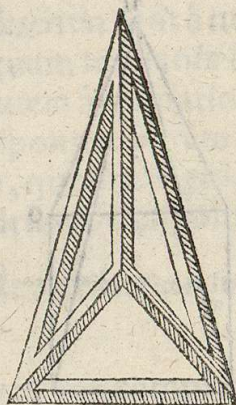
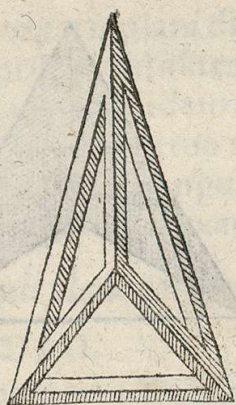
4. Reciproca basi & altitudine sunt aequales. 9 p 12.

Consecraria haec sunt e 12 & 13 e 4. Atque hic Euclides ut in prismatis nomi navit basim & altitudinem pro cruribus aequalis anguli, ut in exemplis. Duæ

t 2

pyramides

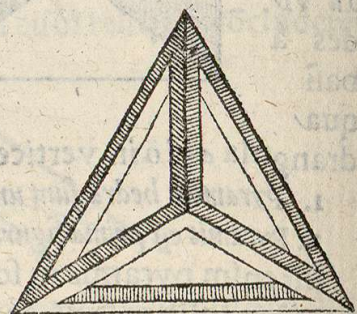
pyramides
sunt æque
altæ basis
triangulæ
prioris du-
plæ ad po-
steriorem.
Itaque pri-
ma est du-
pla secun-
dæ. Item de



exemplo sequenti, ut basis primæ sit ad basim secundæ, sic altitudo secundæ ad altitudinem primæ.

12. *Tetraedrum est pyramis ordinata a' quatuor triangulis comprehensa*, 26 d II.

Ut hic vides. In planis rectilineis admonuimus in unoquoque genere unicā speciem esse ordinatam ē triangulis æquilaterum, ē quadrangulis quadratum, sic modo ē toto pyrami- dum genere unicam speciem ordinatam esse tetrae- dram: neque tamen omnem, sed quæ comprehendi- tur à triangulis non solum ordinatis quidem sigilla- tim, sed æqualibus inter se similibusque. Possunt e- nim corpora comprehendi ab ordinatis hedris, quæ tamen non sint ordinata, quia hedra illæ possunt or- dinatæ separatim esse, sed neque æquales inter se, ne- que similes, neque ideo ordinatum corpus compre- hendent: qualia sunt Archimedis tredecim corpora apud Pappum 5 lib. Tetra- edrum autem generali nomine species ista dicitur propter excellentiam, quo- modo etiam pyramis appellatur. Itaque



1. *Tetraedri latera sunt sex, anguli plani duodecim, solidi quatuor.*

Nam tetraedrum comprehenditur à quatuor triangulis ternorum laterum atque angulorum: unumquodque autem latus bis assumitur, ideoque nume- rus est dimidio minor. Hæc sunt in scholis ad finem 15 l. Et

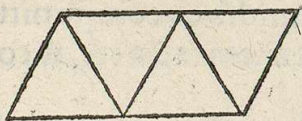
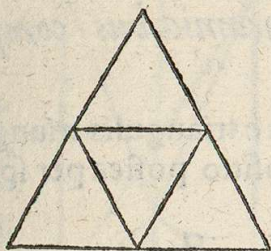
2. *Tetraedra duodecim complent solidum locum.*

Quia octo solidi anguli recti complentes locum & duodecim anguli tetrae- dri æquantur inter se, cum utrique 24 rectis planis comprehendantur. Rectus enim solidus comprehenditur à tribus planis rectis, ideoque 8 comprehendun- tur à 24. Item angulus tetraedri comprehenditur à tribus planis æquilateris, id est à sex tertiis unius recti: ideoque à duobus rectis. Itaque 12 comprehendun- tur à 24. Sic Potamon geometra (ut est apud Simplicium 3 cap. 3 lib. de calo) demonstraverat ex angulis compleri locum solidum à 12 pyramidibus. Et

3. *Si qua*

3. Si quatuor triangula ordinata & equalia solidis angulis componantur, comprehendunt tetraedrum.]

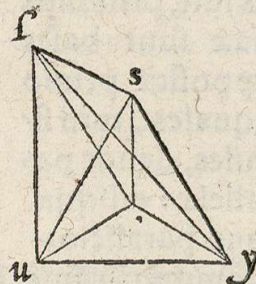
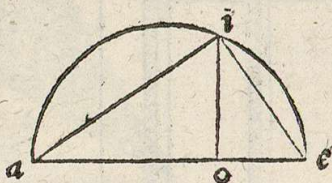
Hæc
fabri-
ca
prom-
ptior
est, uti
potes
in sub-
iectis



exemplis intelligere. Hæc enim triangula sic explicata copulato & connectito inter se, facies tetraedrum.

13. Si recta potens sesquialterum ad latus trianguli æquilateri secetur dupla ratione, duplum segmentum perpendiculare trianguli centro, connexum cum ejus angulis comprehendet tetraedrum. 13 p 13.

Comprehendi solidum à rectis intellige per plana rectis comprehensa, ut deinceps. Ut hic esto primum recta ae potens sesquialterum ad ai latus trianguli æquilateri, ut antea patuit 6 e 12, & secetur dupla ratione in o per 1 c 13 e 5, duplumque segmentum ao sit perpendiculare æquilatero triangulo uys ad centrum r per 7 e 21, sitque rl connexum cum angulis per lu , ls , ly : Dico triangula uys , usl , ysl , uyl æquilatera & æqualia esse quia latera omnia sunt æqualia: Humilia tria primo æquantur ex thesi, sublimia tria per 5 e 12 & è sublimibus quodlibet humili: Nam si triangulo circulus circumscriptus intelligatur, latus poterit triplum radii ur per 7 e 18: At sublime potest item triplum, ut patet in prima figura de radio oi , qui est pro radio secunda figura ur : ut enim ao ad oi , sic per 1 c 4 e 8 oi ad oe , & per 1 c 15 e 4, ut prima recta ao est ad tertiam oe , sic quadratum ao ad quadratum oi , & componendo ao cum oe , ut ae ad oe , sic quadrata ao & oi , id est per 5 e 12, quadratum ai ad quadratum oi , at ae est tripla ipsius oe : Ergo quadratum ai est triplum quadrati oi . Quare latus sublime æquale ipsi ai potest triplum radii, latera quoque ideo omnia æqualia, proindeque & ipsa triangula.



Piramidatum est solidum planum à pyramidibus comprehensum.

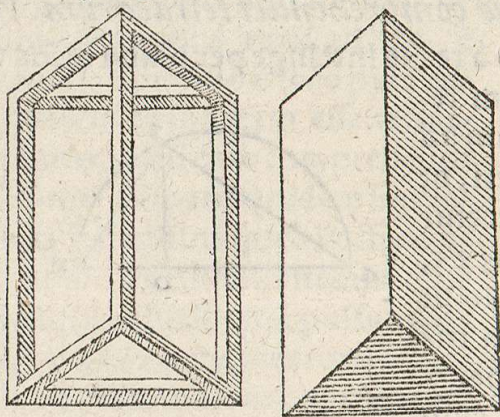
Pyramidatum sic è pyramidibus componitur, ut è triangulis triangulatum, & pyramis prima figura sic antea facta est, & compositio postea per species apparebit.

2. *Pyramidatum est prisma aut polyedrum mixtum.*

Partitio pyramidati deinde fuit difficilior in materia rerum nondum satis animaduersarum vel explicatarum: dichotomia tamen hic adhibita est, quæ nobis optima adhuc occurrit.

3. *Prisma est pyramidatum, cujus duo opposita plana sunt equalia, similia, parallela: reliqua parallelogramma. 13 d II.*

Ut hic vides. Pyramidis unica basis fuit, prismatis duæ sunt bases oppositæ primo æquales, tum similes, deinde parallela: reliquæ sunt parallelogramma. Prisma est Campano cor



pus ferratile, secuto nempe quandam originem nominis: *πρίστος* enim, id est seco, distringo, & *πρίστωσις* est coarctatio, compressio. Itaque

Hedra prismatis sunt binario plures angulis in basi.

Ut vero pyramidis à quaternario, sic prismatis à quinario in infinitum accretio est, ut sit à basi triangula, quadrangula, quinquangula, pentaedrum, hexaedrum, heptaedrum, & sic in infinitum. Prisma autem in Euclide interdum specialiter intelligitur de pentaedro, ut ad 40 p II, ad 3. 4 p 12, ut rectangulū in planis pro oblongo, & pyramis in solidis pro tetraedro ordinato.

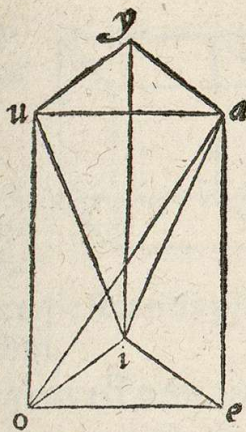
4. *Planus è basi & altitudine est soliditas recti prismatis.*

Geodasia nempe parallelogrammi rectanguli est hic communis, cum altitudinis plana sunt rectangula parallelogramma, sed res per species intelligitur.

5. *Prisma est triplum pyramidis basi & altitudine equalis. è 7 p 12.*

Ut in exemplo prisma pentaedrum sectum est in tres pyramides æquales: Prima enim è planis *aei*, *aeo*, *aoi*, *eio* æquatur secundæ è planis *aoi*, *aou*, *aiu*, *auy* per 7 e 7, quia æquatur basi & altitudine communi. Itaque prima & secunda æquatur:

æquatur:
Et secun-
da eadem
æquatur
sibi ipsi,
dum ba-
sis sit iou ,
& vertex
 a , tumq;
æquatur
tertiæ e



planis $ai u$, $ai y$, $ui y$, $au y$. Itaque tres æquantur. si basis triangulata sit, prisma solvatur in prismata basis triangulæ, theorema concludetur ut prius. Itaque

1. Planus e sua basi & triente altitudinis est soliditas pyramidis basi & altitudine æqualis.

Altitudo autem pyramidis habebitur, si quadratum e radio basis tollatur e quadrato lateris: La-

tus enim reliqui per 5
e 12 erit altitudo, ut in
subjecto exemplo.

Hic area trianguli

$62\frac{44}{125}$ est basis pyra-

midis: Altitudo est

$9\frac{15}{19}$, quia per 4 e 18,

latus potest triplum

radii: At si de 144

quadrato 12 lateris tollatur subtriplum, id est 48, reliquum 96 per 5 e 12 erit altitudinis quadratum, quadratique latus erit $9\frac{15}{19}$. Tertia autem pars $3\frac{5}{19}$, ex

qua & basi pla-

n^o erit $203\frac{1103}{2375}$

Sic in exemplo

sequente quadra-

tū 36 radii 6 tol-

latur a quadra-

to $292\frac{9}{1158}$ la-

teris $17\frac{3}{4}$, reli-

qui $256\frac{9}{1158}$ la-

tus erit $16\frac{3}{4}$,

pro altitudine,

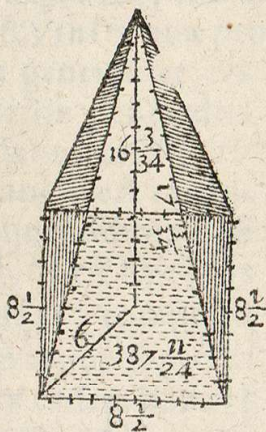
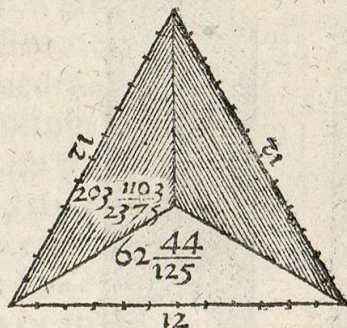
cujus tertia $5\frac{37}{102}$, & basi $72\frac{1}{4}$ erit $387\frac{11}{24}$. Si pyramis sit curta, metire totam, &

partem quæ deest, tum a tota detrahe quod defuerat: ut hic. Sit a^o latus toti-

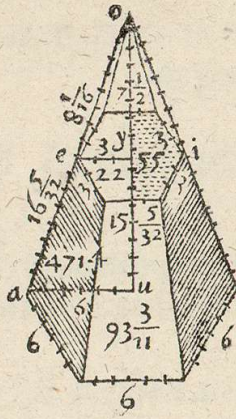
us $16\frac{5}{12}$, e^o latus particularis $8\frac{1}{3}$, erit igitur perpendicularis totius ou $15\frac{5}{12}$: ter-

tia pars $\frac{5}{6}$, ex qua & basi $93\frac{3}{11}$ planus erit 471 pro tota pyramide. At in mino-

re pyra-

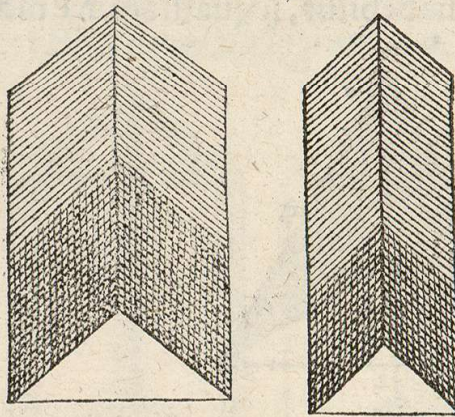


re pyramide à quadra
to lateris $65\frac{1}{3}$ subla
ro quadrato radii 9:
reliqui $56\frac{1}{3}$ latus fe
re $7\frac{1}{2}$ pro altitudine,
cujus tertia pars fuit
 $2\frac{1}{2}$: basis fere 22, ex
qua & tertia illa parte
planus est 55 pro soli
ditate minoris pyra
midis, qua deducta
de majore reliquum 416 erit pro curta pyramide. Hoc modo curtum prisma
metieris.



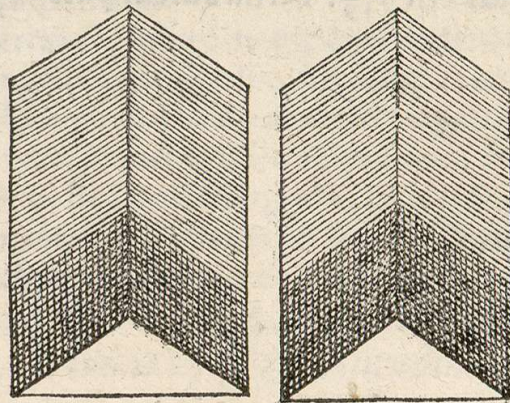
2. Prismata homogenea & equalia sunt ut bases. 29.30.31.32 p 11.

Cum nempe sint
æquemultiplicia
pyramidum. Ho
mogenea autem
requiruntur, quia
pentaedrum cū
hexaedro non i
ta conveniret.
Consectarium
est 12 e 4.



3. Si reciprocantur basi & altitudine, sunt equalia. 34 p 11.

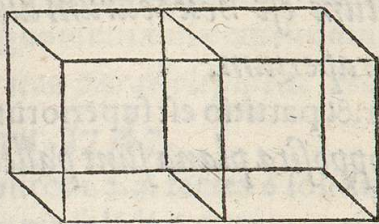
Cō
se
cta
ri
um
ē 13
e 4.



4. Si prisma secatur plano oppositis hedris parallelo, segmenta sunt ut bases. 25 p 11.

Quia

Quia seg-
menta sunt
prismata
homoge-
nea. Itaque
cum sint æ-
quealta, al-
titudine nempe secantis plani, erunt ut bases, & hic bases sumendæ sunt oppo-
sitæ altitudini.

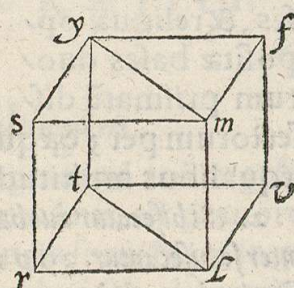
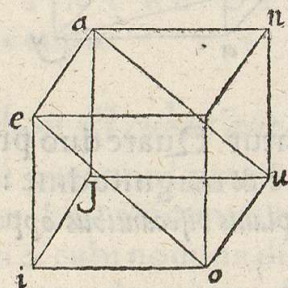


6. *Prisma est pentaedrum aut e' pentaedris compositum.*

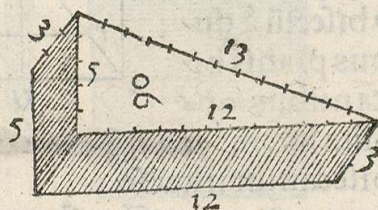
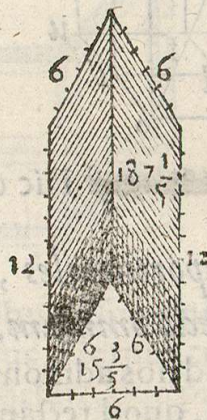
Partitio ut antea qualis fieri potuit, & hic solutio compositionem ostendet.

7. *Si pentaedra alterum basis triangula, alterum parallelogramma ad triangulam duplæ sunt æquealta, sunt æqualia. 40 p II.*

Causa est brevis, quia dimidia sunt ejusdem prismatis: ut hic prisma per diagonos oppositorum laterum bisectio intelliges. Euclides ita demonstrat. Sinto pentaedra $aeiou$ & $ysrlm$ æquealta, primum basis triangulæ eio , secundum parallelogrammæ sl duplæ ad triangulā, utrumque vero duplicetur & absolvatur, ut primum sit $aeiou$, secundum $ysrluf$. Jam ex thesi ba-



fiss sl dupla est basise eio , cujus etiam dupla est basise eo per 4 c 6 e 10. Itaque bases sl & eo æquantur, ideoque cum prismata ex thesi hic sint æquealta, ut bases ex conclusione æquales, prismata erunt æqualia, ideoque & ipsorum dimidia æqualia $aeiou$ & $ysnlr$, quæ proposita fuerant. Prismatis vero pentaedri geodæssia jam dicta generaliter, res é duobus subjectis pentaedris intelligatur. Planus ex 18 perimetro basis triangulæ & 12 altitudine est 216, qui additus basi triangulæ $15\frac{18}{5}$, id est fere $\frac{3}{5}$ bis assumptæ, id est $31\frac{1}{5}$ componit $247\frac{1}{5}$ summam totius superfici ei: At planus ex eadem basi $15\frac{3}{5}$ & altitudine 12 est $187\frac{1}{5}$ pro tota soliditate. sic in secundo prisma pentaedro, qui cuneus ex acumine dicitur, & qui propriè à secundo prisma diceretur, superficies tota est 150, soliditas erit 90.



u 8. *Prisma*

8. *Prisma e' pentaedris compositum est hexaedrum aut polyedrum, hexaedrum parallelepipedum aut trapezium.*

Partes suis nominibus intelliguntur: & partitio est superiorum similis.

9. *Parallelepipedum est cuius opposita plana sunt pallelogramma. e'*

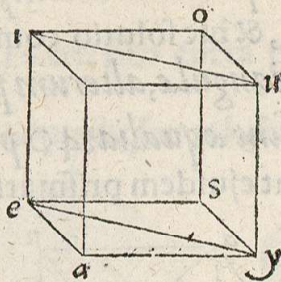
24 p II.

Itaque parallelepipedum in solidis respōdet parallelogrammo in planis. Hic enim hedrae oppositae sunt parallelae, illic opposita latera sunt parallela. Itaque

1. *Bifecatur plano per diagonios oppositorum laterum. 28 p II.*

Respondet 34 p I.

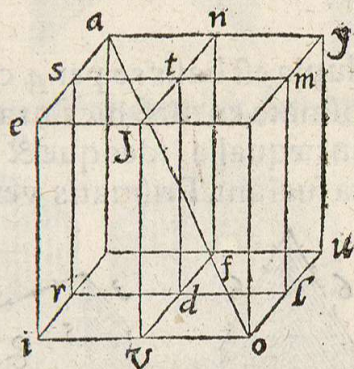
Esto prisma e' sex basibus ai, yo, ye, ui, si, au , diagonii bifecant per $2c6e$ 10 oppositas bases, & reliquae oppositae bases duorum prismatū dis-



sectorum per 3 e aequantur. Quare duo prismata comprehenduntur à basibus aequalibus multitudine & magnitudine: Itaque aequalia. Et

2. *Si bifecatur duobus planis bifecantibus opposita latera communis bifectio & diagonius, inter se bifecantur. 39 p II.*

Quia hic dia- metri (qualis est illa bifectio) inter se bifecantur, ut in exemplo. Esto parallelepipedū $aio uy$ bifectū à duobus planis bifecantibus op-



posita latera: ~~diagonius & bifectio~~ Hic communis sectio ts & diagonius ao bifecantur inter se.

10. *Si tres rectae sunt proportionales, parallelepipedum media aequatur equiangulo parallelepipedo omnium. e' 36 p II.*

Confectarium e' 3 c 5 e, quod nos admonuit antea in planis generaliter verum esse de parallelogrammis, quod rectangulis duntaxat erat attributum.

II. *Parallelepipeda rectangula octo complent locum solidum.*

Id respondet in planis parallelogrammo rectangulo, utque illic anguli plani recti quatuor complent locum planum, ita hic octo solidi anguli complent locum so-

xsrIm, et uyvf

cum solidum, neque magis hic proprium cubo quam fuit antea quadrato: unde Aristotelis geometria illa emendatur.

12. *Figuratus parallelepipedum rectanguli appellatur solidus, factus a tribus numeris. 17 d 7.*

ut si multiplices 1. 2. 3. facies 6 solidum: item si multiplices 2. 3. 4. facies 24 solidum, & latera solidi 6, erunt 1. 2. 3: solidi 24, erunt 2. 3. 4. Sic in planis planus absolute appellatur, ut hic solidus.

Itaque

2. Si duo solidi sunt similes, habent proportionalia latera & duos medios proportionales. 21 d 7. 19. 21 p 8.

Confectarium est 5 e 22. fiunt autem medii proportionales e lateribus similium, secundo, tertio, quarto: Item tertio, quarto, quinto. Ut hic vides.

2. 3. 5. 4. 6. 10.

30. 60. 120. 240.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXIII.

de cubo.

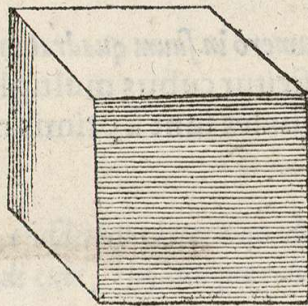
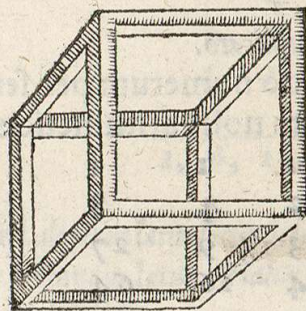
Parallelepipedum rectangulum est cubus aut oblongum.

Partitio respondet in planis partitioni parallelogrammi rectanguli in quadratum & oblongum, quin tota hac differentia communis est planorum & solidorum, tantumque quadrati & cubi nomina distincta sunt. Nam in planis æque & solidis dicuntur oblongum, rhombus, rhomboïdes, trapezium.

2. *Cubus est rectangulum isoedrum. 25 d II.*

ut hic. Definitio respondet quadrati definitioni: utraque enim figura est re-

ctangula & rectitermi-
na: sed termini in qua-
drato latera dicuntur,
in cubo dicuntur he-
dra, quæ tamen late-
rib. etiã definiuntur.
Ergo ut differentia cor-
porum generales a gene-
ralib. superficierum dif-
ferentiis plano obli-



quo: sic modo speciales a specialibus assumuntur. Corpus planum quod comprehenditur a planis superficiebus. Corpus cubicum quod a quadratis comprehenditur, sed nomen generis defuit, quo proprie corpus planum diceretur, speciei huic proprium nomen factum est cubus. De cubo mysterium est quoddam apud Vitruvium in proœmio lib. quinti, quod illic perlegito.

Itaque

1. Cubi latera sunt duodecim, anguli plani vigintiquatuor, solidi octo.

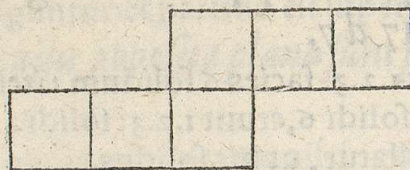
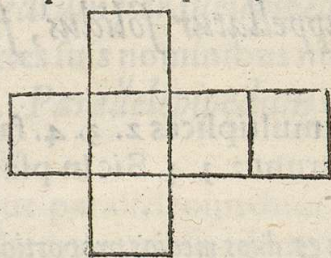
u 2. Hoc item

1. Item est scholio ad finem 15 lib.

2. Si sex quadrata equalia solidis angulis componantur, comprehendent cubum.

Itaque

Ut
hic
in
duo
bus
exē-
plis.



3. Si quadrati angulis perpendiculares lateribus aequales sublimē connectantur, comprehendent cubum. ē 15 p 11.

Confectarium est ē proximo superiore confectario, sex enim quadrata tum connectentur.

3. Diagonius cubi potest triplum lateris.

Nam diagonius quadrati potest duplum lateris per 3 c 5 e 12, & diagonius cubi potest & latus & diagonium quadrati per idem: potest itaque triplum lateris.

4. Si quatuor rectarum continue proportionalium prima sit dimidia quarta cubus, prima erit dimidius ad cubum secunda. ē 33 p 11.

Confectarium est ē 15 c 1 e 4, unde problematis deliaci est solutio ab Hippocrate primum deprehensa, ut in proœmio plenius actum est. At duarum mediarum mesographus ab Herone fuit. 8 e 13.

5. Solidus cubi etiam cubus dicitur, solidus nempe equalium laterum. 19 d 7

Itaque

Fit ā numero in suum quadratum multiplicato.

Sic efficitur cubus multiplicando numerum per seipsum & factum per primum: quales sunt ā primis novem notis arithmeticis primi novem cubi.

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Hæc generalis est inventio cubi & geometrica & arithmetica, specialis inventio varia est in Euclide ē continue proportiōalibus numeris & ē cubis ipsis, unde repetito, si quidem fructum tantæ subtilitatis agnoveris. Analysis quadrati lateris

lateris proprium Theorema in Euclide habuit: analysis cubi non habuit: analogiam tamen hic sequi licet, & alteram geometricæ analyseos utilitatem proferre: propositio per analogiam sic erit.

6. Si recta secetur in duo segmenta, cubus totius æquabitur cubis segmentorum & duplici solido ter comprehenso à quadratoⁿ sui segmenti & reliquo segmento.

Ut latus 12 secetur in 10 & 2 cubus 1728 ex toto 12 æquabitur duobus cubis 1000, & 8, è segmentis 10 & 2, & duplici solido, quorum primus 600 ter comprehenditur à 100 sui segmenti quadrato & à 2 reliquo segmento, secundus 120 ter item comprehenditur à 4 sui segmenti quadrato & à 10 segmento. sed rem totam genesis totius cubi facilius declarabit, quomodo nempe extremi & inter medii solidi generentur. fiat igitur cubus è tribus æqualibus lateribus 12, 12, 12, atque in primis secundum latus primo multiplicetur sic.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \\ 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 4 \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

Productas notas ne addito, sed singulas per reliquum latus multiplicato, & multiplicatas addito separatim sic.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \\ 1 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 2 \\ 4 \quad 8 \\ 2 \quad 4 \\ 2 \quad 4 \\ 1 \quad 2 \\ \hline 1, 6, 12, 8 \end{array}$$

Itaque

Latus primi cubi singularis est alterum latus secundi solidi, ejusdemque lateris quadratus est alterum latus primi solidi, cujus reliquum latus est latus secundi cubi, ejusdemque reliqui lateris quadratus est reliquum latus secundi solidi.

In ista igitur æquatione quatuor solidorum cum uno solido considerabis peculiarem geneseos & compositionem, primum ut cubus ultimus fiat ex ultimo segmento 2, tum ut secundus solidus à 4 quadrato sui segmenti & 10, & reliquo segmento ter comprehendatur: Denique ut primus solidus à 100 quadrato sui segmenti 10, & reliquo segmento 2, ter item comprehendatur: postremo ut cubus 1000 fiat è majore segmento 10. Ex hac igitur geneseos analysis contraria deducitur è mutua cuborum cum solidis colligatione, qualis in quadratis

dicta est. Hic enim tametsi de solido agitur, attamen duo latera spectantur, quia alterum compositum & planum est. primi igitur cubi 1000 latus 10, est clavis ad duos solidos, & cubum sequentes aperiendum. Est enim alterum latus secundi solidi, quippe comprehensi ter ab eo & secundi segmenti quadrato. Est etiam ejusdem lateris 10 quadratus 100, latus alterum primi solidi 600, comprehensi nempe ter ab hoc quadrato 100, & reliquo segmento 2: est etiam reliquum primi solidi latus 2 latus sequentis cubi: ac postremo ejusdem lateris 2 quadratus reliquum latus secundi solidi. Hoc igitur velut Ariadnes filo tam varii laterum errores explicantur, ut in quadratis fuit. Nam cum latera singularium cuborum inveneris, latus etiam cubi totius inveneris: tametsi enim cubus universus est major cubis partium: attamen latus universum est aequale lateribus singularium cuborum, & solidis intermediis duntaxat utimur ad cubi sequentis latus inveniendum. Quærat igitur latus cubi 1728. Primum notabis punctis ultimum & millenarium, deinde quemcunque locum, sic 1728: Deinde cubi maximi in primum punctum definientis invenies latus cubicum, hic erit 1: seorsum nota 1, & lateris cubum tolle de numero definiente in idem punctum, nihil manebit, sic 1728(1: Hoc primum singularis cubi latus est. Secundo latus idem triplicetur, fient 3, primum latus secundi solidi. Hic numerus triplus dicitur, subjiciturque eidem solido sic.

$$\begin{array}{r} 1728 \\ 3 \end{array} \quad (1)$$

Item latus quadretur, erit 1, & cum quadratum fuerit triplicetur, erit 3 primum latus primi solidi, & divisor dicitur, eidemque solido subjicitur, sed inferius, ut à triplo sejungatur sic.

$$\begin{array}{r} 1728 \\ 3 \end{array} \quad (1)$$

Idem etiam divisor habetur multiplicatione quoti per triplum, quia solidus idem est quocunque ordine tria ejus latera multiplicentur. Per inventum divi- forem divide primum solidum, emergit 2 reliquum ejusdem primi solidi latus. Atque latus hoc reliquum, quia sequentis cubi latus est, cum superioris cubi latere deinceps adnota, & per quotum 2 multiplica 3 divisorem, facies 6 subjicienda divisoni. Postremo idem latus 2 quadretur, fiet 4 reliquum latus secundi solidi: 4 igitur per 3 triplum multiplicatis fiunt 12, item subjicienda secundo solido.

solido. Denique 2 latus cubi cubatum facit 8 subjienda sequenti puncto: ad de tres summas, facies 728, quibus subductis nihil manebit, sic.

$$\begin{array}{r}
 2728 \quad (12 \\
 32 \\
 4 \\
 3 \\
 6 \\
 \hline
 128 \\
 728
 \end{array}$$

Quod si cubi singulares duobus plures fuerint, latera praecedentia pro unico sumuntur: ut si quaeratur latus cubi 34012224, notabis locis cubicis, latus primi cubi erue, sic.

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 34012224 \quad (3
 \end{array}$$

Denique secundi singularis sic eruatur.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 7244 \\
 34012224 \quad (32 \\
 94 \\
 474 \\
 34 \\
 368 \\
 \hline
 5768
 \end{array}$$

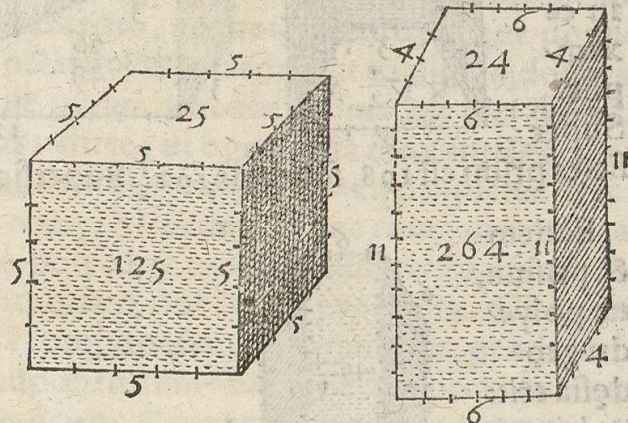
Hic igitur cum duo latera sint tanquam unicum triplicandum & triplum subjiendum secundo solido: eadem duo latera velut unicum quadretur, quadratumque triplicetur, fient 3072 primo solido pro divisore subjienda: per hunc divisorem divide primum solidum, quotus erit 4, per quem multiplicato divisorem 3072, facies 12288. Postremo quadra 4 quotum, fient 16: iis multiplicata triplum 96, fient 1536 subjienda triplo. Tandem etiam quotum cubatum id est

id est 64 subice punto sequenti, & tres summas addito, & subducto, nihil manebit, sic.

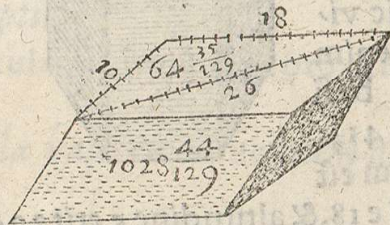
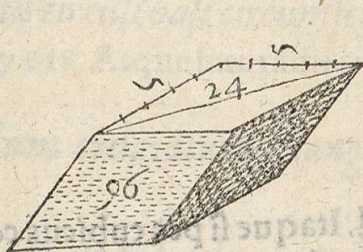
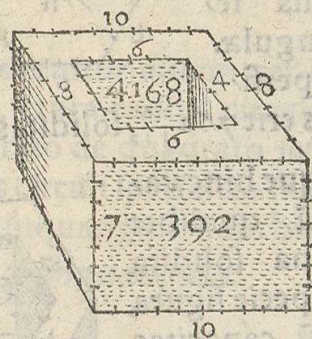
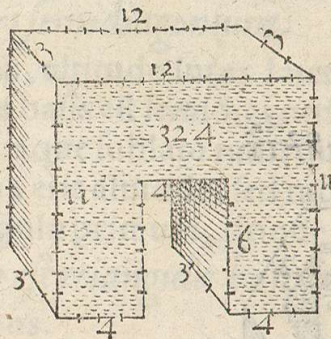
$$\begin{array}{r}
 2244 \\
 3482224 \\
 864 \\
 26 \\
 \hline
 3072 \\
 22288 \\
 2536 \\
 64 \\
 \hline
 2244224
 \end{array}$$

Aliquando post cubicum latus jam repertum, locis proximis neque solidus est ullus, neque cubus. Itaque tum lateri invento, circulus adscribendus est, ut in cubo 8120601 (201. Si secundum latus primi solidi sit majus latere sequentis cubi, solidus divisus partem secundi solidi complectebatur, ideoque minuendum latus illud est, ut in cubo 17576, primum latus erit 2, secundum, si feceris 7, ut videtur initio fieri posse, facies primi solidi secundum latus majus latere sequentis cubi. Itaque latus illud minuatur, & pro 7 sume 6, latus legitimum produces, analysi tota erit 17576 (26. Hæc via generalis est & communis ad quamlibet magnum cubi latus retexendū. Sic in cubo 312908547069 latus invenietur 6789. In partibus est quoque cubi ratio. Nam si propositus numerus cubus nō est, nullū est ejus in numeris verum latus, cubi tamen in eo maximū verum latus erui potest: ut in 17616 cubus continetur 17567, & latus ejus est 26, & supersunt 40. Latus itaque numeri non cubi nullum tam accuratum reperietur unquam, quin accuratius inveniri possit: ut de quadrato jam dictum est, duoque item hic modi sunt cubicum latus vero propinquum inquirendi, quales etiam in quadrato ante declarati sunt. Primus modus subducit duos solidos & ultimum cubū in proximo majore cubo comprehensos, quo intelligatur duorum continuorum cuborum distantia, sicut antea duorum quadratorum distantia intellecta est. Huc enim cubicus gnomon quidā recurrit, quem cōcipis ē tribus planis cubi, uti gnomonē quadrati ē duobus quadrati lateribus. Sic in exemplo 17616, ubi latus est 26, & supersunt 40, sequētis cubi. Divides 27 in 26 & 1, & ut antea didicisti solidos hinc & cubū facies, primus solidus comprehendetur ter à 676 quadrato segmenti 26 & reliquo segmento. Itaque erit 2028: secundus comprehenditur ter à quadrato 1, & reliquo segmento 26, & erit 78. Cubus autem 1 est 1: adde igitur illos duos solidos, & hunc cubum, habebis 2107 pro nomine reliqui 40. Itaque latus 17616 est $26\frac{40}{2107}$, quo intelligitur, ut antea in quadrato, quantum numerus 40 abest à nomine 2107, tantum cubum propositum abesse à proximo majore. Itaque si numeratorem 40 tollas à nominatore 2107, & reliquum 2067 addas 17616,

das 17616, totus erit 19683, cubus lateris 27. Secundus modus est per partes magni cuiusdam nominis sed cubicas, ut earum latus jam certum sit, ut numerus idem 17616 reductis ad centesimas cubicas, id est ad 1000000 facit 17616000000, cuius numeri latus est 2601 pro numero datarū cētesimarū, sic $\frac{2601}{100}$, id est 26 $\frac{1}{100}$ & supersunt 19712199, quæ ne centesimam quidem invento lateri possunt addere, quia differentia cubi proximæ majoris major est, ideoque reliqua illa despiciuntur. Atque hæc de cubo: de reliquis autem parallelepipedis, oblongo, rhombo, rhomboide, deque trapezio & polyedris, pentaedris stereometria præcipua nulla est. Prismatis geodesia est exposita prius, exemplis tantum specialibus opus est, ut hic. Planus est basis perimetro 20 & altitudine 5 est 100. Additis utrique basi 25 & 25, id est 50, totus est 150 pro tota superficie. Planus vero est basi 25, & altitudine 5, est 125 pro tota soliditate: sic in oblongo, planus est basis perimetro 20, & altitudine 11 est 220, qui additus basibus 24 & 24, id est 48 componit 268, pro tota superficie. At planus est basi 24 & altitudine 11 est 264 pro soliditate. Atque eadem geodesia erit in



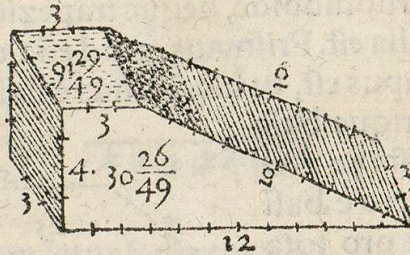
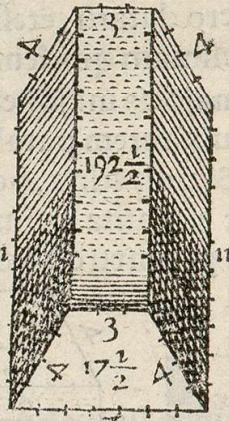
dimetiendis parietibus rectangulis vel portis aliqua fenestra, aut cavitate vacuis, si vacua ipsa detrahantur, ut hic vides. In proximo exemplo spissitudo est 3 pedum, latitudo 12, altitudo 11: tota itaque soliditas est 396. ac porta est spissitudinis 3 pedum, latitudinis 4, altitudinis 6, soliditasque portæ 72 pedū, quibus subductis à toto pariete restant 324 pro reliquo parietis corpore. In secundo exemplo longitudo pedum 10, latitudo 8, altitudo 7, faciunt totius corporis 560 pedes: Cavitas longitudinis 6, latitudinis 4, altitudinis 7 facit 168, quibus subductis de 560, reliqui summa est 392. Sic amplissimi ædificii parallelepipedos parietes, murosque omnes metiri liceat. Eadem geo-



dem geo-

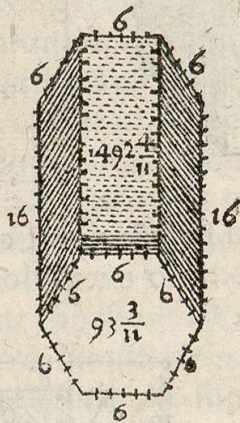
dem geodasia est in rhombo, rhomboide, trapezio, & quolibet multangulo: basis metienda est ut prius, tum ex ea & altitudine soliditas constabit: ut in rhombo basis 24 altitudinis 4 soliditas est 96, in rhomboide basis $64\frac{1}{2}$ altitudinis 11, soliditas $1028\frac{44}{119}$.

Eadē
geo=
dasia
deni=
que
trape=
zii: ut
in e=
xem/
plis.
Super

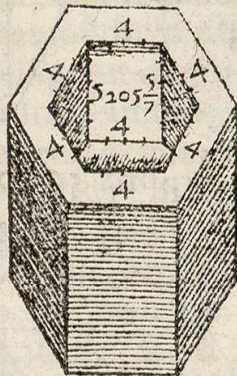


ficies primi est 198, soliditas $192\frac{1}{2}$. Superficies secundi est $148\frac{3}{49}$, soliditas $91\frac{29}{49}$.

Eadem
& prisma,
tis polye/
dri geo/
dasia erit:
ut hic vi/
des in o/
ctaedro
basis se/
xangula.
Superfi/
cies erit $762\frac{6}{11}$, soliditas $1492\frac{4}{11}$.



Atque hinc va/
forā qualibet
plana solidita/
tis specie figura/
torū capacitas
æstimari po=
test: Ut hic vi/
des. Hic enim
planus ē basi
sexangula $41\frac{1}{7}$:
radius enim est



latus per 6 e 18, & altitudine 5 erit $205\frac{5}{7}$. Itaque si pes cubicus contineat 4 quartas ut Parisienses loquuntur, vas continebit quartas $822\frac{6}{7}$, id est fere 823.

P. R A M I

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXV.
de polyedris mistis ordinatis.

Polyedrum mistum ordinatum est pyramidatum compositum ē pyramidibus vertice coeuntibus in centro, & sola basi eminentibus.

Pyramidati primum genus in prismatico ita fuit: dicatur polyedrum mistum ordinatum separatim a pyramide & prismatico: quia neutrius definitio ei convenit. Pyramis ab una basi fastigiatur, mistum non item. Prismatis opposita plana sunt aequalia, similia, parallela, hoc convenit. At reliqua plana prismatis sunt parallelogramma, quod neque octaedro, neque icosaedro, neque dodecaedro convenire potest, cum plana octaedri & icosaedri sint triangula, dodecaedri sint quinquangula. Quare neque pyramis neque prisma hic dici potest, pyramidatum tamē est ē pyramidibus vertice (ut ē geodasia mox intelligetur) coeuntibus in centro, & sola basi eminentibus, neque tamen propterea dixeris talibus pyramidibus inordinatis compleri locum, neque enim omnimodo sumptae compleant locum. Atqui ē polyedris mistis ordinatis Euclides traduntaxat hac ordinata sibi proposuit, quae & nobis sunt proposita. Cū igitur pyramidatum mistum ordinatum ita componatur ē pyramidibus, geodasia ipsius erit ē geodasia pyramidum componentium: basisque una per numerum omnium basium faciet corporis superficiem, & pyramis una per numerum omnium pyramidum multiplicata faciet soliditatem.

2. *Altitudo componentis pyramidis habetur per radium circuli basi circumscripti, perque polyedri semidiagonium.*

Basis pyramidis patet oculis, altitudo intus latet, invenitur autem per triangulum rectangulum, cuius basis est semidiagonus, crura radius circuli & perpendicularis altitudinis. Itaque sublato radii quadrato de quadrato semidiagoni, latus reliqui per 5 e 12 erit altitudo: sed radius circuli specialem inventionem per species basis triangulae primum, deinde quinquangulae habebit.

3. *Mistum ordinatum est triangulae basis aut quinquangulae.*

Partitio est ē subjectis basibus.

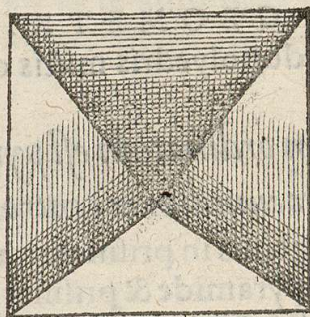
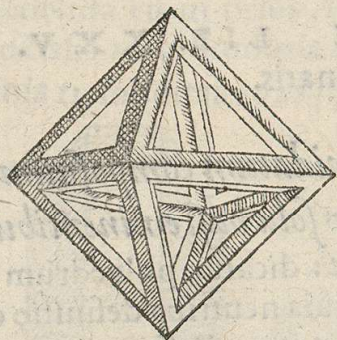
4. *Si quadratus ē latere triangulae basis trifariam dividatur, latus trientis erit radius circuli basi circumscripti.*

Ut patet per 7 e 18. Atque hac radii circularis inventio est pro octaedro & icosaedro.

5. *Mistum ordinatum triangulae basis est octaedrum aut icosaedrum.*

6. *Octaedrum est polyedrum mistum ordinatum, quod ab octo triangulis comprehenditur. 27 d II.*

ut
hic vi-
des
mo-
no-
gram-
mum
& so-
lidū.



Ita que 10

1. Octaedri latera sunt 12, anguli plani 24, solidi 6.

Hoc item est de scholio ad finem 15 lib.

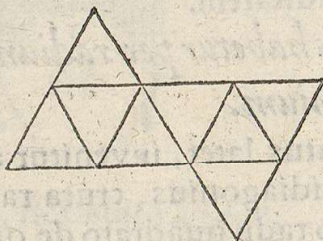
Et

2. Octaedra novem complent locum solidum.

Quadruplex enim angulus tetraedri æquatur triplici octaedri, & dodecu-
plex ideo nuncuplici. Itaq; novem anguli octaedri valent octo solidos rectos.
Est ita Potamonis demonstratio ex angulis consentanea Euclidis demonstrati-
oni, item ex angulis quod quinque tantum solida sint ordinata demonstrantis
octaedrū solidi loci completivum efficiet contra Aristotelē: utque in planis, sic
in solidis triplex figura complebit locum.

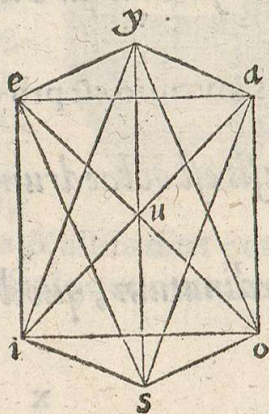
3. Si triangula octo æquilatera & equalia solidis angulis componantur, comprehendunt 20
octaedrum.

Hæc vero
fabrica faci-
lis est, ut pa-
tet in subje-
cto exēplo:
ubi uides tā-
quam du-
plicis penta-
edri duo tri-
angula æquilatera æqualia intersecari.



7. Si recta centro quadrati utrinque perpendicularis equalis semidias-
gonio connectatur cum angulis, comprehendet octaedrum. 14 p 13.

Nam per-
pendicu-
laris y u &
su cum se-
midia-go-
niis u a, u
o, u i, u e,
æquabit
per 2 e 7
octo late-



ray 1, ye

raya, ye, yo, yi, se, si, sa, so: octoque triangula.

Itaque

1. Diagonius octaedri potest duplum lateris

ut patet per 5 e 12.

2. Si quadratum de latere octaedri duplicetur, duplicati latus erit diagonius.

Et

ut in subiecto exemplo latus est 6 quadratum 36, duplicatum 72, cuius la-

tus $8\frac{8}{17}$ est diagonius. Atq;

hinc existet geodæsia octae-

dri. Semidiagonius enim

est $4\frac{4}{17}$: cuius quadratum

est $17\frac{271}{155}$: & quadratum de

6 latere trianguli æquilate-

ri potente per 4 e ~~18~~ triplū

radii est 36, & que 12 triente

latus $3\frac{3}{7}$ est radius circum-

scripti circuli. Quare subla-

to quadrato 12 de quadrato $8\frac{8}{17}$ restabunt $5\frac{271}{155}$ quadratum perpendicularis:

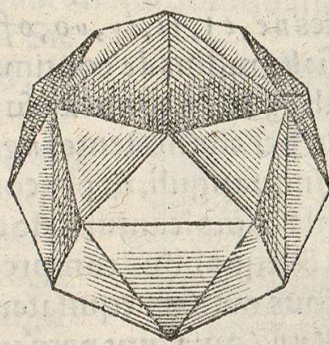
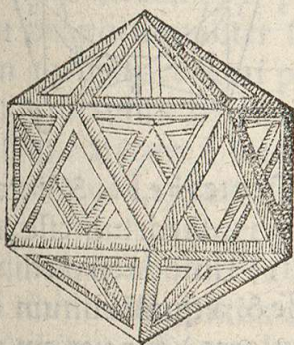
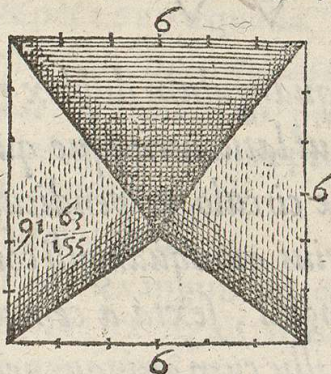
cuius latus $2\frac{1}{5}$ est ipsa altitudo perpendicularis, cuius pars tertia est $\frac{11}{15}$ quæ per

$15\frac{18}{31}$ basim triangulam faciant $11\frac{66}{155}$ pro octava pyramide, quæ multiplicata

per 8 facit $91\frac{63}{55}$ pro toto octaedro.

8. Icosaedrum est polyedrum mistum ordinatum à viginti triangulis

comprehensum. 29 d II.



Itaque

1. Icosaedri latera sunt 30, anguli plani 60, solidi 12.

Consectarium est item é scholio ad finem 15 lib.

Et

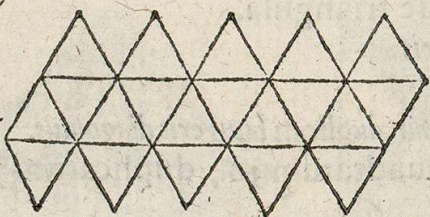
2. Si viginti triangula ordinata & æqualia solidis angulis componentur, comprehendunt ico-

saedrum.

x 3

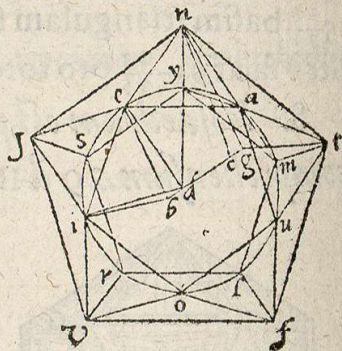
Fabrica

Fabrica autem hac prompta est, ut è subsecuto exemplo perspicitur.



9. Si ordinata quinquangulum duplex & decangulum unum eidem circulo sic inscribantur, ut latus utriusque quinquanguli subtendat duo latera decanguli, sex rectæ circulo perpendiculares & radio ejus æquales, quinque ab angulis alterius quinquanguli connexæ & inter se, & cum angulis reliqui quinquanguli, sexta à centro utrinque continuata latere decanguli, & connexa illic cum quinque perpendicularibus, hic cum angulis secundi quinquanguli comprehendunt icosædram. é 15 p 13.

Fient enim viginti triangula æquilatera & æqualia. Esto igitur quinquangulum duplū primū $aeiou$, secundum $ysrlm$, quorū latus quodlibet subtendat duo latera decanguli, nēpe $utym$, subtendat ya & am , tum sunt perpendiculares quinque ab angulis secundi quinquanguli y , n , s , j , rv , lf , mt . & connectantur primo inter se per connectentes nj , jv , vf , ft , tn . secundo cum angulis primi quinquanguli per connectentes ne , ej , ji , iv , vo , of , fu , ut , ta , an . Sexta à centro d sit bg radius dc continuatus utrinque latere decanguli cg & db connexa supra cum perpendicularibus, ut per connectentes ng , tg , infra cum angulis primi quinquanguli, ut per connectentes be , bi , & cæteris locis similiter, omnesque planis compleantur. Hoc dico icosædram esse, & à viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehendī. Primo intermedia decem triangula perpendicularibus omīssis æquilatera esse & æqualia unum demonstrabit, ut na & t . Nam mt & yu (quia sunt perpendiculares) sunt etiam per 6 & 21 parallelæ, & ex thesi sunt æquales. Itaque per 6 & 12 & 5 nt æquatur ipsi ym lateri quinquanguli: item na per 5 & 12 potest crurari ny & ya , id est per fabricam latera sexanguli & decanguli, & per conversam 9 & 18 est latus quinquanguli: Idem erit de at . Quare nat est æquilaterum: idemque de reliquis novem intermediis nae , nej , ejj , jiv , ivo , vos , fo , fu , fut , uta , tan . Similiter & de quinque superis triangulis probabitur ductis rectis dy & en , quæ ut prius (quia connectunt æquales parallelas ipsas dc & yn) erunt æquales. At dy est latus sexanguli. Itaque en latus idem erit sexanguli, & cg est latus decanguli. Itaque gn potens utrumque per 5 & 12 erit per conversam 9 & 18 latus quinquanguli, & similiter gt concludetur latus quinquanguli. Quare ngt est æquilaterum, & quatuor reliqua similiter erunt æquilatera. Reliqua quinque infra triangula simili modo



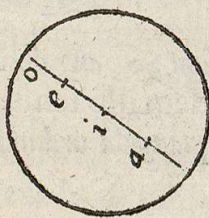
modo concludentur: unum igitur esto pro omnibus *ib* deductis radiis *di* & *de*. Nam *ib* potens ut prius latera sexanguli & decanguli, latus erit quinquanguli, erit, & pariter *be* potēs *de* & *db* latera sexanguli & decanguli, latus quinquanguli. Quare triangulum *ebi* est æquilaterum, & quatuor reliqua similiter ostenduntur æquilatera. Omnia igitur latera viginti triangulorum cum sint æqualia, erunt triangula ipsa æquilatera, & per *c* 6 e 7 æqualia.

10. *Diagonius icosaedri est irrationalis ad latus.*

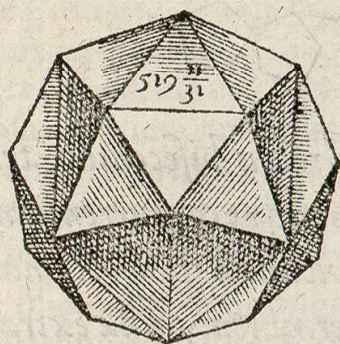
Quartum est exemplum *ἀλογίας* vel *ἀσυμμετρίας*: primum fuit de diagonio & latere quadrati, secundum fuit de segmentis rectæ proportionaliter sectæ, tertium de diametro circuli & latere quinquanguli. Et

II. *Potest quintuplum circularis radii.*

Nam per *s* e 18 continuata ē latere sexanguli & decanguli secatur proportionaliter, & majus segmentum est latus sexanguli: Ut hic bisecetur perpendicularis *ae* in puncto *i*, tum *eo*, id est minus segmentum continuatum dimidio majoris, id est *ie* poterit per *s* e 14 quintuplum ejusdem dimidii *ie*. Itaque cum *io* dimidium diagonii possit quintuplum bisegmenti, diagonius tota poterit quintuplum totius bisecti. At qui hinc etiam erit geodasia icosaedri. Nam ad altitudinem pyramidis semidiagonius est ē latere decanguli & semiradio circuli: latus autem decanguli est recta subtendens dimidiam peripheriam lateris quinquangularis, vel majus segmentum radii proportionaliter secti. Sic



enim geometrice sumi potest, & pro sua mensura numerari. Itaque si quadratum ē latere decanguli tollatur a quadrato ē latere quinquanguli, relinquetur per *9* e 18 quadratum ē latere sexanguli, id est ē radio. Latus decanguli quia latus quinquanguli hic est $6\frac{2}{3}$, erit $3\frac{2}{3}$ recta nempe subtendens dimidiam peripheriam: semiradius autem sic habebitur. Quadrata quinquanguli & decanguli sunt $369\frac{639}{1215}$: & subductione hujus ab illo reliquum quadratum sexanguli per *9* e 18 est $26\frac{586}{1125}$, & reliqui latus pro radio est $5\frac{3}{5}$ & fere $\frac{5}{7}$. semiradius igitur est $2\frac{6}{7}$: adde latus decanguli $3\frac{2}{3}$ cum $2\frac{6}{7}$, totum erit $5\frac{3}{5}$ pro semidiagonio icosaedri. Radius circuli triangulo circumscripti est per *7* e 18 idem qui prius $3\frac{2}{3}$ ē quadrato nempe 12. Itaque si quadratum circularis radii tollatur a quadrato semidiagonii, relinquetur quadratum altitudinis & perpendicularis: quadratum semidiagonii est $35\frac{389}{1125}$ quadratum radii circularis est 12, hoc ab illo sublatum relinquit $23\frac{689}{1125}$, cujus latus est fere 5 pro perpen-

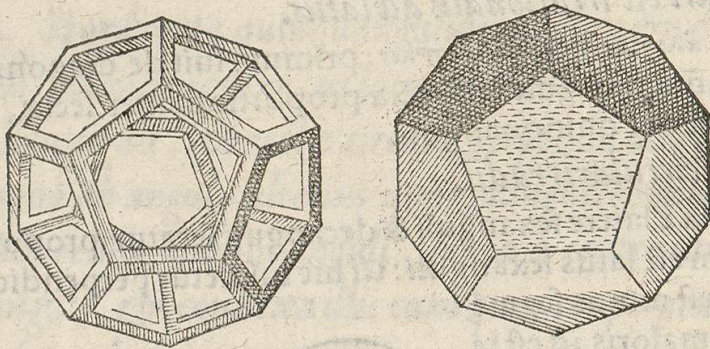


dicula-

diculari & altitudine proposita: unde jam pyramis æstimetur. Basis pyramidis triangulæ est $15\frac{1}{3}$. Planus ex hac basi & tertia altitudinis est $25\frac{3}{4}$ quibus per 20 multiplicatis summa icosaedri est $519\frac{1}{4}$. Hæc geodæsia est icosaedri.

12. Polyedrum mistum ordinatum quinquangulæ basis est quod a duodecim quinquangulis comprehenditur, & dodecaedrum dicitur.

Ut
hic



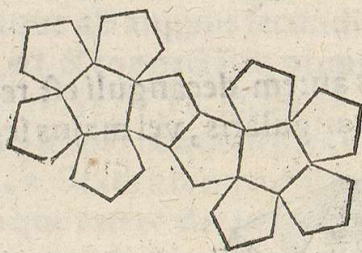
Itaque

1. Dodecaedi latera sunt 30, anguli plani 60, solidi 20.

Hoc item est ex eodem illo scholio 15 lib.

2. Si duodecim quinquangula ordinata equalia solidis angulis componentur, comprehendunt dodecaedrum.

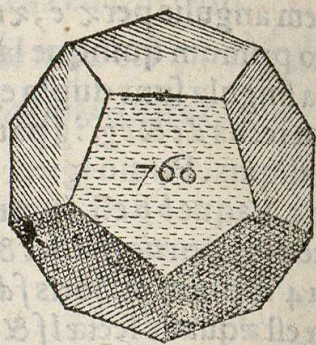
Ut
hic
videtur.



13. Si cubi latera rectis bisecentur, ternaque bisegmenta bisecantium in conterminis planis neque concurrentium neque parallelarum, duo unus tertium reliquæ vicinum proportionaliter ita secantur, ut minora segmenta bisecantem terminent, terna extra cubum dictis planis perpendicularares a proportionalium sectionum punctis, æquales majoribus segmentis connexæ duæ ex eadem bisecante inter se & cum vicinis cubi angulis, tertia cum angulis eisdem comprehendunt dodecaedrum. 17 p 13.

Sunto cubi duo plana pro omnibus, ut unum quinquangulum pro duodecim describatur, eaque contermina æi o & e u y i lateribus bisecta per bisecantes sr, lm, rn, j v, triaue bisegmenta bisecantium lm & rn neque concurrentium neque parallelarum, duo ipsius lm nempe fl & fm, tertium reliquæ vicinum, id est lr, & quodlibet bisegmentum secetur proportionaliter in punctis d, c, g, ita ut minora segmenta terminent bisecantem nempe dl, cm, gr: denique sunt tres perpend

quinquāgulo circūscripti: Postremo si tollat[ur] quadratū radii à quadrato semidia-
gonii, reliqui lat⁹ erit perpēdicularis altitudo. Ut si lat⁹ decāguli sit $7\frac{3}{5}$, quadra-
tum erit $57\frac{19}{25}$ triplicatum $173\frac{7}{25}$: latus fere $13\frac{107}{131}$ pro
diagonio dodecaedri. Itaque dimidiatum erit pro
semidiagonio dodecaedri $6\frac{119}{131}$. Radius circularis de
inceps invenietur sic. Si quadratum ē latere decangu-
li tollatur à quadrato de latere quinquanguli, latus
reliqui erit radius circuli per 9 & 6 e 18. Ut hic latus
quinquanguli est $4\frac{2}{3}$, latus decanguli $2\frac{2}{5}$, quadrata
autem sunt $21\frac{7}{9}$, $5\frac{19}{25}$; hujus ab illo subductione relin-
quitur $16\frac{4}{25}$: cujus latus est $4\frac{2}{5}$ pro radio circuli. In
ventis semidiagonio dodecaedri & circuli radio restat altitudo. Tolle igitur cir-
cularis radii quadratū $16\frac{4}{25}$ à semidiagonii quadrato $47\frac{12458}{1761}$, latus reliqui
 $31\frac{2714406}{3861225}$ est 54 pro altitudine, cujus una tertia est $\frac{2}{3}$. Basis quinquangula
est fere 38, quæ per $\frac{2}{3}$ facit $63\frac{1}{3}$ pro soliditate unius pyramidis, quæ per 12 facit
760 pro soliditate totius dodecaedri.



16. *Solida plana tantum quinque sunt ordinata.*

Quod patet ex anguli solidi natura per species planarum figurarum. à duo-
bus planis angulis non comprehenditur angulus solidus, ex tribus angulis tri-
anguli ordinati est angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex quinque icosa-
edri: ē sex non potest: nam sex plani tales anguli valerent 12 tertias recti, id
est quatuor rectos. At anguli plani facientes solidum sunt minores quatuor re-
ctis per 8 e 22: ē septem igitur & pluribus multo minus est possibile. E' qua-
dratis tribus angulis comprehenditur angulus cubi, ē quatuor non potest ob
eandem causam. E' tribus angulis quinquanguli ordinati est angulus dode-
caedri, ē quatuor non potest: nam singuli valent rectum & unam quintam.
Itaque essent quatuor recti, & tres quintæ. E' pluribus igitur multo minus est
possibile. Demonstratio hæc accurate sane & manifeste colligit, quamvis pla-
na ordinata innumerabilia possint esse, attamen ē generibus angulorum quin-
que tantum corpora ordinata institui posse, unde tetraedrum, octaedrum, i-
cosaedrum, basi triangula, cubus quadrangula, dodecaedrum quinquangula
componitur. Atque ita geometria Pythagoræ theologiam quandam ex iis
quinque corporibus ordinatis reperit, tanquam mens illa summi dei sapientia
que de fabricando mundo & ordinatis corporibus exornando cogitans stereo-
metricam demonstrationis hujus ideam sibi proposuerit.

P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X X V I.
de sphaera.

Solidum gibbum est quod comprehenditur à superficie gibba.
Sic antea planum à superficie plana definitum est.

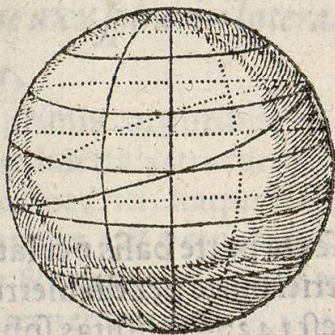
2. Estque

2. *Estque sphaera aut varium.*

Partitio solidorum é superficiebus suis intelligitur.

3. *Sphaera est gibbum rotundum.*

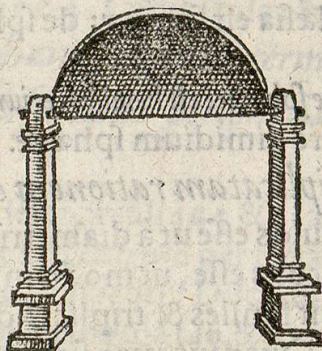
Potuit etiam
definiri quod
á sphaerico cõ-
prehenditur.
Corpus sphæ-
ricum, sphaera
græce, latine
globus appel-
latur: sed græ-
cum verbum
usitatum teneatur.



Itaque

Sphaera fit conversione semicirculi manente diametro. 14 d 11.

ut hic vides. Euclides hæc
sphæræ fabricam proposu-
it, qualis antiquior est in
superficie, analogia tamen
respondet, & sphæram fie-
ri conversione semicirculi
intelligimus, dum concipi-
mus inane spatium (quo
semicirculus attigerit) cor-
porari. Atq; ut antea de cir-
culo in planis deque sphærico in gibbis, sic modo intelligatur sphæram in so-
lidis esse ordinatissimam.

4. *Maximus sphæræ circulus est, qui sphæram bisecat.*

Hoc peripheriis sphæricis respondet ut proximum.

Itaque

Circulus propior maximo major est remotiore.

Et

Aequi distantes á maximo sunt æquales.

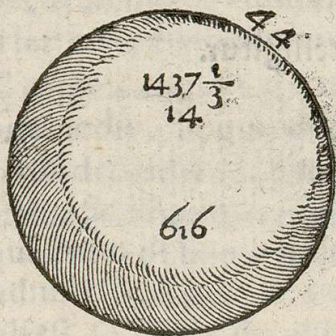
ut in superiore exemplo.

5. *Planus é diametro & sextante sphærici est sphaera.*

ut antea circulo & sphærico, sic modo cubo & sphæræ sua analogia est. Cu-
bica superficies comprehenditur sex basibus quadratis æqualibus, & sphaera

y 2 item

item cō-
prehen-
ditur
sex basi-
bus
sphæri-
cis equa-
libus cu-
bicas ba-
ses ambi-



entibus: Cubus efficitur multiplicata sexta parte basis per latus: & sphæra si-
militer efficitur multiplicata sexta sphærici parte per diametrum tanquam per
latus. Sic planus est $\frac{616}{6}$ & 14 diametro est $1437\frac{1}{3}$ soliditas sphæra. Itaque

1. Ut 21 ad 11, sic cubus diametri ad sphæram.

Ut hic cubus est 14 est 2744. facile enim fuit comparanti cubum 2744 cum
sphæra deprehendere 2744 ad $1437\frac{1}{3}$ esse in minimis terminis ejusdē rationis,
ut 21 ad 11. Ergo hæc geodasia est sphæra: de sphæra sectore & sectione geodæ-
sia postea erit.

2. Planus est radio & sextante sphærici est hemisphærium.

Sed accuratius est sumere dimidium sphæra.

6. Sphæra habent triplicatam rationem diametrorum. 18 p 12.

Sic antea dictum est circulos esse ut à diametris quadrata, quia essent plana
similia, & diametros in circulis esse, ut modo in sphæris, homologa latera. Ita-
que cum sphæra figuræ sint similes & triplicis dimensionis, habent rationem
diametrorum triplicatam. Quantus vero sit usus propositionis hujus, astrono-
mia insigne exemplum suppeditat de differentia solis & terræ. Nam cum Ptole-
maus diametros solis & terræ deprehendisset esse ut 11 ad 2 ex triplicata ratio-
ne sphærarum reperit rationem solis ad terram esse 331 ad 8, id est solem mayo-
rem terra centies sexagies sexies & $\frac{3}{8}$. Copernicus (quia sol propius ad terram
accessit à Ptolemæi tempore, milliaria germanica 9976, id est gallica 20952)
deprehendit solem majorem esse terra centies sexagies sexies & $\frac{7}{8}$ ut propēse-
mel amplius superet.

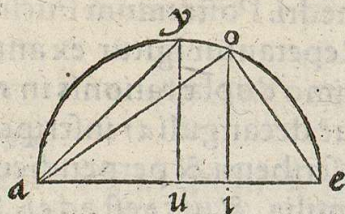
7. Quinque corpora ordinata inscribuntur eidem sphæra conversione
semicirculi habentis pro diametro in tetraedro rectam potentem sesquial-
terum ad latus tetraedri, in quatuor ordinatis reliquis ordinati ipsius dia-
gonium.

Corporum planorum ordinatum adscriptio est in sphæram, ut superficie-
rum planarum antea fuit in circulum: trianguli & ordinati triangulati quadrā-
guli, quinquanguli, sexanguli, decanguli, quindecanguli. Sedenim figuras
illas planas geometres inscripsit & circumscripsit circulo. Corpora autem quin-
que ordinata & polyedrum præterea stereometris sphæra duntaxat inscripsit:
polyedrum

polyedrum in scholis reliquimus: ordinata tamen complectimur. Adscriptio igitur ista separatim tractatur à fabrica corporum ipsorum, ut in planis alio loco trianguli & quadrati fabrica instituitur: alio traditur adscriptio. Conversio autem ejusdem semicirculi sphaeram omnibus communem efficit.

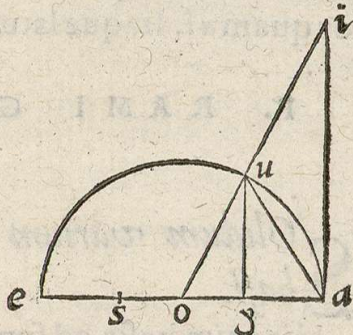
8. *E' ratione axis sphaerici latera tetraedri, cubi, octaedri, dodecaedri deprehenduntur.*

Axis in tribus primis corporibus est rationalis ad latus, ut patuit: potest enim sesquialterum lateris tetraedrici, triplum cubici, duplum octaedrici. Itaque si axis ae secetur dupla ratione in i , & perpendicularis io connectatur ad a & e erunt latera oa tetraedri & oe cubi, ut patet per 2 c 4 e 8 & 1 c 15 e 4 & cubici lateris proportionaliter secti majus segmentum est latus dodecaedri per 15 e 24. Si axis idem bisecetur, ut in u & perpendicularis erigatur uy , connectaturque ya , connectens erit latus octaedri, ut patet item per 2 c 4 e 8 & 1 c 15 e 4. Latus icosaedri hoc modo habetur.



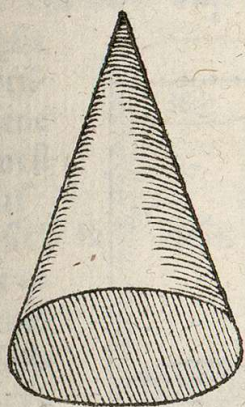
9. *Si recta aequalis axi sphaerico, eique à termino perpendicularis connectatur ad centrum, recta à sectione peripheriae ad dictum terminum erit latus icosaedri.*

Ut hic esto axis ae , diameter semicirculi ae , & ai aequalis ipsi axi, & perpendicularis à termino connectatur ad centrum per rectam io , recta à sectione ui in a erit latus icosaedri: Ducatur ab u perpendicularis uy , hic duo triangula iao , & uyo sunt aequiangula per c 9 e 7. Itaque per 9 e 7 sicut ia ad ao , sic uy ad yo . At ia est dupla ipsius ao . Itaque uy est dupla ipsius yo : potest itaque per 7 e 12 quadruplū, & ideo uy & yo , id est per 5 e 12 uo , id est rursus per 17 e 440 potest quintuplum yo : At yo est minor quā oa , id est quam oe : aequalis secetur os . Jam ut dimidia ao potest quintuplum dimidia yo , sic dupla ae poterit quintuplum duplæ ys . Itaque per 11 e 25 cum diagonus ae possit quintuplum ipsius ys , ys erit latus sexanguli inscripti circulo circumscribenti quinquangulum icosaedri: At perpendicularis uy aequatur ipsi ys , quia utraque dupla est ipsius yo . Quare uy est latus sexanguli: at ay est latus decanguli, aequatur enim ipsi se , quia si ab aequalibus radiis oa & oe tollantur aequales oy & os , relinquentur aequales ya & se : & diagonus icosaedri per 9 e 25 componitur è latere sexanguli utrinque continuato latere decanguli. Quare ay est latus decanguli. Postremo ua potens latera sexanguli & decanguli per 9 e 18 erit latus icosaedri.



y 3 IO. Ex

Hic
ba-
sis
est
cir-
cu-
lus.



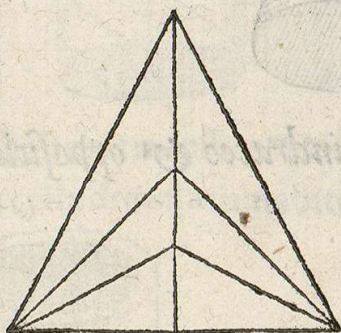
Itaque

1. Fit conversione trianguli rectanguli manente altero crure.

Ut patet nempe e variis definitione. Hanc conifabricam proponit Euclides 18 d 11: nec alium conum videtur tum stereometria percepisse. Apollonius conum generaliter tractavit, & species recti atque obliqui distinxit, ideoque propter conicam doctrinam altius extructam magnus geometra dictus est, ut Geminus est author apud Euthocium.

2. Conus est rectangulus, si crus manens est aequale converso, obtusangulus si minus, acutangulus si majus. e 18 d 11.

Hic conicæ altitudinis differentia triplex proponitur e triplici angulorum differentia, qua dimidiati coni vertex distinguitur: differentia tamen optica potius quam geometrica. Conus enim e minus videtur instar trianguli. Itaque pro differentia altitudinis apparet vertice rectangulo, obtusangulo, acutangulo: ut hic minimus conus est obtusangulus, medius rectangulus, summus acutangulus. Causa vero triplicis differentie in angulis e differentia crurum est e consecutariis triplicis trianguli de recta bisecante basim, ut patet ad finem 3 lib.



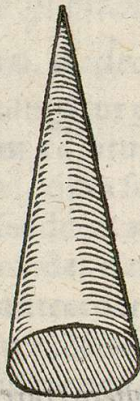
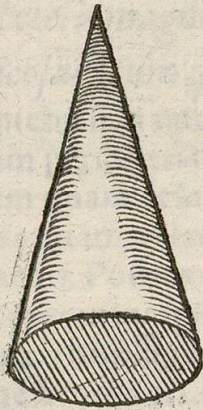
3. Conus est prima figura variarum.

Conus enim sic primus est in solidis variis, ut triangulum in planis rectilineis, ut pyramis in solidis planis, neque in alia solida varia simpliciora dividipotest.

4. Coni

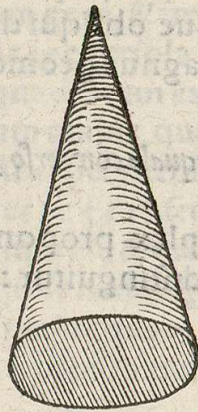
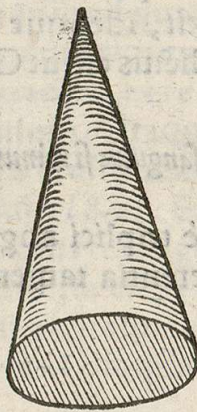
4. Coni aequalti sunt ut bases. Quae est II p 12.

ut
hic
vi-
des.



5. Reciproci basi & altitudine sunt aequales. 15 p 12.

Con
secta
ria
sunt
é 12
& 13
e 4.
ut
hic
vi-
des.



5. Cylindrus est quod á cylindraceo & oppositis basibus comprehenditur.

Hic
e
nim
cir-
culi
duo
pa-
ralle-
li
sunt
ba-
ses circuli.



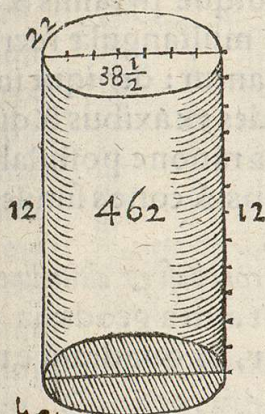
Fit conversione parallelogrammi rectanguli manente altero latere. 2 x d 11.
Ut patet ex eadem varii definitione.

Itaque

Planus

6. *Planus ē basi & altitudine est soliditas cylindri.*

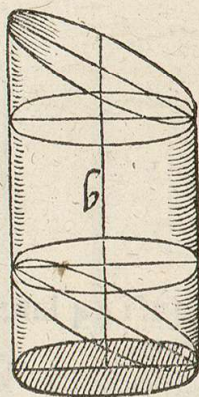
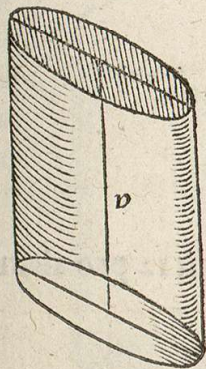
Geodesia
hic ē prisma
mate repe
titur, ut si
cylindri
basi sit
 $38\frac{1}{2}$ ex ea
& altitudi
ne 12 soli
ditas cy
lindri est



462. Atque geodesia respondet prismatis, omninoque parallelogrammi rectā
guli geodesia.

Si cy
lindr⁹
basib.

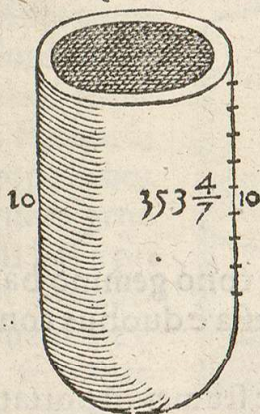
oppo
sitis sit
obli
quus,
ampu
ta de
basi al
tera &



alteram tanto augeas, habebis mensuram totius, ut hic vides in cylindris a, b.

Hinc capacitas ^vasis cylindracci æstimabitur. Inane enim tanquam plenum.

metiendum est,
ut hic. Interioris
circuli diameter
6 pedum, per
ipheria $18\frac{6}{7}$, area
igitur $28\frac{2}{7}$, ex
qua & altitudi
ne planus est
 $282\frac{6}{7}$. Sic igitur
æstimabis, ut
antea quantum



liquoris vel contenti cujuslibet pes cubicus occupet.

7. *Cylindrus est triplus coni basi & altitudine æqualis. 10 p 12.*

De labyrintho Euclidæ demonstrationis ad hanc propositionem dicetur in
scholis. Ratio cylindri ad conum simpliciter potius assumatur ē ratione prisma
tis ad

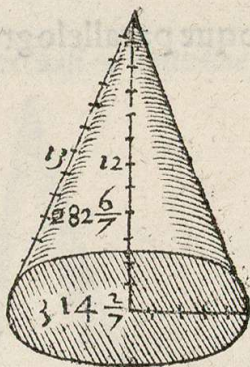
z

ris ad pyramidem. Cylindrus enim prismatis, ut conus pyramidis speciem imitatur: quin intra eadem latera prisma, cylindrusque pyramis & conus esse possunt: & si prisma pyramisque basis admodum multangula fuerint, eadem figura prisma & cylindrus, pyramis & conus videantur: denique intra eadem latera, ut conus cylindrique, sic prisma & pyramides ex axibus & diametris basium similitudinem habeant, tamque geometrica ratione postulabitur cylindrum conus triplum esse, quam postulatur cylindros & conos similes esse, quorum axes sunt diametris basium proportionales. Itaque

1. Planus est cylindri basi & triente altitudinis est soliditas coni basi & altitudine æqualis.

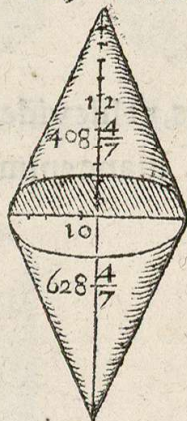
Est triplicitate cylindri sequitur geodæsia conus, ut antea geodæsia pyramidis fuit est triplicitate prismatis. Altitudo autem habetur. Si quadratum est radio basis

tollatur à quadrato de latere, reliquus erit altitudo, ut patet per 5 & 12. Hic igitur est radio 5 quadratum 25



tollatur est quadrato 169 de latere 13, reliquus 144 latus erit 12 pro altitudine, ex

cujus tertia 4 & basi circulari $78 \frac{4}{7}$ planus est $314 \frac{2}{7}$ pro conus soliditate. Analogia autem conici ad cylindraceum non respondet, ut subtriplum sit conicum cylin-



dracei, sicuti conus est subtriplus cylindri: est cono gemino basis communis fit rhombus archimedeus, ut hic, cujus geodæsia est duobus conis erit.

2. Cylindri æquealti sunt ut bases. 11 p 12.

Cylindracea forma sacci sunt, quibus fere frumentum portatur. Si quis igitur agricola saccum frumenti vicino commodarit, in cujus basi diameter sit 4 pedum, tandemque vicinus pro uno sacco reddat quatuor æquealtos, & in basi pedalis

pedalis diame-
tri videbitur
fortasse com-
modatum red-
didisse æquali
mensura, altitu-
dine videlicet
& basi. At ma-
gnam differen-
tiam quadrata



è quatuor singularibus diametris 1, 1, 1, 1, id est 4 ad quadratum 16 e 4 commo-
dati diametri. Circuli nempe sunt ut à diametris quadrata, per 2 e 15. Itaque
fraus esset 12, id est tripli.

3. Reciproci basi atque altitudine sunt æquales. 15 p 12.

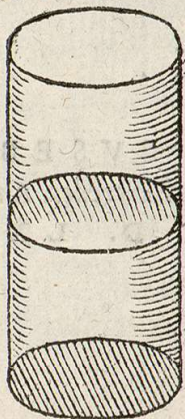
Hæc enim
utraq; af-
fectio figu-
ris prima-
rum æque
multiplici-
bus attri-
buita est.



Et

Si cylindrus secatur plano basibus oppositis parallelo, segmenta sunt ut axes. 13 p 12.

Ut hic vides. Axes enim
sunt altitudines. Consectari-
um item est è generali theo-
remate primarum figurarū,
sed paulo secus propositum
de altitudine, tanquam gene-
rale fuisset, Aequalis basis pri-
mas figuras esse, ut altitudi-
nes. Respondet autem 4 c 5
e 23. Inæquales sectiones
sphaeræ huc nobis rejectæ



sunt, quia comprehenduntur à superficie tum sphaerica tum conica, ut sector:
item à plana & sphaerica, ut sectio, & in utroque sicut in circulo segmentū ipsum
majus minusque dicitur, & sector in centro ut antea consideratur.

2 2

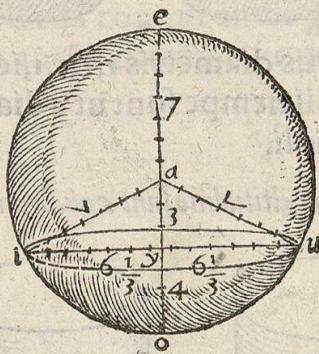
8. Sector

8. *Sector sphaerae est segmentum sphaerae, quod foris à sphaerico; intus à conico in centrum terminato comprehenditur, major concavo, minor convexo.*

Archimedi tales sectores sunt primo de sphaera, unde & geodasia reliqua sumpta est, & hic analogia quædam est cum sectore circulari.

9. Planus é diametro & sextante majoris vel minoris sphericæ est sector major vel minor.

Uthic ē diametro 14 & $4\frac{2}{3}$ (quæ
est una sexta sphaerici majoris)
planus est 1026 $\frac{2}{3}$ pro soliditate
majoris sectoris. Sic ex eadē dia-
metro 14 & $29\frac{1}{3}$ quæ est $\frac{1}{5}$ de 176
minore sphaerico planus est
410 $\frac{2}{3}$ pro soliditate minoris secto-
ris. Atque hinc postremo solidi-
tas sectionis oritur additione &
subductione.



IO. Si major sector augeatur intermedio cono, totus erit major sectio:
si minor minuat, reliquus erit minor sectio.

Ut hic conus intermedius dimensus est $126\frac{4}{3}$, additus sectori majori componit $2152\frac{40}{3}$; ac idem detractus minori sectori relinquit $284\frac{38}{3}$.

F I N I S.

BASILEAE, PER EVSEBIUM EPISCO-
pium, & Nicolai fratris heredes. Anno Salutis humane
M. D. LXIX.