A MONSIEUR

# DE VAUBAN,

MARESCHAL DE CAMP
DES ARMÉES DU ROY,
GOUVERNEUR DE LA CITADELLE
DE L'ISLE;
COMMISSAIRE GENERAL DES FORTIFICATIONS
DE FRANCE, &c.



MONSIEUR,

*Ce n'est pas seulement pour procurer un puissant Protecteur à ma Nouvelle Découverte de la* Division des Angles, *que je prens la liberté de la* faire paroiſtre ſous Vos auſpices, mais c'eſt principalement pour m'aquiter envers Vous d'vn devoir qui regarde tous les Mathematiciens, & qui me touche en particulier plus que perſonne. Oüi, MONSIEVR, tous les Mathematiciens Vous doivent un hommage d'autant plus grand, que Vous avez fait plus d'honneur aux Mathematiques, depuis que Vous les avez rendus ſi vtiles au ſervice du Roy, & que par là Vous leur avez attiré vne eſtime vniverſelle, qui les a fait comme ſortir de l'oubli, où elles ſembloient être enſevelies; on Vous a toûjours regardé comme leur Dieu Tutelaire, & comme celui à qui elles eſtoient principalement redevables de leur élevation. Le Roy n'a pû voir ſans admiration avec combien de ſageſſe Vous ſçaviez attaquer, & reduire à l'extrémité des Places, qui juſques alors avoient paſſé pour imprenables; & la prodigieuſe difference qui met celles que Vous avez fortifiées, infiniment au deſſus de toutes celles qu'on avoit bâties auparavant, n'a pû manquer de faire naître au plus ſage de tous les Rois, l'eſtime qu'il a pour des Sciences que Vous avez ſi bien ſceu faire ſervir à ſa gloire.

Que cette eſtime Vous eſt glorieuſe, MONSIEVR, & qu'il Vous eſt honorable de voir, que les vtilitez que Vous avez tirées des Mathematiques ont ſceu les introduire dans le Louvre, & en faire l'Etude du plus grand Prince de l'Vnivers. Car enfin il eſt hors de doute, que rien n'a plus déterminé LOUIS LE GRAND a rendre ces Sciences familieres à

MONSEIGNEUR LE DAUPHIN, *que les avantages que l'Etat en reçoit, & que Vous luy procurez plus que personne par leur moyen.*

*Voilà,* MONSIEVR, *ce qui est en la bouche de tous les Hommes, & ce que j'entens dire par tout; Que ne dirois-je point de Vostre grand courage, & de cette intrépidité qui Vous fait affronter les plus grands dangers, quand il s'agit du service du Roy? en un mot, de cette haute vertu qui Vous a élevé au premier degré de faveur sans brigue, & qui Vous y conserve sans envie, si j'avois autant d'éloquence que de veneration, & si ma plume pouvoit suivre mon zele? Heureux! si je puis Vous le prouver par cette foible marque de mon respect, & Vous faire connoître combien j'ay de reconnoissance pour la maniere obligeante avec laquelle Vous me reçûtes, lorsque j'eus l'honneur de Vous presenter mon Traité* du Toisé. *Vous eûtes la bonté de me dire alors que Vous souhaitiez trouver l'occasion de me le faire pratiquer, pour moy je Vous proteste que je ne desire rien avec plus d'ardeur, que celle de Vous faire paroître avec combien de veneration & de respect; Je suis,*

MONSIEUR,

Vostre tres-humble, & tres-obeïssant Serviteur,

J. B. TARRAGON.

JE soussigné, Professeur Royal des Mathematiques en l'Université de Paris, certifie avoir lû le present traité de la *Trissection de l'Angle, par Monsieur Tarragon Mathematicien*, lequel j'estime tres-digne d'estre imprimé, contenant des Propositions qui peuvent estre d'un grand usage dans la Geometrie. Fait à Paris ce dixiéme jour de Janvier 1687.

*Signé* HEBERT.

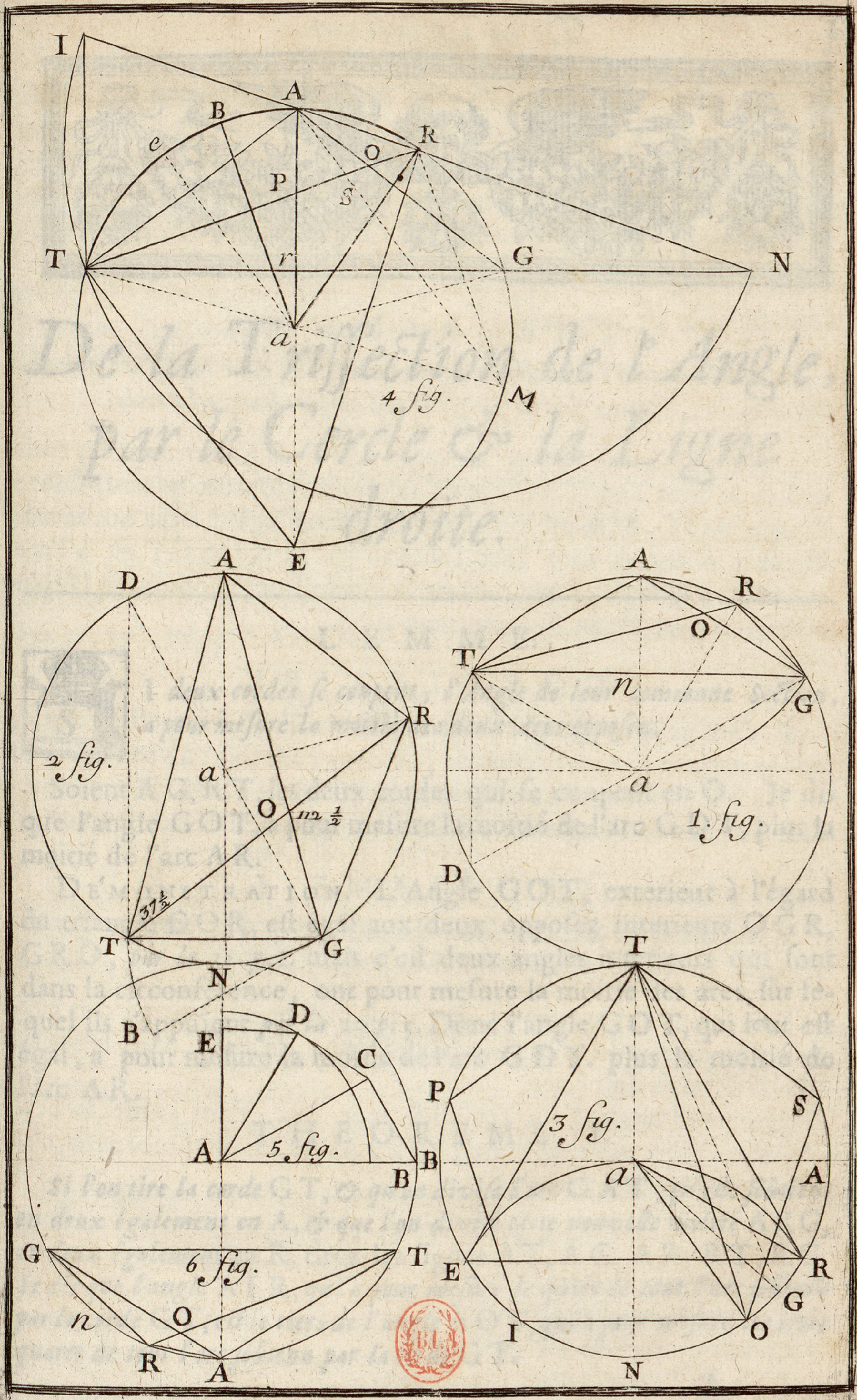
---

Veu l'Approbation permis d'Imprimer. Fait ce onziéme Janvier 1687.

*Signé* DE LA REYNIE.

---

A PARIS,
De l'Imprimerie de la Veuve d'ANTOINE CHRESTIEN, ruë d'Escosse, prés l'Eglise Saint Hilaire.
1687.


4 fig.
2 fig.
$112\frac{1}{2}$
$37\frac{1}{2}$
1. fig.
5. fig.
3 fig.
6 fig.

# De la Trissection de l'Angle, par le Cercle & la Ligne droite.

## LEMME.

*SI deux cordes se coupent, l'Angle de leur commune Section, a pour mesure la moitiè des deux Arcs opposez.* I. FIG.

Soient A G, R T, les deux cordes qui se coupent en O. Je dis que l'angle G O T, a pour mesure la moitié de l'arc G D T, plus la moitié de l'arc A R.

DEMONSTRATION. L'Angle GOT, exterieur à l'égard du triangle G O R, est égal aux deux opposez interieurs O G R, G R O, *par la 32 p.* 1. mais c'est deux angles interieurs qui sont dans la circonference, ont pour mesure la moitié des arcs, sur lequel ils s'appuïent *par la 20 p.* 3. Donc l'angle G O T, qui leur est égal, a pour mesure la moitié de l'arc G D T. plus la moitié de l'arc A R.

## THEOREME I.

*Si l'on tire la corde* G T, *& qu'on divise l'arc* G A T, *qu'elle soûtient en deux également en* A, *& que l'on divise cette nouvelle moitié* A R G, *en deux également en* R. tirez les lignes AT, A G, A R, R T, R G. *Je dis que l'angle* AT R, *qui a pour mesure le quart de tout l'arc soûtenu par la corde* G T, *est le tiers de l'angle* A O T, *qui a pour mesure les trois quarts de tout l'arc soûtenu par la corde* G T. I. FIG.

Démonstration. L'Angle AOT. a pour mesure la moitié de l'arc AT. plus la moitié de l'arc RG. mais l'arc RG. est égal à l'arc AR. par construction. Donc l'angle AOT a pour mesure la moitié de l'arc TAR. mais l'arc TAR est triple de l'arc AR par construction, & la moitié de l'arc AR mesure l'angle ATR. Donc l'angle ATR est le tiers de l'angle AOT. La même démonstration subsiste pour l'arc plus grand que le demy cercle.

## THEOREME II.

*La raison de tout l'arc soûtenu par la corde* GT, *est à tout l'arc qui mesure l'angle, dont on fait la Trissection ; comme huit, est à trois.*

Démonstration. L'Angle AOT est soûtenu par les trois quarts de tout l'arc TAG. mais la moitié de trois quarts mesure l'angle AOT, & la moitié des trois quarts égale trois huitiéme. Donc la raison de tout l'arc soûtenu par la corde GT est à l'arc qui mesure l'angle, dont on fait la Trissection ; comme le Dénominateur huit est au Numerateur trois.

## COROLLAIRE.

Il s'ensuit que l'angle dont on fait la Trissection est à l'angle, qui le mesure par trois comme $\frac{3}{8}$ de tout l'arc soûtenu par la corde GT est à $\frac{1}{8}$ de tout l'arc soûtenu par la même corde. Donc la mesure du tiers de l'angle est à tout l'arc, comme l'unité est à huit.

## PROBLEME I.

*Estant donné un arc, dont le nombre des degrez sont connus. Connoître tout l'arc dans lequel la Trissection se doit faire.*

Soit donné un arc de 45. degrez à diviser en trois parties égales. On demande la quantité des degrez de l'arc, dans lequel la Trissection se doit faire.

L'arc ou l'angle à diviser est à tout l'arc, dans lequel la Trissection se doit faire, comme 3 est à 8 par le Theor. precedent, c'est pourquoy suivez cette

## ANALOGIE.

*Le Numerateur trois*
*Est à son Dénominateur huit ;*
*Comme le Numerateur* 45 *degrez,*
*Est à son Dénominateur* 120 *degrez.*

Ainsi multipliez 45 par 8, & divisez le produit par 3, l'exposant donnera 120 degrez pour le quatriéme proportionel, & ce quatriéme proportionel est la grandeur de l'arc, dans lequel la Section se doit faire. La démonstration en est évidente *par le Theoreme* precedant.

Soit encore donné un Arc de 112. $\frac{1}{2}$ degrez à diviser en trois. On demande l'Arc, dans lequel la section se doit faire. Trouvez le quatriéme proportionel, qui est 300. degrez & ainsi de tous les autres à l'infini.

## PROBLEME II.

*Estant donné un arc dont les degrez sont connus, Trouver l'angle dans cet arc qui peut estre divisé en trois parties égales.*

Soit l'Arc donné de 183. $\frac{33}{64}$ degrez. On demande l'angle dans cette arc, qui peut estre divisé en trois parties égales. Ce Probleme n'est que la converse du precedent. Suivez cette

## ANNALOGIE.

*Le Dénominateur huit*
*Est à son Numerateur trois;*
*Comme le Dénominateur* 183. $\frac{33}{64}$ *degrez.*
*Et à son Numerateur* 68. $\frac{419}{512}$ *degrez.*

Multipliez dont 183. $\frac{33}{64}$ par trois & divisez le produit par huit l'exposant donnera 68. $\frac{416}{512}$ degrez qui est la grandeur de l'angle qui peut estre divisé par trois.

## PROBLEME III.

*Estant donné un Angle donc les degrez de son ouverture sont connus, le diviser en trois parties égales, par le Cercle & la Ligne droite.* I. Fig.

Soit donné un Angle de 45 degrez le diviser en trois parties égales.

Trouvez l'arc dans lequel la Trissection se doit faire, qui est de 120 degrez par le 1. *Prob.* Faites Langle G*a*T, de 120 degrez. Tirez la corde G T, divisez l'arc G A T, en deux également en A, tirez les lignes A G, A T, divisez l'arc G R A, en deux également en R, tirez les lignes R G, R A, R T. Je dis que l'angle AOT est de 45 degrez, & que l'angle ATR est de 15 degrez.

DE'MONSTRATION. L'Angle AOT, a pour mesure la moitié des trois quarts de l'arc GAT. Mais l'arc GAT, est de 120 degrez par construction, dont les trois quarts égalent 90 degrez pour RAT, dont la moitié égale 45 degrez pour l'angle AOT, l'arc RA est de 30 degrez, la moitié est 15 degrez pour l'angle RAT, &c.

I. FIG. Soit encore donné un Angle de 112. $\frac{1}{2}$ degrez à diviser en trois parties égales, l'arc dans lequel la section se doit faire, est de 300. degr. par le 1. *Probl.* Otez 300, degr. du Cercle, restent 60 degrez; faites l'arc GNT de 60 degrez, achevez la construction, vous verrez que l'Angle AOT, sera de 112. $\frac{1}{2}$ degrez, & que l'Angle RTA, sera de 37. $\frac{1}{2}$ degrez, qui est le tiers de l'Angle AOT, la demonstration est la même que la precedente.

On voit que tout le secret de la Trissection de l'Angle, ne consiste qu'à inscrire la corde GT, capable de soûtenir un arc donné. Euclide nous fournit dans la 34. *p.* 3. une methode pour inscrire cette corde, que nous rapporterons icy.

### *Methode d'Euclide, pour inscrire une corde capable de soûtenir un arc d'une Angle donné.*

II. FIG. SOit l'arc dans lequel la section se doit faire de 300. degrez le complement au Cercle égale degrez 60 degr. dont la moitié est de 30 degr. Tirez la Tagente BG, faites l'Angle du Segment BGT, de 30. degrez. Ie dis que l'arc GRAT, est de 300. degrez.

LA DE'MONSTRATION en est évidente, parce que l'Angle GAT, est de 30 degrez donc l'arc GNT, sera de 60 degrez, donc l'arc GRAT, sera de 300. degrez.

III. FIG. Voicy deux tables qui nous donnent 108. exemples, pour inscrire la corde GT, selon la methode d'Euclide & par consequent 108. exemples de la Trissection de l'Angle, par le Cercle & la Ligne droite. L'origine de la premiere table est en la derniere proposition de son quatriéme livre; où il nous enseigne à inscrire un *Pentedecagone* regulier dans le cercle. Soit donc OR, le côté du *Pentedecagone*, l'Angle au centre O*a*R, sera de 24 degrez, l'Angle en la circonference OTR, sera de 12. degrez *par la* 20. *p.* 3. & si vous divisez l'arc OR, de 24 degrez en deux également au point G, & que vous tiriez la ligne GT, l'Angle GTO, sera de 6 degrez & par consequent l'Angle de 3 degrez est connu. Tous ces multiples le seront donc aussi, puis-qu'il n'y a qu'à continuer la progreſſion, dont le premier terme eſt un arc de 3 degrez, auſſi bien que la difference. Ainſi par le moyen de cette propoſition, on peut trouver tous les arcs que la premiere progreſſion donne. Cette premiere progreſſion ſont les Angles *dans le Segment:* La deuxiéme donne la grandeur de l'arc qui ſoûtient la corde GT, dans lequel la Triſſection ſe doit faire; la troiſiéme progreſſion donne la grandeur de l'Angle ou de l'arc qui peut eſtre diviſé en trois parties égales; la quatriéme progreſſion qui eſt le complement de la deuxiéme, donne la grandeur de l'arc dans lequel la Triſſection ſe doit faire; & la cinquiéme progreſſion donne la grandeur de l'Angle qui doit eſtre diviſé. Ainſi ſi vous faites l'angle du Segment de 51 degrez, vous trouverez que la deuxiéme Colonne vous donne 102. degrez pour la grandeur de tout l'arc, dans lequel la Triſſection ſe doit faire; la troiſiéme vous donne 38. $\frac{1}{4}$ degrez pour la grandeur de l'Angle, qui doit eſtre diviſé en trois; la quatriéme vous donne 258. degrez; & la cinquiéme *96.* $\frac{1}{4}$ pour l'arc qui doit eſtre diviſé en trois. La deuxiéme table prend ſon origine de la 15.*p.* 4. où il nous enſeigne encore d'inſcrire un exagonne regulier dans le cercle,& par conſequent le Dodecagone donc l'arc connu, eſt de 30. degrez. Si vous diviſez cet arc de 30. degrez en 8. parties *par la 9. p.* 1. Vous trouverez 3. degrez 45. minutes pour ſa huitiéme partie. Cet arc de 3. degrez 45. minutes nous donnera tous ceux de la premiere progreſſion. L'uſage eſt le même que de la premiere.

**CETTE PREMIERE TABLE** *donne 60. exemples de la Trissection par le cercle & la ligne droite.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 2 1/4 | 354 | 132 3/4 |
| 6 | 12 | 4 1/2 | 348 | 130 1/2 |
| 9 | 18 | 6 3/4 | 342 | 128 1/4 |
| 12 | 24 | 9 | 336 | 126 |
| 15 | 30 | 11 1/4 | 330 | 123 3/4 |
| 18 | 36 | 13 1/2 | 324 | 121 1/2 |
| 21 | 42 | 15 3/4 | 318 | 119 1/4 |
| 24 | 48 | 18 | 312 | 117 |
| 27 | 54 | 20 1/4 | 306 | 114 3/4 |
| 30 | 60 | 22 1/2 | 300 | 112 1/2 |
| 33 | 66 | 24 3/4 | 294 | 110 1/4 |
| 36 | 72 | 27 | 288 | 108 |
| 39 | 78 | 29 1/4 | 282 | 105 3/4 |
| 42 | 84 | 31 1/2 | 276 | 103 1/2 |
| 45 | 90 | 33 3/4 | 270 | 101 1/4 |
| 48 | 96 | 36 | 264 | 99 |
| 51 | 102 | 38 1/4 | 258 | 96 3/4 |
| 54 | 108 | 40 1/2 | 252 | 94 1/2 |
| 57 | 114 | 42 3/4 | 246 | 92 3/4 |
| 60 | 120 | 45 | 240 | 90 |
| 63 | 126 | 47 1/4 | 234 | 87 3/4 |
| 66 | 132 | 49 1/2 | 228 | 85 1/2 |
| 69 | 138 | 51 3/4 | 222 | 83 1/4 |
| 72 | 144 | 54 | 216 | 81 |
| 75 | 150 | 56 1/4 | 210 | 78 3/4 |
| 78 | 156 | 58 1/2 | 204 | 76 1/4 |
| 81 | 162 | 60 3/4 | 198 | 74 1/4 |
| 84 | 168 | 63 | 192 | 72 |
| 87 | 174 | 65 1/4 | 186 | 69 3/4 |
| 90 | 180 | 67 1/2 | 180 | 67 1/2 |

**CETTE DEUXIE'ME TABLE** *donne 48. exemples de la Trissection par le cercle & la ligne droite.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 3/4 | 7 1/2 | 2 13/16 | 352 1/2 | 132 3/16 |
| 7 1/2 | 15 | 5 5/8 | 345 | 129 5/8 |
| 11 1/4 | 22 1/2 | 8 51/54 | 337 2/2 | 126 9/16 |
| 15 | 30 | 11 1/4 | 330 | 123 3/4 |
| 18 3/4 | 37 1/2 | 13 13/16 | 322 1/2 | 120 15/16 |
| 22 1/2 | 45 | 16 7/8 | 315 | 118 1/8 |
| 26 1/4 | 52 1/2 | 19 11/16 | 307 1/2 | 115 5/16 |
| 30 | 60 | 22 1/2 | 300 | 112 1/2 |
| 33 3/4 | 67 1/2 | 25 5/16 | 292 1/2 | 109 11/16 |
| 37 1/2 | 75 | 28 1/8 | 285 | 106 7/8 |
| 41 1/4 | 82 1/2 | 30 15/16 | 277 1/2 | 104 1/16 |
| 45 | 90 | 33 3/4 | 270 | 101 1/4 |
| 48 3/4 | 97 1/2 | 36 9/16 | 262 1/2 | 98 7/16 |
| 52 1/2 | 105 | 39 3/8 | 255 | 95 5/8 |
| 56 1/4 | 112 1/2 | 42 13/16 | 247 1/2 | 92 13/16 |
| 60 | 120 | 45 | 240 | 90 |
| 63 3/4 | 127 1/2 | 47 13/16 | 232 1/2 | 87 3/16 |
| 67 1/2 | 135 | 50 5/8 | 225 | 84 3/8 |
| 71 1/4 | 142 1/2 | 53 7/16 | 217 1/2 | 81 9/16 |
| 75 | 150 | 56 1/4 | 210 | 78 3/4 |
| 78 3/4 | 157 1/2 | 59 1/16 | 202 1/2 | 75 5/16 |
| 82 1/2 | 165 | 61 7/8 | 195 | 73 1/8 |
| 86 1/4 | 172 1/2 | 64 11/16 | 187 1/2 | 70 5/8 |
| 90 | 180 | 67 1/2 | 180 | 67 1/2 |

## OBJECTION.

*Les Geometres m'objecteront peut-estre qu'il y a une infinité d'Angles & de cordes, qu'on ne peut pas inscrire au cercle; & ainsi que cette methode n'est pas generale, & ne peut servir qu'à quelques arcs ou Angles particuliers.*

## RE'PONCE.

*Je répons à ces Messieurs, qu'il est vray qu'il y a une infinité d'Angles & de cordes qui ne se peuvent pas inscrire. Mais qu'il y en a aussi une infinité qui le puissent, comme on le voit par les deux Tables que j'ay seulement données, quoique j'en puisse donner une infinité d'autres.* Mais il est fort facile de la rendre universelle par la doctrine des Sinus. Car dans le triangle GTD, tous les Angles nous sont connus, & le diametre du cercle l'est aussi, il ne reste donc plus qu'à trouver la ligne DT, qui est sinus de l'Angle DGT connu. Car tout l'arc donné GAT, estant ôté de deux droits reste l'arc DT, dont la moitié mesure l'Angle DGT, la corde GT, est le sinus de la moitié de l'arc donné GAT, ainsi nous connoîtrons ces deux lignes inconnuës par ces deux Analogies. I. FIG.

### ANALOGIE pour DT,

*Comme le sinus total*
*Est au diametre du cercle;*
*Ainsi le sinus de la moitié de la difference de l'arc au demy cercle*
*Est à la corde* DT,

Si l'on inscrit la corde DT, dans le cercle, & que l'on tire le diametre D*a*G, vous aurez le point G, ainsi tirant la corde GT, vous aurez l'arc dans lequel la section se doit faire: ou bien comme DT, est égale à TA, posez DT, de T, en A, & de A, en G.

### ANALOGIE pour GT.

*Comme le sinus total*
*Est au diametre du cercle;*
*Ainsi le sinus de la moitié de tout l'arc,*
*Est à toute la corde qui le soûtient.*

La corde G T, estant connuë, on la peut inscrire au cercle. Voila pour l'arc qui est plus petit que le demy cercle, mais pour l'arc qui est plus grand, comme l'arc G R A T, qui est de 300 degrez, il faut ôter 300. degrez du cercle. Restent 60 degrez pour l'arc G N T, dont la moitié est le sinus de l'angle GDT, opposé à la corde T G, qui soûtient tout l'arc G R A T, & est son complement au cercle. Ce même complement est le sinus de l'angle T G D, opposé à la corde T D. Nous connoistrons donc ces deux lignes par ces deux Analogies.

II. Fig.

### ANALOGIE pour D T.

*Comme le sinus total*
*Est au diametre du cercle ;*
*Ainsi le sinus de la difference de tout l'arc au cercle*
*Est à la corde* T D.

### ANALOGIE pour T G.

*Cmme le sinus total*
*Est au diametre du cercle ;*
*Ainsi le sinus de la moitié de la difference de tout l'arc au cercle*
*Est à la corde* G T, *qui soûtient l'arc de* 300 *degrez.*

### OBJECTION II.

*On me dira peut-estre encore ; quoy que la doctrine des sinus soit veritable ; que les sinus dont on se sert dans les Tables ne sont pas exactss, & ainsi que l'on n'a pas la solution dans la rigueur Geometrique.*

### RE' PONCE.

*Je répond que ceux qui voudront avoir la solution dans la rigueur Geometrique, n'ont qu'à se donner la peine de chercher les sinus exacts par les regles de la Geometrie & des irrationaux, ce qui est bien facile à un veritable Geometre. Au reste quoy que la methode que je propose par les sinus semble ne rien donner que l'on n'eust déja, & que même il paroisse qu'il est beaucoup plus court en se servant des sinus de chercher tout d'un coup la corde du tiers de l'arc que l'on veut diviser. I'ay crû toutefois que l'on seroit bien-aise de découvrir dans les Analogies precedentes des proportions ausquelles on n'avoit point encore songé, quoy que je reconnoisse de bonne foy, que tout l'avantage de ma nouvelle methode est de donner Geometriquement la Trissection d'une infinité d'angles ; ce que aucun Geometre que je sçache, n'avoit fait avant moy.*

Mais

14

# LA DIVISION DES ANGLES

EN TEL NOMBRE ÉGAL DE PARTIES IMPAIRES QUE L'ON VOUDRA JUSQU'A L'INFINI, PAR LE CERCLE ET LA LIGNE DROITE.

*Par J. B.* TARRAGON, *Professeur en Mathematique.*




A PARIS,
Chez l'Auteur ruë Aubri - Boucher, vis à vis la Fontaine des Saints Innocens, chez un Limonadier.

M. DC. LXXXVII.
AVEC PERMISSION.

Mais pour remplir entierement l'attente des Geometres, il ne resteroit plus qu'à donner la Trissection de tout angle indéterminément. Ce qui est impossible par la ligne droite & le cercle simplement, mais possible avec le cercle combiné avec quelqu'une des sections coniques ; comme l'a donné Monsieur Descartes, & comme le donne l'idée que j'avois de la découverte de ce fameux Probleme, par le cercle & la ligne droite qui est telle. Soit donc l'angle B*a*T, donné à diviser en trois parties égales, du centre *a*, & de telle intervalle que l'on voudra, soit décrit le cercle TBG. Faites l'arc BR, égal à l'arc BT, tirez la ligne RT, du point R, comme centre & de l'intervalle RT, décrivez le cercle NTI, construisez le triangle rectangle NTI, de telle maniere que la ligne NG, soit égale à AT ; ou divisez NI, en A, de telle maniere, que le rectangle ANR, soit égal au quarré AT, ou NG, ou que le quarré RA, soit égal au rectangle TRO. L'angle ATR, sera le tiers de l'angle B*a*T, ou de son égal IAT. Ou bien construisez le quadrilaterre RETA, dont les points R & T, sont donnez de position & l'angle RET est donné de grandeur, puis qu'il est égal à l'angle donné, & l'angle RAT est aussi donné de grandeur, puis qu'il est le complement du même angle donné à deux droits, & les deux angles du quadrilaterre sont droits. Il sembleroit que cela seroit bien facile à construire, & neanmoins il est tout-à-fait impossible. Car les points qu'il faudroit pour construire ou le triangle ou le quadrilaterre ne se peuvent trouver que par les coniques. IV. FIG.

Je m'en vais donner les Equations, qui vous donnent la solution de ce Probleme, par les Sections coniques.

Soit donc le diametre du cercle AE, égal à $2b$, & la corde du double de l'angle donné égale à $a$, & soit la ligne $ar$, égale à $z$. Cela estant posé, vous trouverez que le quarré AT, égale $2bb - 2bz$, & le quarré TE, égale à $2bb + 2bz$. Donc EP, qui luy est égal vaudra aussi $\sqrt{2bb + 2bz}$ & AP $= 2b - \sqrt{2bb + 2bz}$ & à cause des trois continuelles proportionnelles $a$R, RA, AP, la ligne AR $= \sqrt{2bb - b\sqrt{2bb + 2bz}}$, donc ER $= \sqrt{2bb + b\sqrt{2bb + 2bz}}$. Mais le rectangle AE, RT, égale le rectangle AT, ER, plus ; le rectangle AR, ET, & pour abreger l'operation prenez $x =$ $\sqrt{2bb - b\sqrt{2bb + 2bz}}$ & vous aurez cette Equation $2ab =$
$$\sqrt{8b^4 - 2bbxx - 8b^3z + 2bzxx} + \sqrt{2bbxx + 2bzxx},$$

& quarrant chaque membre de l'égalité, vous aurez que $4aabb \propto 8b^4 - 2bbxx - 8b^3z + 2bzxx + 2bbxx + 2bzxx$, qui se reduit à $4aabb \propto 8b^4 - 8b^3z + 4bzxx$. Le tout étant divisé par $4b$ vous aurez $aab \propto 2b^3 - 2bbz + xxz$ où $aab - 2b^3 + 2bbz - xxz \propto 0$. Mais $xx \propto 2bb - b\sqrt{2bb + 2bz}$, substituez sa valeur dans l'Equation, vous aurez $aab - 2b^3 + bz\sqrt{2bb + 2bz} \propto 0$ & pour ôter l'incommensurabilité faites passer $aab - 2b^3$ de l'autre côté & quarrez chaque membre, vous aurez $4b^6 - 4aab^4 + a^4bb \propto 2b^4zz + 2b^3z^3$ & divisant le tout par $bb$ vous aurez $4b^4 - 4aabb + a^4 \propto 2bbzz + 2bz^3$. Donc $z^3 + bzz - 2b^3 + 2aab - \frac{a^4}{2b} \propto 0$ Vous voyez que l'inconnu $z$ monte au troisiéme & deuxiéme degré. Ce qui fait voir que le Probleme est solide de sa nature, lorsque l'angle donné est inconnu : & par consequent qu'il est insoluble par le cercle, & la ligne droite. Voicy encore une autre Equation qui nous fait voir que ce Probleme est solide de qu'elle maniere qu'on le prenne ; les trois lignes a R, RA, A P, sont continuellement proportionnelles. Donc AP, $\propto \frac{xx}{b}$ mais le ▭ E P A, $\propto$ ▭ R P T, donc $2xx - \frac{x^4}{bb} \propto ax - xx$ ou $2bbxx - x^4 \propto axbb - bbxx$. Divisant le tout par $x$, vous aurez $3bbx - x^3 \propto abb$ ou $x^3 - 3bbx + abb \propto 0$. Vous trouverez encore cette Equation en comparant le ▭ N A R, avec le □ AT, le ▭ N A R, $\propto ax + xx$ & le □ AT $\propto 4xx - \frac{x^4}{bb}$ : Donc $ax + xx \propto 4xx - \frac{x^4}{bb}$ ou $ax \propto 3xx - \frac{x^4}{bb}$, divisant le tout par $x$, vous aurez $a \propto 3x - \frac{x^3}{bb}$ & multipliant le tout par $bb$, vous aurez $abb \propto 3bbx - x^3$ ou $x^3 - 3bbx + abb \propto 0$ : comme nous l'avions trouvé, vous trouverez encore cette même Equation, par l'égalité des rectangles S P E & A P T, ce qui fait voir que ce Probleme ne peut se résoudre que par les Sections coniques. Ceux qui voudront avoir la résolution de cette derniere Equation, peuvent consulter le premier exemple de la construction des Equations cubiques de M[r] de Lahire assez connu pour un des illustres de l'Academie Royalle des Sciences, & un des grands Geometres de nôtre siecle. Ils trouveront que celle-cy, est la même que celle-là ; qu'il donne seulement pour exemple de la reduction des Equations cubiques, non pas pour la Trissection de l'angle. Je donneray dans la suite la construction de ce Probleme par le cercle & les Sections coniques.

La construction de ce Probleme, donne la duplication du cube, car si vous tirez T $a$ jusques en M, & que vous tiriez AM, vous aurez que les quatre lignes S P, P A, A R, R *a*, sont continuellement proportionnelles. Ainsi pour avoir la duplication du cube, il ne reste plus qu'à donner l'angle R *a* A, qui est toûjours le $\frac{1}{3}$ du double de l'angle à diviser en trois, & par ces deux Theoremes qui suivent, vous aurez les deux continuelles.

## THEOREME III.

*La corde du double de l'angle, plus la petite extrêmes de quatre continuelles proportionelles estant divisé par trois, donne la plus grande des moyennes, &*

## THEOREME IV.

*Le quarré de cette même somme divisé par neuf quarrez de la plus grande des extrêmes, donne la plus petite des moyennes.*

Je ne donne pas la démonstration de ces deux Theoremes, les vrais Geometres la trouverõt & elle seroient inutile pour les autres, *par la corde du double de l'angle, il faut entendre la corde* T R, *qui soûtient le double de l'angle à diviser en trois.* Toute la question presentement consiste à donner la grandeur de l'angle dans lequel la duplication du cube se doit faire, ce que je promet donner dans la suite, non pas seulement pour trouver entre 1 & 2, deux continuelles proportionelles : mais pour en trouver entre 2 & 3, entre 5 & 6 &c. Et à l'infiny, il arrivera peut-estre que je ne pourray pas donner la grandeur de l'angle, dans la derniere exactitude, à cause des irrationaux, du moins la donneray-je dans l'exactitude de Ludolphe de Cologne *. Voicy l'operation qui convient à la division des angles. Car selon que l'angle est divisé, vous trouvez plus ou moins de continuelles proportionelles. Car dans la Trissection il y en a 4, dans la division en 4 il y en a 5, dans la division en 5 il y en a 6 ; & ainsi des autres trouvant toûjours une continuelle plus que l'angle n'est divisée. Soit donc l'angle E A B, divisé en trois parties égales, du point B, faites tomber la perpendiculaire B C, & du point C, faites tomber la perpendiculaire C D, & du point D, la perpendiculaire E D, il est évidant que les quatre lignes A B, A C, A D & A E, sont continuellement proportionelles, si la ligne A E, est 2, & que la ligne AB soit 3, les quatre lignes seront 2. $V^c 12$ $V^c 18$ & 3. V. Fig.

* C'est une maniere de parler à cause que cét Auteur a fait voir que la circonference du cercle est plus & moins qu'un certain nombre. C'est aussi dans le plus & le moins que je donneray cét angle.

Ce seroit peu de choses à mon avis si la découverte que je fais, ne s'étendoit qu'à la Trissection de l'angle, & qu'il restât encore aux Geometres à chercher la division des angles en 5, en 7, en 9, & à l'infini. Je prétend par la même methode donner toutes ces divisions jusqu'à l'infini : & pour le faire voir, je vais donner la division en 5. parties égales, & ensuite je donneray mon Probleme universel jusqu'à l'infini.

# *DE LA DIVISION D'UNE INFINITE' d'angles, dont l'arc est connu en tel nombre égal de parties impaires que l'on voudra jusqu'à l'infini.*

## De la division en cinq parties égales.

### THEOREME. V.

S*I l'on tire la corde* G T, *& que l'on divise l'arc* G A T, *en deux également en* A, *& cette nouvelle moitié en trois parties égales aux point* N, R, *par le troisiéme Probleme.*

VI. Fig. Tirez la ligne A G, A T, A R, R T, R G. *Ie dis que l'angle* A O T, *est quintuple de l'angle* R T A.

Dé'monstration. L'angle A O T a pour mesure la moitié de l'arc A T, plus la moitié de l'arc G R; mais l'arc A T, plus l'arc G R, égale les cinq sixiémes, de tout l'arc G A T, par construction, & l'angle R T A a pour mesure la moitié de l'arc A R, qui est le sixiéme de tout l'arc. Donc l'angle A O T, qui a pour mesure la moitié de $\frac{5}{6}$ est quintuple de l'angle R T A, qui a pour mesure la moitié d'un $\frac{1}{6}$ &c.

### COROLLAIRE.

La raison de tout l'arc soûtenu par la corde G T, est à l'arc, qui mesure l'angle, dont on fait la division en cinq parties. Comme le Dénominateur 12 est aux Numerateur 5. Car l'angle A O T a pour mesure la moitié de $\frac{5}{6}$ qui est $\frac{5}{12}$ & l'angle R T A est aussi à tout l'arc, comme un est à douze, puis qu'il est mesuré par la moitié d'un $\frac{1}{6}$ qui est un douziéme.

### PROBLEME.

*Estant donné un arc de* 147 $\frac{1}{2}$ *degrez, le diviser en* 5. *parties.*

Trouvez l'arc dans lequel la section se doit faire, qui est de 354 degr. Achevez la division par le Theoreme. Soit encore donné un arc de 15 degrez à diviser en 5. l'arc dans lequel la section se doit faire sera de 36 degrez, & ainsi des autres.

## PROBLEME UNIVERSEL.

*On demande la raison de tout arc soûtenu par la corde* GT, *à l'arc qui mesure l'angle* AOT, *qui doit estre divisé en tel nombre égal de parties impaires que l'on voudra jusqu'à l'infini.*

## CONSTRUCTION.

Faites deux progressions Arithmetiques, dont le premier terme de la premiere soit 3, celuy de la seconde soit 4, & que la difference qui regne dans chaque progression soit 2; continuez ces deux progressions jusqu'à l'infini. Je dis que si l'on prend les deux premiers termes, les deux deuxiémes, les deux troisiémes, & les deux quatriémes, & ainsi de suite jusqu'à l'infini & qu'on les considere comme des fractions $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{9}{10}$ & $\frac{11}{12}$, & à l'infini vous aurez les proportions des arcs doubles de la mesure des angles par les Theoremes precedents, dont les moitiez égalent les raisons de tout l'arc à l'arc qui mesure l'angle, dont on doit faire la division , & ces moitiez sont $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{16}$ $\frac{9}{20}$ & $\frac{11}{24}$ &c. qui sont les raisons de tout l'arc à l'arc qui doit estre divisé. Comme pour la division en 3, la raison est de 8 à 3. Pour la division en 5, la raison est de 12 à 5; en sept, la raison est de 16 à 7; en neuf la raison est de 20 à 9, & ainsi de tous les autres à l'infini. L'on peut donc par ce Probleme universel diviser un angle connu en tel nombre de parties impaires que l'on voudra. La premiere progression marque en combien l'angle peut estre divisé, la deuxiéme marque combien l'arc soûtenu par la corde G T doit estre divisé, & la troisiéme progression marque tous les Dénominateurs & Numerateurs des raisons qui doivent servir comme autant de Theoremes, pour découvrir tous les arcs dans lesquels la section se doit faire, lorsque celuy à diviser est donné, & au contraire. La Démonstration de ce Probleme est assez évidente, tant par elle-même, que par les Theoremes precedens.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. &c. Premiere progression.

4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. &c. Deuxiéme progression.

$\frac{3}{8}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{9}{20}$ $\frac{11}{24}$ $\frac{13}{28}$ $\frac{17}{36}$ $\frac{19}{46}$ $\frac{21}{44}$ &c. Troisiéme progression.

## SCOLIE.

On peut tout d'un coup trouver la raison de tout l'arc à l'arc qui mesure l'angle. Car il ne faut que poser le Dénominateur d'une unité plus que le Numerateur, & ensuite prendre la moitié de la fraction; comme par exemple, on demande la raison de tout l'arc qui mesure l'angle, d'un angle qui doit estre divisé en 77. parties égales. Joignez l'unité au Numerateur 77. vous aurez le Dénominateur 78. donc la fraction est $\frac{77}{78}$, dont la moitié égale $\frac{77}{156}$, qui marque que tout l'arc est à l'arc, qui doit estre divisé en 77 parties, comme le Dénominateur 156. est à son Numerateur 77. Vous pouvez changer vostre Dénominateur, pour faciliter vostre operation; car pour diviser un arc en cinq, je prend le Dénominateur 16, & j'ay $\frac{5}{8}$, ou qui font $\frac{5}{16}$, & je fais mon operation bien plus facilement que si j'avois pris $\frac{5}{12}$ &c.

*Il y auroit lieu de dire beaucoup de belles veritez sur cette nouvelle découverte, si l'on vouloit dire tout ce qui se peut dire; mais ne voulant donner icy qu'un essay que je soûmets à la censure universelle de tous les grands Geometres, & particulierement au jugement de Messieurs de l'Academie Royale des Sciences Ie passe le reste sous silence jusqu'à ce que j'aye vû quel succés ce petit essay pourra avoir.*

## FIN.

---

## AVERTISSEMENT.

*JE donneray bien-tost la suite du nouveau Traité Toisé; l'on y trouvera des Tables construites sur les Loix que j'ay donnez. L'on peut mesurer avec ces Tables toute sorte de superficies, & de corps par une seule adition. Quant mesmes les costez seroient donnez en toise, pied, pouce, ligne, & point Physique lineaire. Elles seront suivies d'une Geometrie pratique plus intelligible qu'aucune qui ait encore paru, je tâche dans cette Geometrie à lever toutes les difficultez qui peut arriver à un Arpenteur, & à un Ingenieur dans la mesure de la solidité des Rampants, & dans le vuides des Fossez.*